$$\because K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{and} \quad KL = n\pi$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

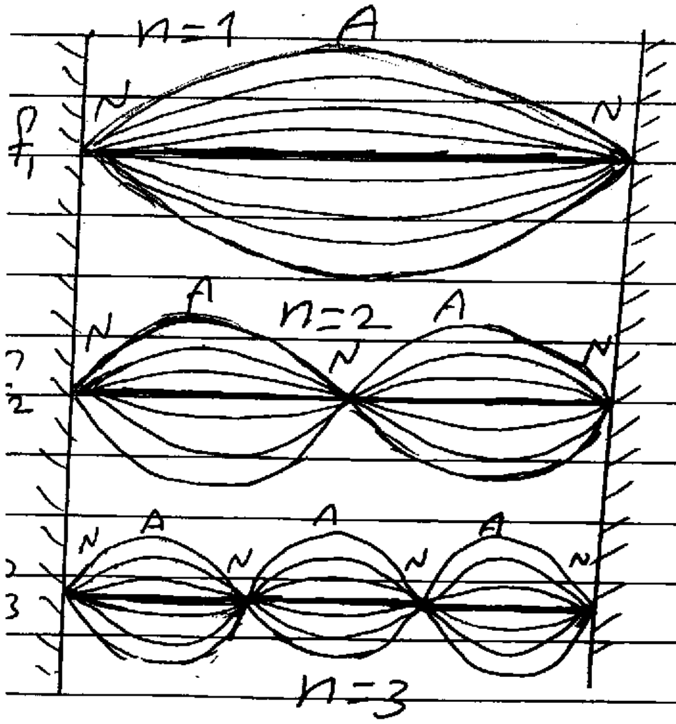
$$L = \frac{1}{2} n\lambda \quad \text{---} \quad (6) \Rightarrow \lambda = \frac{2}{n} L$$

λ = الطول الموجي

المعادلة (6) تمثل أنصاف الطول الموجي المحصورة بين طرفي الوتر للحصول على الموجات الواقفة

إن عدد الترددات الطبيعية للوتر يمكن الحصول عليها بتعويض القيم المناسبة لـ n بالمعادلة (5). وللحصول على الطول الموجي نعوض قيم n بالمعادلة (6) وكما مبين بالجدول:

n	λ_n (معادلة (6))	f_n (معادلة (5))	الملاحظات
0	0	0	(f_0) التردد الطبيعي صفر أي لا يحدث اهتزاز للوتر
1	$2L$	$U/2L$	(f_1) التردد التوافقي الأول (النغمة الأساسية للوتر) ويسمى التردد الأساسي
2	L	U/L	(f_2) التردد التوافقي الثاني
3	$\frac{2}{3}L$	$\frac{3}{2}U/L$	(f_3) التردد التوافقي الثالث



أن هذه الترددات تحدد عدد الموجات الواقفة المحصورة بين الطرفين المثبتين للوتر كما مبين بالشكل. حيث أن العدد n يمثل أنصاف الطول الموجي (عدد البطون) على طول الوتر وأن سرعة تقدم الموجة على الوتر تساوي:

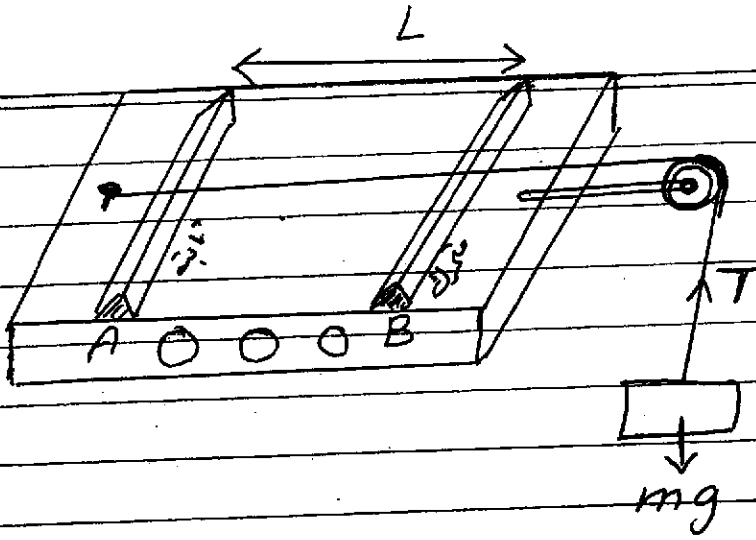
$$U = f_n \lambda_n$$

حيث f_n : الترددات المحصورة للوتر

λ_n : الطول الموجي

ج.

الصونوميتر :



جهاز الصونوميتر هو كما مبين بالشكل يتألف من صندوق خشب مجوف (طوله حوالي متر) وعليه جسر ثابت A وآخر متحرك B للتحكم بطول السلك المعدني الذي يمر فوقهما. أحدى نهايتي السلك مثبتة بمسمار والنهاية الأخرى تمر على بكرة خفيفة ملساء مثبتة بالنهاية الأخرى للصندوق ويعلق في هذا الطرف أثقال تحدد مقدار قوة الشد في السلك.

الغرض من الصونوميتر هو تحقيق قوانين الأوتار المهتزة.

قوانين الأوتار المهتزة :

وجدنا في البند السابق أن التردد الطبيعي لوتر محدد الطول ومثبت من الطرفين كما معطى بالمعادلة (5)

$$f_n = \frac{nu}{2L} \quad \text{--- (1)}$$

كما سبق إيجاد معادلة سرعة انتقال الموجة المستعرضة u في وتر مشدود

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{--- (2)}$$

من المعادلتين (1) و (2)

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{--- (3)}$$

أن المعادلة (3) تصح فقط للأوتار المثالية أي الأوتار ذات المرونة التامة وذات مساحة مقطع منتظم تماماً. وفي الحالات العملية نعتبر الأوتار المستخدمة مثالية.

وفي حالة أعتبار أن الوتر يهتز كقطعة واحدة بين نقطتي التثبيت فأن التردد الطبيعي هنا يساوي تردد النغمة التوافقية الأولى (التردد الأساسي $n=1$) ويساوي

$$f=\frac{u}{2L}=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad ---- (4)$$

((قانون ميرسين))

المعادلة (4) تسمى بـ(قانون ميرسين Mersenne Law)

نلاحظ من المعادلة (4) ما يلي:

(1) التردد الأساسي يتناسب عكسياً مع طول الوتر المهتز

$$f \propto \frac{1}{L}$$

فعند ثبوت T و μ لوترين فان

$$f'L'=f''L'' \Rightarrow \frac{f'}{f''}=\frac{L''}{L'}$$

(2) التردد الأساسي يتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لقوة الشد في الوتر.

$$f \propto \sqrt{T}$$

فعند ثبوت μ و L لوترين فأن:

$$\frac{f'}{f''}=\sqrt{\frac{T'}{T''}}$$

(3) التردد الأساسي يتناسب عكسياً مع الجذر التربيعي للكثافة الخطية (أو كتلة وحدة الطول)

$$f \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

فعند ثبوت L و T لوترين فان،

$$f'^2\mu'=f''^2\mu'' \quad or \quad \frac{f'}{f''}=\sqrt{\frac{\mu''}{\mu'}}$$

لغرض التعبير عن المعادلة (4) بدلالة كثافة مادة الوتر ρ وقطر الوتر D ، نفرض أن حجم الوتر V ويساوي

$$V=\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot L=\frac{\pi}{4}D^2L$$

كتلة الوتر m تساوي $m=\rho V=\frac{\pi}{4}D^2L\rho$

٢٢

الكثافة الخطية للوتر (كتلة وحدة الطول) = $\frac{\text{كتلة الوتر}}{\text{طول الوتر}}$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 L \rho}{L}$$

$$\mu = \frac{\pi}{4} D^2 \rho \quad --- (5)$$

من المعادلتين (4) و(5) نحصل على

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\frac{\pi}{4} D^2 \rho}} = \frac{1}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$$

$$f = \frac{1}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi \rho}} \quad --- (6)$$

المعادلة (6) تمثل معادلة التردد الأساسي للوتر المشدود.

وللحصول على المعادلة العامة للتردد نعوض المعادلة (5) بالمعادلة (3)

$$f_n = \frac{n}{LD}\sqrt{\frac{T}{\pi \rho}} \quad --- (7)$$

(23)

٢

مثال : موجة جيبية ذات سعة (10 cm) وطول موجي (2m) تمر في سلك بسرعة 16 m/sec. من اليسار الى اليمين - أحسب أقصى سرعة عرضية للموجة .

الحل : $A = 10cm \quad \lambda = 2m \quad U = 16\frac{m}{sec} \quad V_{max} = ?$

$$Y = A\sin(wt - kx)$$

$$V = \frac{dy}{dt} = Aw\cos(wt - kx) = V_{max}\cos(wt - kx)$$

$$V_{max} = Aw = 2\pi f A = 2\pi \frac{U}{\lambda} A$$

$$V_{max.} = 2\pi \frac{16}{2} \times (10 \times 10^{-2}) = 5.024 \ m/sec.$$

مثال : تثبت نهاية أنبوب مطاط بينما تمر النهاية الأخرى على بكرة لتتعلق النهاية الأولى (8 m) وتحمل ثقل (2 kg) ، أحسب سرعة النبضة المتعرضة التي تمر بالأنبوب إذا علمت أن كتلة الأنبوب بين النقطة المثبتة والبكرة تساوي 600 gm

الحل : $M = 2kg \quad L = 8m$

$m = 600gm \quad U = ?$

$$U = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = Mg = 2 \times 9.8 = 19.6 \ N$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{600 \times 10^{-3} kg}{8 \ m} = 0.075 \frac{kg}{m}$$

$$U = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6}{0.075}} = 16.16 \ m/sec$$