الموجات الواقفة (الساكنة أو المستقرة)

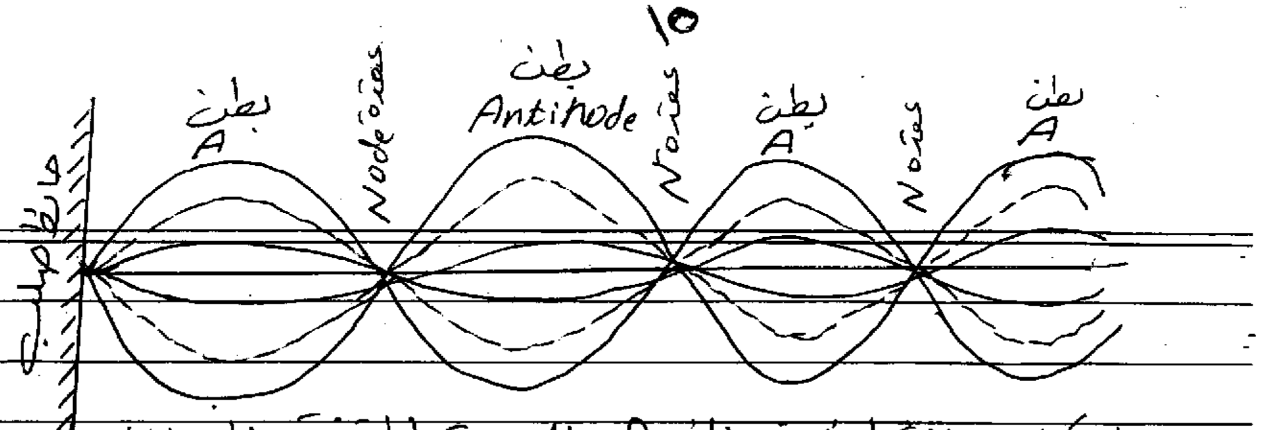
Standing Waves

تحدث الموجات الواقفة عندما تتداخل سلسلتان من الموجات المتماثلة تمامًا في نفس الوسط وكانتا في اتجاهين متعاكسين.

من الناحية العملية للحصول على موجتين متماثلتين بالسعة والتردد والسرعة وباتجاهين متعاكسين نستخدم الموجات الساقطة والمنعكسة.

لنفرض أن أحد طرفي سلك مثبت بإحكام في حائط صلب تمامًا وأن موجة مستعرضة (ساقطة) تسري في السلك باتجاه الحائط فإنها ستنعكس عند الحائط (السطح العاكس) والذي يمتاز بعدم إمكانية حركته (أي أن جسيمات السلك المثبتة بالحائط غير قابلة للحركة) لذلك سيكون هنالك فرق في الطور بين الموجة الساقطة والمنعكسة يعادل نصف دورة π عند نقطة الانعكاس. وبما أن تكون الموجتين الساقطة والمنعكسة بنفس السعة والتردد والسرعة فإن الانعكاس يجب أن يكون كاملًا، أي أنه لا يحدث أي امتصاص للطاقة من قبل الحائط، كما أن الاحتكاكات الداخلية بين جسيمات السلك يساوي صفر (عمليًا لا يمكن تحقيق ذلك). لو حدث هذا التتابع الموجي الجيبي على سلك، أي لو حصلنا على الموجتين الساقطة والمنعكسة على سلك في نفس الوقت فإنه سيحدث تشكيلًا موجيًا جديدًا ناتجًا من تركيب الموجتين ويسمى هذا التشكيل الجديد بـ (الموجات الواقفة).

إن الإزاحة التي تسببها الموجة المنعكسة عند الحائط تكون دائمًا مساوية ومعاكسة للإزاحة الناتجة عن الموجة الساقطة لذلك تكون محصلة الإزاحة تساوي صفر دائمًا، وتسمى هذه النقطة التي تنعدم فيها الحركة والإزاحة بـ (العقدة Node) ويرمز لها ((N))، ونتيجة للجمع الجبري لإزاحتي الموجتين الساقطة والمنعكسة (طبقًا لقاعدة التراكب) في أي لحظة زمنية لإيجاد محصلة الإزاحة نلاحظ أن هنالك نقاطًا عدة (العقد) تتلاشى فيها الإزاحة (كما في طرف السلك المثبت بالحائط)، وتسمى النقاط التي تقع في منتصف المسافة بين كل عقدتين متتاليتين بالعقد المضادة (أو البطون) Antinodes ويرمز لها ((A)).



الشكل يبين الغلاف الخارجي للموجة الواقفة على السلك

أن جزء السلك الواقع بين أي عقدتين (البطن A) يهتز ذهاباً وإياباً ضمن الغلاف المبين بالشكل حيث تتذبذب كل نقاط ذلك الجزء حركة توافقية بسيطة ترددها يساوي تردد الموجة الساقطة (أو المنعكسة) وبسعة تتغير تبعاً لموقع النقطة وتكون أقصاها قيمة لسعة الاهتزاز مساوية لضعف سعة الموجة الساقطة وتكون مساوية لـ عن منتصف المسافة بين عقدتين متتاليتين (أي في البطن)، وأن الأجزاء المهتزة في السلك تهتز بسرعة عالية جداً بحيث لا نظهر معها إلا الغلاف المبين بالشكل وبذلك يبدو السلك بدون حركة. وأن العقد تكون مواقع ثابتة لا تتغير بحيث أن الطاقة لا يمكنها أن تنساب عبر العقد لكونها في حالة سكون، لذلك فإن الطاقة تبقى واقفة في السلك ولا تنتقل إلى يمين أو يسار السلك، لذلك لا يمكن اعتبار الموجات الواقفة حركة موجية ولكنها تعتبر حركة اهتزازية للسلك يسببها تراكب موجتين منتقلتين في اتجاهين متعاكسين (على الرغم من تغيرها بالتعاقب بين طاقة حركية وطاقة كامنة.

نظرية الاهتزاز لوتر مشدود ومحدد الطول:

لكي ندرس الموجة الواقفة بطريقة تحليلية، نستخدم وتر مشدود محدد الطول ومثبت من الطرفين بصورة محكمة وطوله L. نحدث موجات تتقدم على الوتر باتجاه معين وبسبب وجود نهاية محددة للوتر فإن الموجات الساقطة تنعكس وتتقدم بالاتجاه المضاد وطبقاً لقاعدة التراكب التي تنص على أنه: (إذا تعرضت نقطة لتأثير حركتين موجيتين في نفس الوقت فإن محصلة الإزاحة لتلك النقطة تساوي المجموع الجبري للإزاحة التي تحدثها الموجات كل على حدة) - أي أن الموجتين تتداخلان مع بعضهما
نفرض لدينا موجتين لهما نفس التردد والسعة والسرعة وتتحركان

باتجاهين متعاكسين . لتكن الموجة المتقدمة على الوتر نحو اليمين (أي بالاتجاه الموجب لمحور X) تمثل بالمعادلة :

$$Y_1 = C_1 \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

وأن معادلة الموجة المتقدمة بالاتجاه المعاكس (أي نحو اليسار)

$$Y_2 = C_2 \sin(\omega t + kX) \quad (2)$$

وطبقاً لقاعدة التركيب فإن محصلة الإزاحة Y تساوي

$$Y = Y_1 + Y_2 = C_1 \sin(\omega t - kx) + C_2 \sin(\omega t + kx) \quad (3)$$

نطبق الشروط الحدودية Boundary conditions عند طرفي الوتر على المعادلة (3)

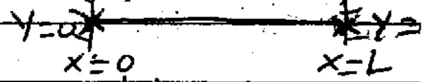
أ) الشرط الحدودي الأول: $X=0$ ، $Y=0$ لجميع قيم الزمن t

ب) الشرط الحدودي الثاني: $X=L$ ، $Y=0$ لجميع قيم الزمن t

(أ) نطبق الشرط الحدودي الأول على المعادلة (3)

$$0 = C_1 \sin(\omega t - 0) + C_2 \sin(\omega t + 0)$$

$$0 = (C_1 + C_2) \sin \omega t$$



$\therefore \sin \omega t \neq 0$ (لأن الشرط الحدودي هو لجميع قيم الزمن t)

$$\therefore C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 = -C_2 = C$$

أي أن سعتي الموجة الساقطة والمنعكسة متساويتين بالمقدار (انعكاس تام) ومتعاكستين بالطور (فرق الطور بينهما يساوي π):

نعوض قيم C بالمعادلة (3)

$$Y = C[\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)]$$

$$\therefore \sin(A \mp B) = \sin A \cos B \mp \sin B \cos A$$

$$\therefore \boxed{Y = -2C \sin kx \cos \omega t} \quad (4)$$

الإشارة السالبة تدل على أن الموجة الواقفة تتقدم نحو اليسار (أي بالاتجاه السالب).

المعادلة (4) هي معادلة الموجة الواقفة على الوتر ويلاحظ أن جميع
النقاط تتحرك بنفس التردد الزاوي ω، وأن ما يميز الموجة
الواقفة أن سعة الاهتزاز للنقاط المختلفة تختلف باختلاف
الموقع X عن الوتر وكما يلي:
من المعادلة (4)

$$Y = -A\cos\omega t$$

حيث أن

$$A = 2C\sin kx$$

وكما هو واضح بالمعادلة الأخيرة أن سعة الاهتزاز A للموجة
الواقفة مقدار متغير يعتمد على الموقع X

(1) تكون السعة A أقصى ما يمكن عند البطون وتساوي مجموع
سعة الموجتين الساقطة والمنعكسة.

$$A_{max} = 2C$$

When: $\sin kx = 1$

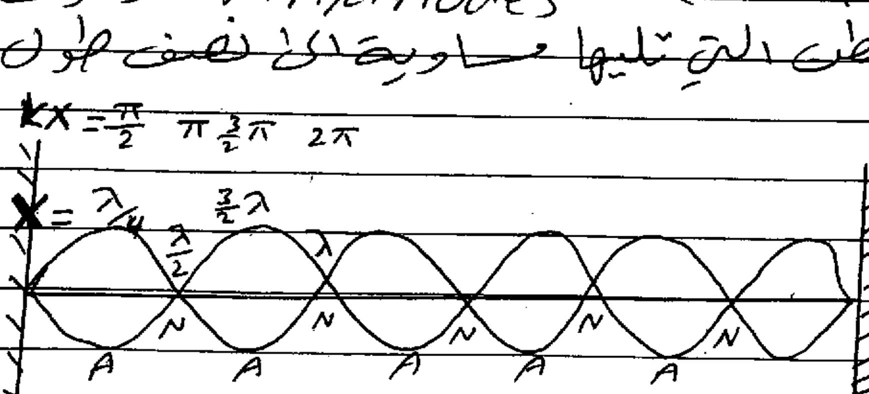
$$\therefore KX = \frac{1}{2}\pi ; \frac{3}{2}\pi , \frac{5}{2}\pi , \frac{7}{2}\pi , \ldots (n+\frac{1}{2})\pi$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\because K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\therefore X = \frac{1}{4}\lambda , \frac{3}{4}\lambda , \frac{5}{4}\lambda , \frac{7}{4}\lambda , \ldots$$

وتسمى هذه النقاط التي تكون فيها السعة أقصى ما يمكن
بـ(البطون) أو (العقد المضادة) Antinodes، وتكون
المسافة بين بطن والبطن التي تليها مساوية إلى نصف طول
الموجة



(2) تكون السعة A عند أدنى قيمة لها وتساوي صفر عندما:

$$A = 2C\sin kX$$

$$\because A = 0$$

$$\therefore 2C\sin kX = 0$$

$$\because 2C \neq 0$$

$\therefore \sin KX = 0$

$KX = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$

$\because K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$\therefore X = 0, \frac{1}{2}\lambda, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \ldots, \frac{n}{2}\lambda$

وتسمى هذه النقاط بـ (العقد Nodes) وتكون المسافة بينها كذلك نصف طول الموجة $(\frac{1}{2}\lambda)$ وبذلك فأن المسافة بين عقدة N وبطن A تساوي $(\frac{1}{4}\lambda)$

ب) نطبق الشرط الحدودي الثاني على المعادلة (4) : أي عندما

$Y = -A \cos wt$ --- (4) $\quad X = L$ ، $Y = 0$ لجميع قيم t

$Y = -A \cos wt = 0$

$\because \cos wt \neq 0 \qquad$ (لجميع قيم t)

$\therefore A = 0$

$\because A = 2C \sin kX$

$\therefore 0 = 2C \sin kL$ نعبر الشرط الحدودي الثاني $(X=L)$

$\because 2C \neq 0$

$\therefore \sin kL = 0$

$\therefore KL = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$

$\therefore KL = n\pi$ --- (*) $\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\because U = \frac{w}{K} \Rightarrow K = \frac{w}{U} = \frac{2\pi f_n}{U}$ --- (**)

من المعادلتين (*) و (**)

$\therefore \frac{2\pi f_n}{U} L = n\pi \qquad$ كتبت f_n لأن f يعتمد على n

$$\boxed{f_n = \frac{nU}{2L}} \text{ --- (5)}$$

العلاقة (5) تمثل الترددات الطبيعية المسموحة للوتر لحدوث الموجات الواقفة وهي تعتمد على العدد n