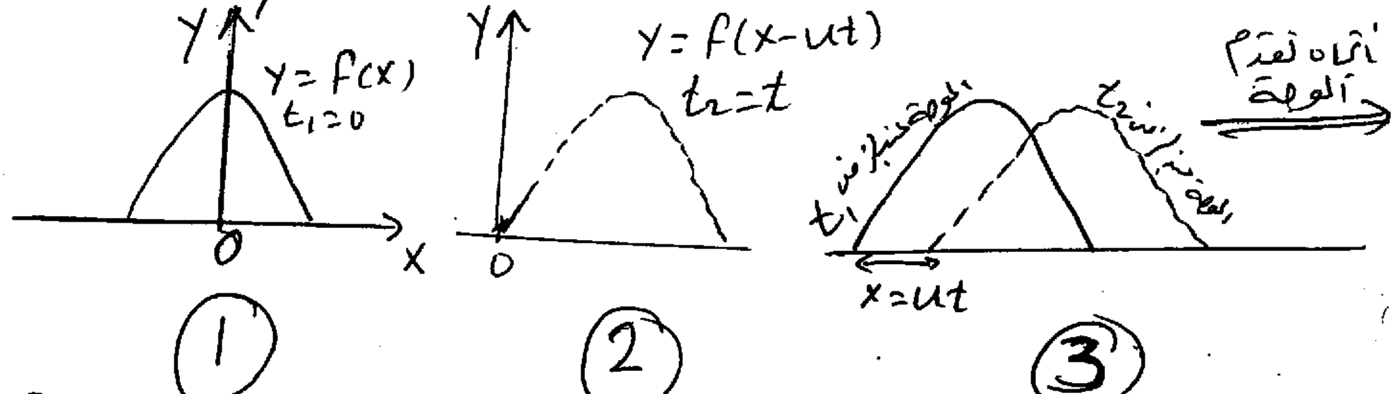
(4)

تساوي $(X=0)$

$$Y=f(x) \qquad t_1=0$$

أن الموجة بعد فترة زمنية t_2 تنتقل مسافة (Ut) حيث أن (U) سرعة الموجة . وأن الازاحة المستعرضة هي

$$Y=f(x+ut) \qquad t_2=t$$



أن المعادلة الأخيرة تصف الموجة المستعرضة ذات الشكل الثابت والتي تتحرك بسرعة منتظمة U في الاتجاه الموجب على امتداد محور X عندما تتحرك الموجة بالاتجاه السالب فأن الازاحة المستعرضة توصف بالمعادلة $Y=f(x\mp Ut)$

$$Y=f(x\mp ut)$$

ان المقدار $(X\mp Ut)$ يمثل مقدار ثابت بحيث أن أي زيادة أو نقصان في الزمن t يقابله نفس الزيادة والنقصان بالازاحة X

وان :

$$X\mp Ut = \text{مقدار ثابت}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\pm U$$

وأن شكل الموجة المنتقلة في السلك (أو الخيط) يمكن أن توصف بشكل موجي جيبي

$$y=A\sin k(x\mp ut)$$

حيث أن A و K ثوابت .

$$K=\frac{2\pi}{\lambda}$$

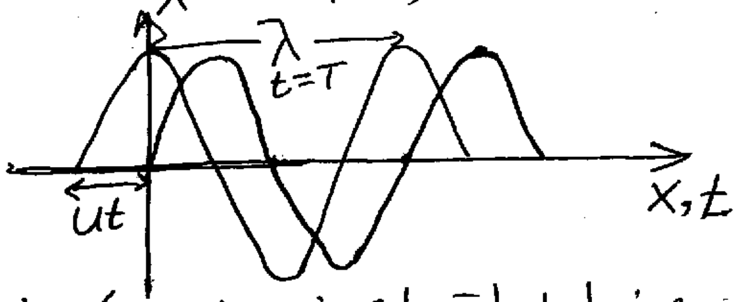
K : دالة الموجة

$$\therefore y=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x\mp Ut)$$

(5)

$\because U = \lambda f \Rightarrow U = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = UT$

$\therefore y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right)$ ---- (*)



من المعادلة الأخيرة (*) يمكن استنتاج بأنه تكون لـ y نفس القيم عند:

① أي لحظة زمنية t وبمختلف المواقع x ، $x+\lambda$ ، $x+2\lambda$ ، ---

② أي زمن t وبمختلف الأزمان t ، $t+T$ ، $t+2T$ ، ---

وذلك لأن أضافة 2π للزاوية بالمعادلة (*) لا يؤثر على قيمة (sin) الزاوية

$\therefore W = 2\pi f = \boxed{\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi U}{\lambda}}$, $f = \frac{U}{\lambda}$

$\therefore \boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda}}$ —— (**)

نعوض المعادلات (**) بالمعادلة (*)

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x \mp \frac{2\pi}{T} t\right)$$

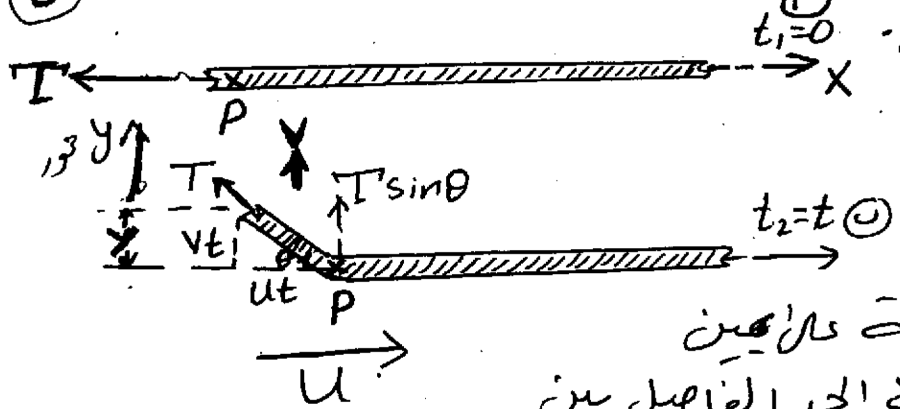
$$y = A \sin(kx \mp Wt)$$

or: $$y = A \sin(Wt \mp kx)$$

سرعة الموجة المستعرضة في وتر مشدود :

نفرض لدينا سلك مرن لانهائي الطول مشدود أفقياً وعلى امتداد محور x . ولنفرض أن السلك في وضعه الابتدائي (عند الزمن $t_1 = 0$) كان ساكناً ، مقدار الشد في السلك T والكثافة الخطية (كتلة وحدة الطول) M (كما في الشكل P) .

عند التأثير على السلك بحركة اهتزازية من مصدر ما في الطرف الأيسر فأن نبضات مستعرضة متتالية تمرر على طول السلك بسرعة ثابتة U .



لنفرض بعد زمن $t_2 = t$
أعطيت النهاية اليسرى
للسلك سرعة V الى
الأعلى (كما مبين بالشكل
ب) ، بينما النقاط الواقعة على يمين
نقطة P مستقرة وان الحد الفاصل بين
النقاط المتحركة والساكنة يتحرك الى اليمين بسرعة انتشار U
ولغرض الاشتقاق الصحيح يجب أخذ النقاط التالية بالاعتبار :

1) تكون الازاحة المستعرضة y صغيرة جداً بالمقارنة مع طول الموجة اي ان . $\left[\frac{dy}{dx} << 1\right]$.

2) حركة اي جزء من السلك تكون باتجاه محور y (اي بمستوى الورقة).

3) قوة الشد T تبقى ثابتة حتى بعد مرور الموجة في اي جزء من السلك لان الازاحة المستعرضة y صغيرة جداً.

4) وزن السلك مهمل.

لغرض إيجاد معادلة الحركة نأخذ عنصر صغير من السلك (كما مبين في الشكل ب) حيث أن جميع النقاط الواقعة على يسار نقطة P تتحرك الى الأعلى بسرعة V بينما النقاط الواقعة الى اليمين تكون مستقرة. أن الحد الفاصل بين النقاط المتحركة والنقاط الساكنة (نقطة P) يتحرك الى اليمين بسرعة انتشار U . عند الزمن t تكون النهاية اليسرى للسلك قد ارتفعت مسافة (Vt) بينما تكون نقطة P قد تحركت مسافة Ut .

لايجاد سرعة انتقال (انتشار) الموجة U :

الدفع (impulse) = التغير بالزخم (Variation in momentum)

القوة العرضية × الزمن = الكتلة × السرعة العرضية

القوة العرضية $= T\sin\theta$

$$\sin\theta = \tan\theta = \theta = \frac{Vt}{Ut} = \frac{V}{U}$$ ((لان θ صغيرة جداً))

وان كتلة الجزء المتحرك = الكتلة لوحدة الطول (μ) × الطول (Ut)

(7)

$$\text{Transverse impulse} = (T\sin\theta)\cdot t = T\frac{v}{u}t$$

$$\text{Transverse momentum} \overset{\text{الزخم}}{=} mv = (\mu\cdot ut)v = \mu u v t$$

$$\therefore\; T\frac{\cancel{v}}{u}\cdot\cancel{t} = \mu u \cancel{v}\cancel{t}$$

$$u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \text{———} ***$$

سرعة الموجة المستعرضة = $\sqrt{\dfrac{\text{قوة الشد}}{\text{الكتلة لوحدة الطول}}}$

المعادلة الأخيرة (***) هي معادلة سرعة الموجة المستعرضة في وتر مشدود .

العلاقة بين سرعة اهتزاز جسيمات السلك وسرعة الموجة

لنفرض أن معادلة الموجة المستعرضة المنتقلة في سلك بالاتجاه الموجب توصف بالمعادلة :

$$y = A\sin(wt - kx) \text{ --- } (1)$$

لإيجاد السرعة الآنية (v) لاهتزاز أي جسيم في أية نقطة على السلك ، نشتق المعادلة أعلاه نسبة للزمن .

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = Aw\cos(wt - kx) \text{ --- } (2)$$

حيث أن :

v : سرعة اهتزاز أي جسيم في أية نقطة على السلك

u : سرعة انتقال (انتشار) الموجة .

من المعادلة (1)

$$\sin(wt - kx) = \frac{y}{A} \text{ --- } (3)$$

من المعادلة (2)

$$\cos(wt - kx) = \frac{v}{Aw} \text{ --- } (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) نحصل على :

$$\sin^2(wt - kx) + \cos^2(wt - kx) = \frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2w^2} = 1$$

$$w^2y^2 + v^2 = A^2w^2$$

$$V^2 = W^2(A^2 - Y^2) = W^2A^2\left(1 - \frac{Y^2}{A^2}\right)$$

$$\therefore \quad V = \pm WA\sqrt{1 - \frac{Y^2}{A^2}} \quad ---(5)$$

من معادلة (5)

(1) عند موضع التوازن حيث $(Y=0)$ تكون السرعة أقصى ما يمكن وتساوي $V = \pm WA$ [الإشارة الموجبة تدل على أن الحركة نحو الأعلى أما الإشارة السالبة فانها تدل بأن حركة الجسم نحو الأسفل]

(2) عندما تكون الإزاحة عند أقصى قيمة لها $(Y=A)$ فان سرعة الجسم تساوي صفر $V=0$.

نستخدم المعادلة

$$\therefore \quad U = \lambda f \quad ---(6)$$

$$\therefore \quad U = \lambda \frac{W}{2\pi} = \frac{W}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{W}{K}$$

$$U = \frac{W}{K} \quad ---(7)$$

من المعادلتين و (7)

$$\boxed{U = \frac{W}{K} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \quad ---(8)$$

طاقة الموجة المستعرضة :

ذكرنا سابقاً أن الموجة هي وسيلة لنقل الطاقة أي أن الموجة أثناء تقدمها تحمل معها طاقة ، والأمثلة على ذلك كثيرة . ولغرض إيجاد الطاقة التي تنقلها الموجة المستعرضة نفرض لدينا سلك مشدود على طول محور X ولنفرض أن عنصر صغير ab وطوله dx في حالة التوازن (في حالة عدم مرور موجة) ، وكما مبين بالشكل (P)