Chapter-5- الفصل الخامس

الاهتزاز القسري (الاجباري)

Forced Oscillations

① الذبذبات القسرية (الاضطرارية) :

عند ازاحة جسم عن موضع توازنه وتركه حراً فانه سوف يهتز بتردد حر وبسبب قوة الاحتكاك (او لزوجة الوسط) الموجودة دائماً فان سعة الاهتزاز تتضاءل بالتدريج حتى يتوقف الجسم عن الحركة ولاجل جعل الجسم مستمراً بالاهتزاز يجب ان يزود بالطاقة من قبل قوة خارجية دورية اي ان هذه القوة الخارجية تجبر (او تضطر) الجسم على الاستمرار بالحركة وبذلك يقال عن الجسم بانه في حالة اهتزاز قسري ، ومن الامثلة على ذلك الارجوحة المهتزة التي تتوقف عن الاهتزاز عند تركها بسبب الاحتكاك ولكنها اذا دفعت في فترات زمنية مناسبة فانها تستمر في الاهتزاز بسعة كبيرة نتيجة للتعويض المستمر للطاقة المفقودة . مثال آخر اهتزاز الجسر تحت تأثير المشي النظامي لطابور عسكري . وكذلك اهتزاز الالات الموسيقية بانواعها .

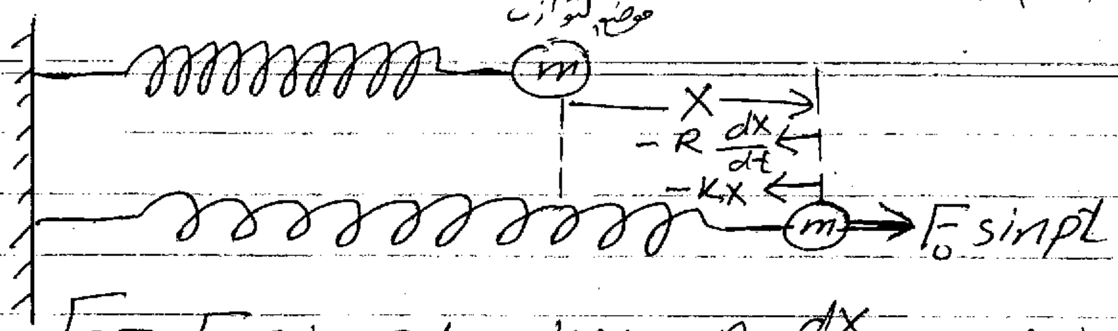
ان تردد الحركة الناتجة يكون مساوي لتردد القوة الخارجية التي تعمل على ادامة الحركة ولا يساوي التردد الطبيعي المضمحل او غير المضمحل .

② معادلة الذبذبات القسرية :

لنفرض ان المهتز مؤلف من جسم كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته K ، ولنفرض ان الجسم يخضع لقوة خارجية دورية مقدارها ($F = F_0 \sin pt$) حيث F_0 = القيمة القصوى للقوة الخارجية ، p = التردد الزاوي للقوة الخارجية (وهو مستقل عن التردد الزاوي غير المضمحل ω_0 وكذلك عن التردد الزاوي المضمحل ω) . ان هذه القوة تعمل بصورة دورية ومباشرة على تغذية الجسم المهتز بطاقة تعوض الطاقة التي يخسرها الجسم عن طريق المقاومة الاحتكاكية (كما مر ذلك في الحركة التوافقية المضمحلة) .

(2)

أي أن الجسم المهتز يتأثر بثلاث قوى مختلفة وهي :



$$F = F_0 \sin pt - kx - R\frac{dx}{dt} \quad \text{---} (*)$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة على الجسم المهتز فإن المعادلة تكون كما يلي: $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ (**)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \sin pt - kx - R\frac{dx}{dt}$$

let: $f_0 = \frac{F_0}{m}$; $2r = \frac{R}{m}$; $w_0^2 = \frac{K}{m}$ } — (1)

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = f_0 \sin pt \quad \text{---} (2)$$

معادلة (2) هي معادلة الذبذبات القسرية.

(3) حلول معادلة الذبذبات القسرية:

(P) الحل الخاص: special solution:

أن القوة الخارجية المسلطة على الجسم المهتز لها تردد زاوي p وأنها تجبر الجسم على الاهتزاز بنفس ترددها، لذلك فإن حل المعادلة القسرية يجب أن يتضمن دالة تتغير توافقياً مع الزمن بتردد زاوي p ، أي يساوي:

$$x = C\sin pt + B\cos pt \quad \text{---} (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = pC\cos pt - pB\sin pt \quad \text{---} (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2C\sin pt - p^2B\cos pt \quad \text{---} (5)$$

نعوض المعادلات (3) و (4) و (5) بالمعادلة (2)

$$-p^2C\sin pt - p^2B\cos pt + 2rpC\cos pt - 2rpB\sin pt$$
$$+ w_0^2C\sin pt + w_0^2B\cos pt = f_0\sin pt$$

$$(-p^2C - 2rpB + w_0^2C)\sin pt + (-p^2B + 2rpC + w_0^2B)\cos pt = f_0 \sin pt$$

عندما يكون الحل المفروض صحيح فان الطرف الأيمن يجب أن يساوي الطرف الأيسر عند أية لحظة زمنية وأن معامل $\sin pt$ يجب أن يكون متساويا في الطرفين وكذلك معامل $\cos pt$ ، أي أن:

$$-p^2C - 2rpB + w_0^2C = f_0 \qquad \text{معاملات } \sin pt$$

$$-p^2B + 2rpC + w_0^2B = 0 \qquad \text{معاملات } \cos pt$$

من حل المعادلتين الأخيرتين يمكن الحصول على قيم C و B

$$C = \frac{(w_0^2 - p^2) f_0}{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \quad \text{---} (6)$$

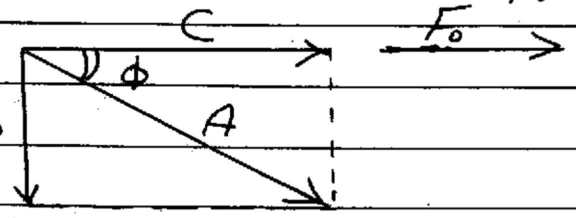
$$B = -\frac{2rpf_0}{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \quad \text{---} (7)$$

بمقارنة المعادلة (3) (معادلة الإزاحة) مع المعادلة $F = F_0 \sin pt$ (معادلة القوة الخارجية الدورية) باستخدام الطريقة الاتجاهية وكما يلي:

$$X = C \sin pt + B \cos pt \quad \text{---} (3)$$

$$F = F_0 \sin pt + 0 \cos pt$$

من المقارنة الاتجاهية بين المعادلتين أعلاه نجد أن مركبة الإزاحة C بنفس الطور مع مركبة القوة F_0 (لأن كلاهما موجب ومضروب في $\sin pt$) . أما مركبة الإزاحة B فانها خارج الطور الأول (طور C و F_0) بزاوية 90° (لكونها مضروبة في $\cos pt$) وأنها متخلفة عن طور F_0 بزاوية 90° (وهذا واضح بالمعادلة 7 لأن اشارة B سالبة)



الشكل يبين زاوية الطور بين متجه القوة الخارجية الدورية F ومتجه الإزاحة X

من الشكل المجاور يمكن إيجاد محصلة السعة A وزاوية الطور ϕ

$$A = \sqrt{C^2 + B^2} \quad \text{---} (8)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{B}{C} \quad \text{---} (9)$$

كما يمكن كتابة الحل [المعادلة ③] بالشكل الآتي :

$$X = A\sin(pt + \phi) \quad \text{---} \quad (10)$$

نعوض بقيم C و B من المعادلتين ⑥ و ⑦ بالمعادلات ⑧ و ⑨ و ⑩ فنحصل على

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \quad \text{---} \quad (11)$$

واجب

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2rP}{(p^2 - w_0^2)}\right] \quad \text{---} \quad (12)$$

واجب

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}\sin(pt + \phi) \quad \text{---} \quad (13)$$

المعادلة ⑬ تمثل الحل الخاص للمعادلة ② (ولا تمثل الحل العام) لأنها لا تحتوي على ثوابت اختيارية تحددها الشروط الابتدائية أو يحددها التردد الطبيعي للجسم المهتز، بل يمثل استجابة الجسم للاهتزاز القسري بتردد زاوي يساوي تردد القوة الخارجية p .

ب) الحلول المكملة (الحلول العابرة) : Complementary Solutions

هناك حلول تسمى رياضياً بالحلول العابرة أو المكملة ، وهي عندما يكون الطرف الأيمن للمعادلة ② مساوياً للصفر (أي أن القوة الخارجية الدورية تساوي صفر) وبذلك فإن الحركة تكون تحت تأثير المقاومة الاحتكاكية فقط! أي أنها تكون حركة توافقية مخمدة ، وقد سبق وأن نوقشت بالتفصيل الحالات الأربعة للحركة التوافقية المخمدة (بالفصل الرابع) والتي تعتمد على قيمة r نسبة إلى w_0 .

وقد لوحظ في جميع هذه الحلول أن قيمة الإزاحة X تقترب من الصفر بمرور الزمن t ، لذلك توصف هذه الحلول فيزياوياً بأنها حلول عابرة أو مؤقتة لأنها تستمر لفترة قصيرة فقط.

ج) الحلول العامة General Solutions

أن الحل العام للمعادلة ② يساوي مجموع الحلين الخاص والمكمل ، وبذلك يكون هناك أربعة حلول عامة وهي كما يلي :

⑤

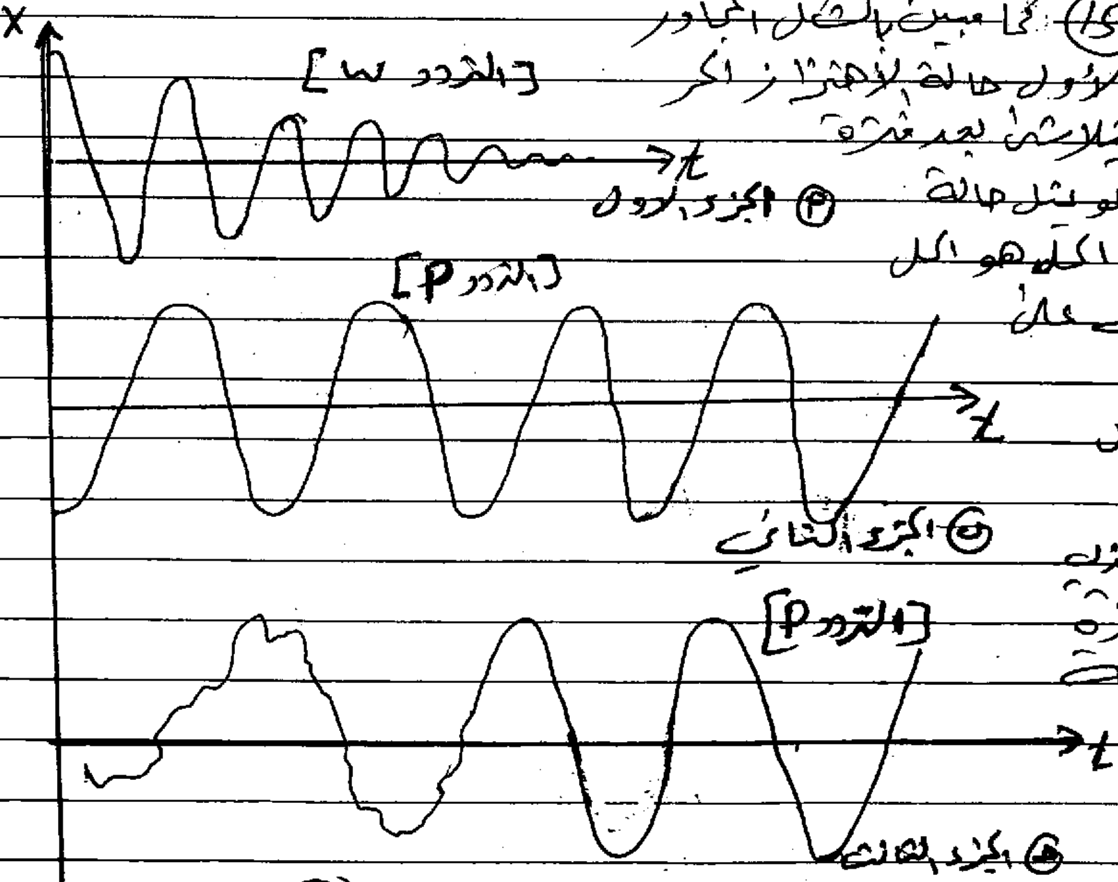
$$① \quad X = A\sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \quad \text{---} (14)$$
$$[r = 0]$$

$$② \quad X = A e^{-rt} \sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \quad \text{---} (15)$$
$$[\omega_0 > r]$$

$$③ \quad X = e^{-rt}(C + Et) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \quad \text{---} (16)$$
$$[\omega_0 = r]$$

$$④ \quad X = e^{-rt}\left(D_1 e^{\sqrt{r^2 - \omega_0^2}\, t} + D_2 e^{-\sqrt{r^2 - \omega_0^2}\, t}\right) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \quad \text{---} (17)$$
$$[\omega_0 < r]$$

(يهمل)
أن الحل الأول [معادله (14)] حيث $r = 0$ يُترك لأنه يمثل حالة انعدام الإضمحلال
ويلاحظ أن كل حل يحتوي على حدين الأول يمثل الحل المكمل والثاني يمثل الحل الخاص
أن الحل الممثل بالمعادلة (15) يمثل الحد الأول منه (الحل المكمل) وهو يمثل حالة
الإهتزاز الحر المضمحل والذي يتلاشى بعد فترة قصيرة ولذلك فهو يمثل حالة
عابرة (أن هذا الحل هو الحل الوحيد الذي يحتوي على الإهتزاز المضمحل) ويمكن
تمثيل المعادله (15) كما مبين بالشكل المجاور



حيث يمثل الحد الأول حالة الإهتزاز الحر
المضمحل والذي يتلاشى بعد فترة
قصيرة ولذلك فهو يمثل حالة
عابرة (أن هذا الحل هو الحل
الوحيد الذي يحتوي على
الإهتزاز المضمحل)
وهو ممثل بالجزء الأول
من الشكل.
أما الحد الثاني الذي
يمثل الحالة المستقرة
وهو ذو سعة ثابتة
ولا تتغير مع
الزمن لأن القوة
الخارجية مستمرة
في تأثيرها. وهذا مبين
بالجزء الثاني من الشكل.

الشكل يوضح رسم المعادله (15)

اما الجزء الثالث من الشكل فانه يمثل المعادله (15) اي يمثل حاصل جمع الحلين