س 2) حل معادلة الهتز التوافقي المضمحل $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$
تحت الشروط $x = 5$ ، $\frac{dx}{dt} = -3$ في اللحظة الزمنية $t = 0$. ثم أعطي تفسيرًا فيزيائيًا للنتائج التي تحصل عليها.

الحل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0 \quad \text{--- (1)} \quad \text{معطاة}$$

المعادلة العامة للهتز التوافقي المضمحل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0 \quad \text{--- (2)}$$

بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$
$$w_0 = \sqrt{5} \Rightarrow w_0^2 = 5$$
$$\therefore w_0^2 > r^2$$

∴ الحركة هي حركة توافقية حرة مضمحلة (ناقصة الإضمحلال)
لذلك فإن حل المعادلة (1) يكون كما يلي:

$$x = e^{-rt}(C\sin wt + B\cos wt) \quad \text{--- (3)}$$

$$w = \sqrt{w_0^2 - r^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

$$x = e^{-rt}(C\sin 2t + B\cos 2t) \quad \text{--- (4)}$$

لإيجاد قيم الثوابت B و C نطبق الشرط الابتدائية للحركة في المعادلة (4):

① $x = 5$ at $t = 0$

$$5 = e^0(C\sin 0 + B\cos 0) = 1(0 + B)$$

$$\boxed{B = 5}$$

② $\frac{dx}{dt} = -3$ at $t = 0$

نشتق المعادلة (4) كما يلي:

(3)

$$\frac{dx}{dt} = \bar{e}^{rt}(2C\cos 2t - 2B\sin 2t) - r\bar{e}^{rt}(C\sin 2t + B\cos 2t)$$

نعوض بالشروط الابتدائية

$$-3 = \bar{e}^{0}(2C - 0) - 1X1(0 + B)$$

$$-3 = 2C - B$$

$$C = \frac{-3+B}{2} = \frac{-3+5}{2} \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

نعوض قيم الثوابت r و B و C بالمعادلة (4) فتصبح

$$X = \bar{e}^{t}(\sin 2t + 5\cos 2t) \quad ---(5)$$

المعادلة (5) تمثل الحل للمعادلة (1)

ويمكن كتابة الحل بشكل آخر:

$$\therefore X = \bar{e}^{rt}(C\sin wt + B\cos wt) = A\,\bar{e}^{rt}\sin(wt+\delta)$$

حيث أن

$$A = \sqrt{C^2+B^2} = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26} = 5.1$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{C}{B} = \tan^{-1}\frac{1}{5} = 11.31$$

$$\therefore X = 5.1\,\bar{e}^{t}\sin(2t + 11.31) \quad ---(6)$$

كذلك المعادلة (6) تمثل الحل العام للمعادلة (1)

س3) إذا كانت قوة الاحتكاك التي تقاوم حركة الجهاز المؤلف من جسيم ونابض هي $7.5\dot{X}$ نيوتن. حيث أن X هي الإزاحة الزمنية للجهاز
أ) برهن أن حركة هذا الجهاز هي حركة اهتزازية مضمحلة
ب) جد الزمن الدوري للاهتزاز المضمحل
جـ) التسارع اللوغارتمي (δ) معامل التوهين (β) زمن الاسترخاء
علماً أن كتلة الجهاز هي 24 kgm وأن ثابت النابض 40 N/m

الحل:

$$F_R = RV = 7.5\dot{X} \Rightarrow R = 7.5 \text{ kg/sec.}\quad V = \dot{X}$$
$$m = 24 \text{ kg} \qquad k = 40 \text{ N/m}$$

(أ) $$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{24}} = 1.291$$
$$r = \frac{R}{2m} = \frac{7.5}{2\times 24} = 0.156$$

بما أن $(w > r)$ فإن حركة الجهاز هي حركة اهتزازية مضمحلة (وأن المعادلة التفاضلية التي تصف هذه الحركة هي):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - kx$$
$$24\frac{d^2x}{dt^2} = -7.5\frac{dx}{dt} - 40x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 0.31\frac{dx}{dt} + 1.67x = 0$$

(ب) $$w^2 = w_0^2 - r^2 = \frac{5}{3} - (0.156)^2 = 1.647$$
$$w = 1.28 \text{ Hz}$$
$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{1.28} = 5 \text{ sec}$$

(جـ) $$Q = \frac{wm}{R} = \frac{1.28\times 24}{7.5} = 4.096$$

$$D = rT = 0.156\times 5 = 0.780$$

أو يمكن إيجادها بأكثر من طريقة $\Rightarrow$
$$Q = \frac{2\pi m}{RT} = \frac{T}{rT} = \frac{w_d m}{R} = \frac{w_d}{2r}$$

(د) $$t = \frac{1}{r} = \frac{1}{0.156} = 6.41 \text{ sec.}$$

(5)

س/ أذا كانت قوة اللزوجة التي يبديها المائع لحركة المهتز في السؤال السابق $20\dot{X}$ نيوتن ، فما هي طبيعة حركة الناتجة أذا أزيح الجسم من وضع توازنه وترك .

الحل :

$$F_R = 20\dot{X}$$

$$R = 20$$

$$r = \frac{R}{2m} = \frac{20}{2 \times 24} = \frac{5}{12} = 0.417$$

$$\therefore \omega_0 > r$$

∴ الحركة هي حركة أهتزازية ناقصة الأضمحلال (الأهتزاز مضمحل) .

(5) جسم كتلته 30 kgm علق بطرف نابض حلزوني فأدى الى استطالته بمقدار 0.5 m . اذا سحب هذا الجسم نحو الاسفل بازاحة 0.75m عن موضع التوازن ثم ترك حرّ :

(P) جد موضع الجسم في أي لحظة زمنية أذا كانت القوة المقاومة حركة الهتز والناتجة من اللزوجة وتساوي (10V) نيوتن . حيث أن V هي السرعة الانية للجسم

(ت) وضح طبيعة الحركة الناتجة (هل هي اهتزازية غير مضمحلة أم مضمحلة أو حرجة أو زائدة الاضمحلال ؟)

الحل :

$m = 30\ kgm \quad X = 0.5m \quad A = 0.75\ m \quad F_R = 10V = RV$

$\therefore R = 10\ kg/sec$

(P) $X = ?$ (ت) طبيعة الحركة

نكتب أولاً المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة

$$(P)\quad \frac{d^2X}{dt^2} + 2r\frac{dX}{dt} + w_0^2 X = 0$$

$$F = KX \Rightarrow K = \frac{F}{X} = \frac{mg}{X} = \frac{30 \times 9.8}{0.5} \Rightarrow \boxed{K = 588\ \frac{N}{m}}$$

$$w_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{588}{30} \Longrightarrow \boxed{w_0^2 = 19.6\ H_3^2}$$

$$r = \frac{R}{2m} = \frac{10}{2 \times 30} = 0.167\ sec^{-1} \qquad \boxed{r^2 = 0.028}\ sec^{-2}$$

$\therefore w_0^2 > r^2$

$\therefore$ الحركة هي حركة توافقية حرة مضمحلة (ناقصة الاضمحلال)

لذلك فأن حل هذه المعادلة يكون :

$$X = e^{-rt}[C\sin wt + B\cos wt] = Ae^{rt}\sin(wt + \delta)$$

$$w = \sqrt{w_0^2 - r^2} = \sqrt{19.6 - 0.028} = \sqrt{19.572} = 4.42$$

$$\therefore X = 0.75\, e^{-0.167t} \sin(4.42t + \delta)$$

(ت) الحركة هي توافقية حرة ناقصة الاضمحلال لان $w_0^2 > r^2$