③ الحالة الثالثة: حالة الحركة الحرجة: ($r^2=w_0^2$)

عندما ($r^2=w_0^2$) تسمى هذه الحالة بـ (الحالة الحرجة) لكونها تمثل الحد الفاصل بين الحركة الاهتزازية (عندما $r<w_0$ وهي الحالة الثانية) والحركة غير الاهتزازية (عندما $r>w_0$ وهي الحالة الرابعة). نعوض بالمعادلة ④ عن $r=w_0$ نحصل على:

$$X = D_1 e^{-rt} + D_2 e^{-rt} = (D_1+D_2)e^{-rt}$$

$$X = D e^{-rt} \quad --- ⑨ \qquad D=D_1+D_2$$

* أن معادلة ⑨ تمثل الحل لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة (معادلة ②) وهذا الحل غير صحيح لأن معادلة ② هي من الدرجة الثانية وبذلك فإن الحل الصحيح لها يجب أن يعطي حلين أو ثابتين، لذلك يجب أن نبحث عن الحل بطريقة أخرى غير الطريقة المتبع لاستنتاج معادلة ⑨ للحصول على الحل المناسب: لذلك لنفرض أن معامل الاضمحلال $r$ يزداد تدريجياً حتى يقترب من $w_0$ وأن $\sqrt{r^2-w_0^2}$ يقترب من الصفر، ولنفرض أن ($\sqrt{r^2-w_0^2}=i\,dw_0$) وأن $dw_0$ يقترب من الصفر.

$$\sqrt{r^2-w_0^2} \to 0 \quad ; \quad \sqrt{r^2-w_0^2}=i\,dw_0 \qquad dw_0 \to 0$$

أي أن $dw_0 t$ صغير جداً عند أي زمن

نعوض بالمعادلة ④ التي تمثل الحل العام

$$X = D_1 e^{(-r+i\,dw_0)t} + D_2 e^{(-r-i\,dw_0)t}$$

$$X = e^{-rt}\left[D_1 e^{+i\,dw_0 t} + D_2 e^{-i\,dw_0 t}\right]$$

وبنفس الطريقة المتبعة للحصول على المعادلة ⑤ (بالحالة الأولى) يمكن أن نحصل على:

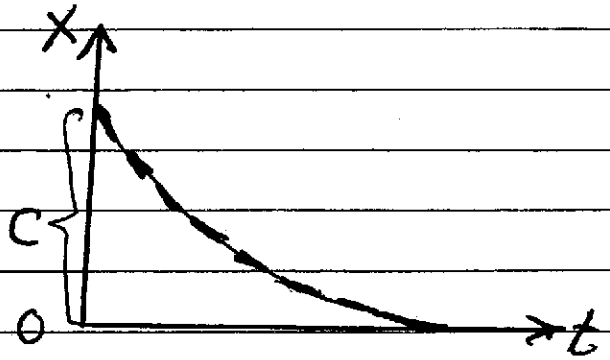
$$X = e^{-rt}(C\cos dw_0 t + B\sin dw_0 t)$$

$$\because dw_0 t \to 0 \Rightarrow \therefore \cos dw_0 t \simeq 1 \; ; \; \sin dw_0 t \simeq dw_0 t$$

$$X = e^{-rt}(C + B\cdot dw_0 t)$$

Suppose: $B d\omega_0 = E$ ثابتة

$\therefore \quad X = e^{-rt}(C+Et)$ --- (10)



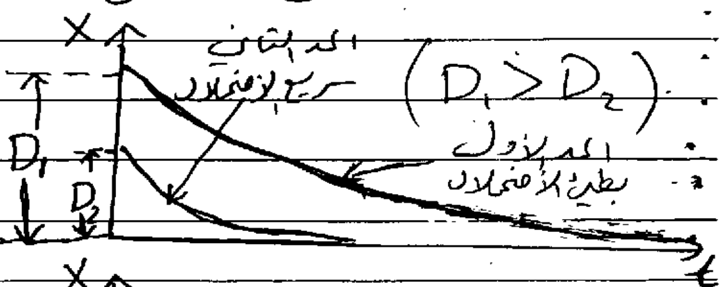

C و E ثوابت يمكن إيجادها من الشروط الابتدائية للحركة.
عندما يزداد r مقتربا من ω فإن الزمن الدوري للاهتزاز المضمحل T يقترب من اللانهاية (من معادلة 8)
يلاحظ من الشكل أن الجسم يعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حراً بعد إزاحته بإزاحة ابتدائية مقدارها C وذلك لأن المقاومة الاحتكاكية (ومعامل الاضمحلال r) كبيرة وتمنع حدوث حركة اهتزازية وإن الجسم يعود إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية بعد تركه حراً دون أن يصاحب ذلك أي سلوك اهتزازي.

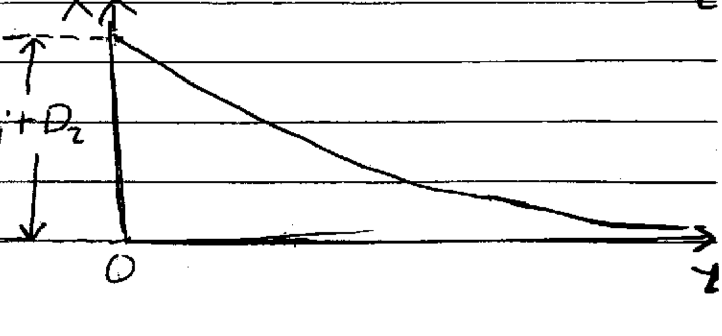
(4) الحالة الرابعة: حالة الحركة الزائدة الاضمحلال ($r^2 > \omega_0^2$)

عندما تكون المقاومة الاحتكاكية (معامل الاضمحلال r) كبيرة مقارنة مع التردد الزاوي $\omega_0$ فإن $\sqrt{r^2-\omega_0^2}$ يكون مقداراً حقيقياً موجباً ويكون الحل العام للمعادلة (4) كما يلي:

$$X = e^{-rt}\left(D_1 e^{\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t} + D_2 e^{-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\,t}\right) \quad \text{--- (11)}$$

إن المعادلة (11) لا تمثل حركة دورية لأنها لا تحتوي على معامل تذبذب يتغير مع الزمن وبذلك فإن الجسم لا يمتلك سلوك اهتزازي. ويلاحظ أن الحل يحتوي على جزئين. الجزء الأول يمثل الجزء البطيء والثاني يمثل الجزء السريع الاضمحلال كما مبين بالشكل الأول. وإن مجموع الجزئين يمثل الحل العام والذي يمثل الحركة الفعلية للمهتز



والمتمثل بالشكل الثاني ، حيث أنه لو أُزيح الجسم إزاحة
ابتدائية مقدارها $(D_1+D_2)$ عند الزمن $t=0$ عن موضع
التوازن وترك حراً فأن الجسم سيعود بصورة بطيئة
جداً الى موضع توازنه بعد زمن طويل جداً ويتوقف
عن الحركة وأن عودة الجسم الى موضع التوازن تكون
بصورة أُسية وبدون تذبذب وذلك لكون المقاومة
كبيرة ولا تسمح بالاهتزاز

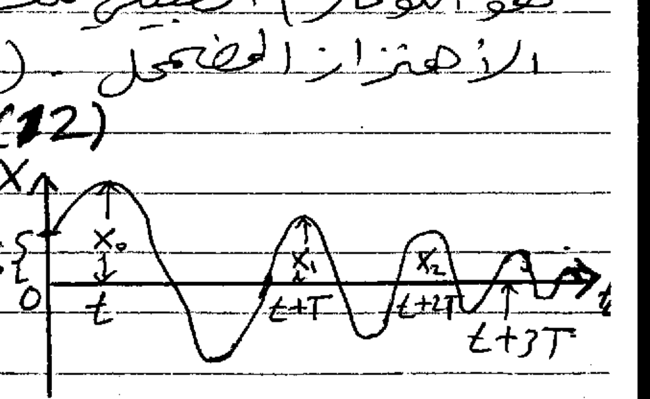
## مقياس الاضمحلال Damping Scale

أي مهتز ميكانيكي طبيعي لابد وأن تضمحل حركته الاهتزازية
وتتناقص سعة حركته تدريجياً الى أن تتوقف حركته نتيجة
لتأثير قوى داخلية وخارجية (قوى احتكاكية وأخرى ناتجة
عن لزوجة المائع).
أن اضمحلال الاهتزاز في المهتزات الطبيعية يكون بدرجات
متفاوتة وأن درجة الاضمحلال هذه يمكن وصفها أو ايجادها
بدلالة أحد الكميات الآتية:
(1) التناقص اللوغارتمي (2) زمن الاسترخاء (3) معامل النوعية

## (1) التناقص اللوغارتمي Logarithmic decrement $(\Delta)$

هو اللوغارتم الطبيعي للنسبة بين أي سعتين متتاليتين من سعات
الاهتزاز المضمحل. (وهو مجرد من الوحدات)

$$\Delta = \ln\left(\frac{X_0}{X_1}\right) \quad (12)$$




حيث $X_0$ سعة الاهتزاز الأول عند الزمن $t$
$X_1$ " " الثانية " $t+T$
$X_2$ " " الثالثة " $t+2T$
$X_3$ " " الرابعة " $t+3T$
$X_n$ " " $(n+1)$ " $t+nT$

ملاحظة: أن سعة الاهتزاز هنا يجب أن تكون على النفس الجانب من موضع التوازن كما مر علينا سابقاً. أن معادلة حركة الاهتزاز الحر المضمحل هي:

$$X = A e^{-rt} \sin(\omega t + \delta) \quad --- (7)$$

$$X_0 = A e^{-rt} \sin(\omega t + \delta) \quad --- (13)$$

$$X_1 = A e^{-r(t+T)} \sin[\omega(t+T) + \delta]$$

but: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore X_1 = A e^{-r(t+T)} \sin[\omega t + \frac{2\pi}{T} \cdot T + \delta]$$

$$\because \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

$$\therefore X_1 = A e^{-r(t+T)} \sin(\omega t + \delta) \quad --- (14)$$

من المعادلات (13) و (14) بالمعادلة (12)

$$\Delta = \ln \frac{\cancel{A} \cancel{e^{-rt}} \cancel{\sin(\omega t + \delta)}}{\cancel{A} e^{-r(\cancel{t}+T)} \cancel{\sin(\omega t + \delta)}} = \ln \frac{1}{e^{-rT}} = \ln e^{+rT}$$

$$\boxed{\Delta = rT} \quad -- (15)$$

من المعادلة (15) نستنتج بأن التناقص اللوغارتمي $\Delta$ يعتمد على الزمن الدوري للاهتزاز المضمحل $T$ وعلى معامل الاضمحلال $r$.

$$\text{but} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \quad --- (8)$$

من المعادلتين (8) و (15)

$$\Delta = \frac{2\pi r}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \quad --- (16)$$

إن المعادلة (16) تعطي قيمة التناقص اللوغارتمي لجميع قيم ($\omega_0^2 > r^2$)

ولكن عندما يكون $\omega_0^2 >> r^2$ يمكن أن نكتب المعادلة

$$\Delta = \frac{2\pi r}{\omega_0} \quad --- (17)$$

(لأن يساوي $\omega_0^2 - r^2$)

عندما يكون معامل الاضمحلال $r$ صغيراً جداً فإن الفرق بين سعتين متتالية يكون صغيراً جداً بحيث لا يمكن قياسه ولذلك يفضل أن تقاس السعة التالية للدورة $n$ (أي ليس لسعتين متتاليتين) ويحسب التناقص اللوغارتمي حسب العلاقة:

من تعريف التناقص اللوغارتمي (وحسب معادلة 12)

$$\therefore \Delta = \ln \frac{X_0}{X_1} = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln \frac{X_2}{X_3} = \cdots = \ln \frac{X_{n-1}}{X_n}$$

$$\therefore \frac{X_0}{X_1} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \cdots \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{\Delta}$$

وبضرب هذه النسب المتساوية مع بعضها نحصل على

$$\frac{X_0}{X_1} \cdot \frac{X_1}{X_2} \cdot \frac{X_2}{X_3} \cdot \frac{X_3}{X_4} \cdots \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{n\Delta}$$

$$\frac{X_0}{X_n} = e^{n\Delta}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_0}{X_n} \quad --- (18)$$

حيث أن $X_n$ : هي سعة الاهتزاز للدورة $n$ بعد زمن $t+nT$

$n$ : عدد الدورات أو الهزات من السعة $X_0$ الى السعة $X_n$

## (2) زمن الاسترخاء $(t)$ : Relaxation time:

هو الزمن اللازم لهبوط السعة الفعالة $(A_t)$ الى $\frac{1}{e}$ من قيمتها القصوى $(A)$.

أن معادلة حركة الاهتزاز الحر المضمحل هي:

$$X = A e^{-rt} \sin(\omega t + \delta) \quad --- (7)$$

$$\text{let } A_t = A e^{-rt}$$ $A_t$: السعة الفعالة للاهتزاز المضمحل

بعد زمن $t = \frac{1}{r}$ نحصل على

$(e = 2.718)$

$$A_t = \frac{1}{e} A = 0.368 A$$

أي أن الزمن $(t = \frac{1}{r})$ هو زمن الاسترخاء لأنه هو الزمن الذي تهبط السعة الفعالة $A_t$ الى $\frac{1}{e}$ من قيمتها القصوى $(A)$

$$\therefore r = \frac{R}{2m}$$

$$\therefore t = \frac{1}{r} = \frac{2m}{R} \quad --- (19)$$

$t$ : زمن الاسترخاء