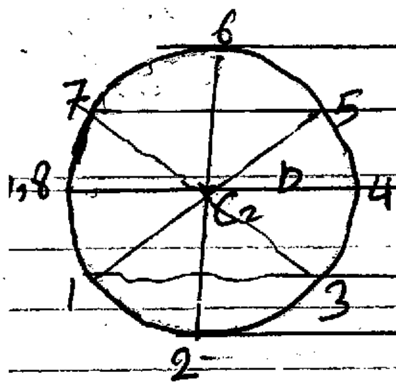
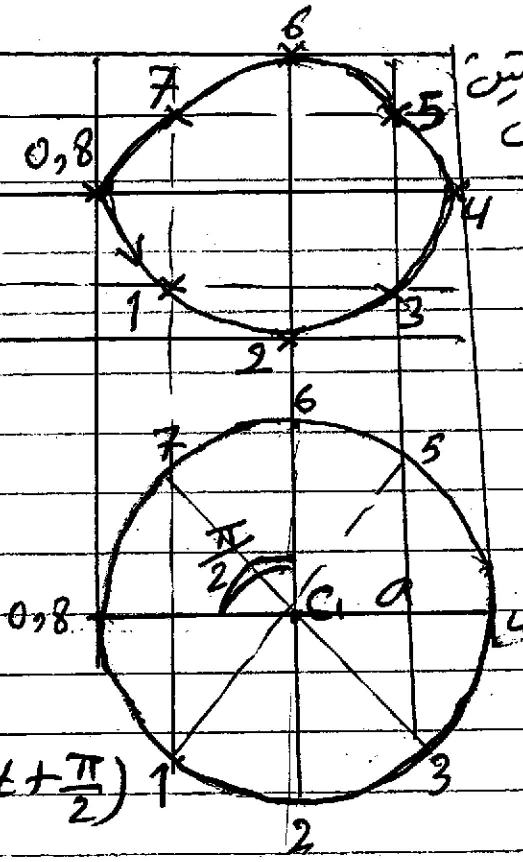
(6)





(ح) لرسم شكل ليساجو للمعادلتين (7) و (8) عندما يكون فرق الطور بينهما $\theta=\frac{\pi}{2}$ بنفس الطريقة ويكون $\theta=\frac{\pi}{2}=90$

$y=b\sin wt$

$a>b$

$\theta=\frac{\pi}{2}$

$w_1=w_2=w$

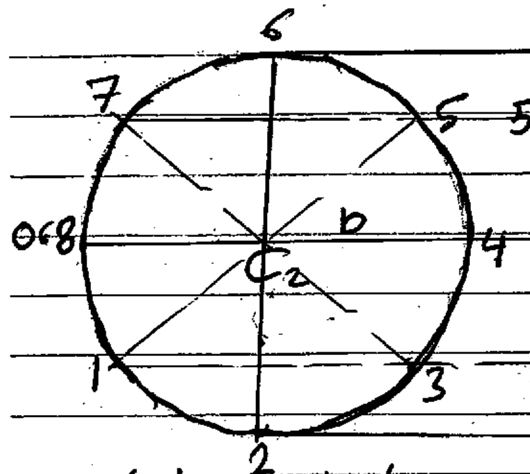
$x=a\sin(wt+\frac{\pi}{2})$

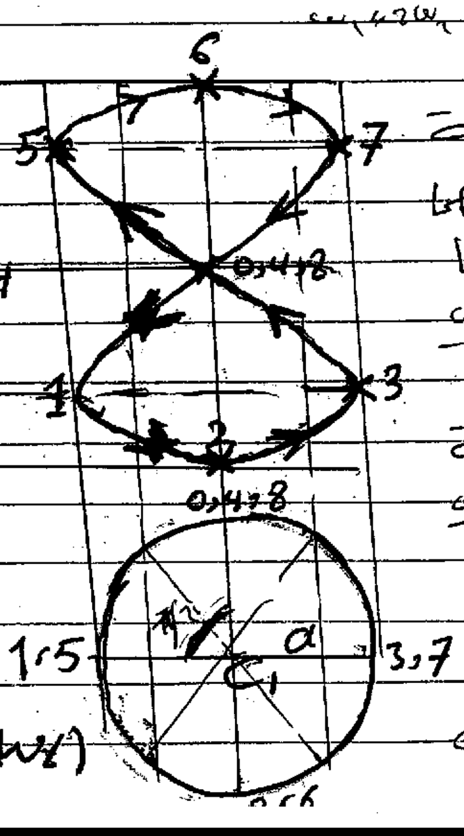
تركيب حركتين توافقيتين متعامدتين نسبة ترددهما 2 : 1 (طريقة بيانية)

نفرض أن جسماً يتأثر بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين إحداهما باتجاه المحور السيني وترددها $2w$ وسعتها a والثانية باتجاه المحور الصادي وترددها w وسعتها b وفرق الطور بينهما θ (أي أن نسبة ترددهما كنسبة 2 : 1). أي أن حركة الجسم تخضع للمعادلتين :

$X=a\sin(2wt+\theta)$ --- (13) و $Y=b\sin wt$ --- (14)

أي أن: $w_1=2w$ و $w_2=w$ $\{ W_1=2W_2$





لتركيب هاتين الحركتين بطريقة بيانية نرسم دائرتين مركزيهما C و C_2 وأنصاف أقطارهما a و b تمثلان المحور السيني والصادي على التوالي. بما أن التردد الزاوي للحركة باتجاه المحور السيني يساوي ضعف التردد باتجاه المحور الصادي ($W_x=2W_y$) فإن الزمن الدوري باتجاه المحور السيني يساوي نصف

$y=b\sin wt$

$\boxed{W_x=2W_y \quad \theta=0 \quad b>a}$

$x=a\sin(2wt)$

الزمن الدوري باتجاه المحور الصادي ($T_x = \frac{1}{2} T_y$). أي أن الحركة باتجاه المحور السيني تكمل دورتين عندما الحركة باتجاه (y) المحور الصادي تكمل دورة واحدة. لذلك نقسم الدائرة الأولى التي مركزها C_1 إلى أربعة أجزاء (أي كل زاوية تساوي $\frac{\pi}{2}$) بينما نقسم الدائرة الثانية التي مركزها C_2 إلى ثمانية أجزاء (أي كل زاوية تساوي $\frac{\pi}{4}$) وذلك لكي نقطع باتجاه المحور السيني زاوية $\frac{\pi}{2}$ في حين نقطع باتجاه المحور الصادي $\frac{\pi}{4}$ في نفس الوقت ($\frac{1}{8}T$) وهكذا نكمل زمن دورة كاملة فيكمل الجسم دورتين باتجاه المحور السيني عند إكماله دورة واحدة باتجاه المحور الصادي. وبذلك نجد مسار الحركة الذي يمثل شكل ليساجو.

هذا ويمكن إيجاد أشكال ليساجو لقيم متعددة لزاوية الطور θ ($\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، ...) بنفس الطريقة أعلاه (واجب)

ظاهرة الضربات : Beats

عندما يتأثر جسم بحركتين توافقيتين بسيطتين بنفس الاتجاه وإذا كان الفرق بين ترددي الحركتين قليل وهذا يحدث تغير تدريجي في فرق الطور بين الحركتين بمرور الزمن ولتصبح الحركتان بنفس الطور في زمن معين ويحدث تداخل بناء وعندها تكون السعة أكبر ما يمكن، وبمرور الزمن يستمر التغير التدريجي بين الحركتين حتى يصبح ($180°$) ويحدث تداخل هدام حيث تكون السعة أقل ما يمكن، وبذلك فإن سعة الحركة الاهتزازية الناتجة تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى بمرور الزمن وتسمى هذه الظاهرة بـ(ظاهرة الضربات) أي أن تناوب حصول سعة الحركة الاهتزازية بين أقصى وأدنى قيمة يتكرر بتردد ثابت يسمى بـ(تردد الضربات) ويساوي الفرق بين ترددي الحركتين التوافقيتين $(\Delta f = f_2 - f_1)$

ليكن لدينا جسم يتذبذب بتأثير حركتين توافقيتين بنفس الاتجاه ومختلفتين قليلاً بالتردد، ولنفرض أن سعة الحركة الأولى A_1 وترددها f_1 وسعة الحركة الثانية A_2 وترددها f_2. وأن إزاحة الجسم الناتجة عن كل حركة هي X_1 و X_2 بحيث أن:

$$X_1 = A_1 \sin \omega_1 t = A_1 \sin 2\pi f_1 t \quad \text{--- (15)}$$

$$X_2 = A_2 \sin \omega_2 t = A_2 \sin 2\pi f_2 t \quad \text{--- (16)}$$

أن محصلة الإزاحة عند الزمن t تنتج من تركيب المعادلتين

$$X = X_1 + X_2 = A_1 \sin w_1 t + A_2 \sin w_2 t$$

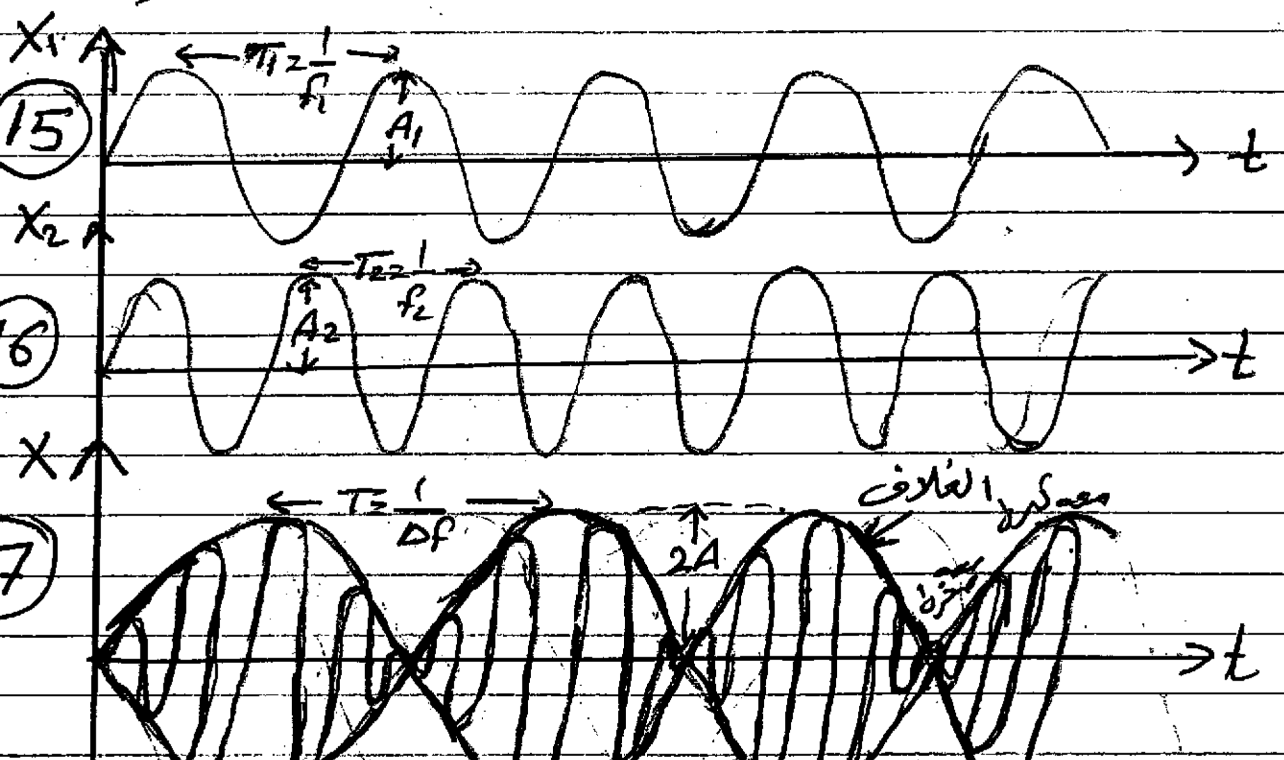
ليكن $A_1 = A_2 = A$

$$X = A(\sin w_1 t + \sin w_2 t)$$

$$X = 2A\cos\left[\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right)t\right]\sin\left[\left(\frac{w_2 + w_1}{2}\right)t\right] \quad --(17)$$

أن المعادلة الأخيرة (17) لا تحقق وصف ظاهرة الضربات إلا إذا كان الفرق بين ترددي الحركتين قليل بحيث أن ($\Delta f = f_2 - f_1$) لا يتجاوز ($10\ Hz$)

يمكن تمثيل المعادلات (15) و (16) و (17) بيانياً وكما في الشكل



يلاحظ من الشكل أعلاه الذي يمثل محصلة تركيب الحركتين أنه يحتوي على ترددين أحدهما تردد عالي يقع داخل الغلاف ويساوي [$\frac{1}{2}(f_1+f_2)$] ~~يقع داخل الغلاف~~ والثاني تردد واطئ ويساوي ($f_2 - f_1$) ويمثله الغلاف نفسه، ويلاحظ أيضاً أن السعة تتغير جيبياً (دورياً) مع الزمن وتعرف هذه الظاهرة ذات الترددين بظاهرة تعديل أو تضمين السعة.

من معادلة (17):

$$X = B\sin\left(\frac{w_2+w_1}{2}\right)t \quad --- (18)$$

حيث أن:

$$B = 2A\cos\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right)t \quad --- (19)$$

المعادلة (18) تمثل حركة دورية سعتها B وذات تردد عالي يساوي: $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ والذي يمثل التردد الفعلي لمحصلة الحركة ويقع ضمن (داخل) الغلاف

المعادلة (19) تعطي سعة الحركة (B) والتي تتغير دوريا مع الزمن وأن الغلاف في الشكل يمثل التغير الدوري بالسعة أن قيم B تتغير بين أكبر قيمة لها ($2A$) وأصغر قيمة (صفر)

* وتحدث أكبر قيمة عندما تصبح قيمة الـ Cos تساوي واحد.

نحصل على أكبر قيمة للسعة B عندما: (من معادلة (19))

$$\cos\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right)t = \pm 1$$

أي أن:

$$\frac{w_2-w_1}{2}\,t = N\pi \qquad N = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$$\frac{2\pi f_2 - 2\pi f_1}{2}\,t = N\pi$$

$$(f_2-f_1)\,t = N$$

$$t = \frac{N}{f_2-f_1}$$

أي أن الزمن t يأخذ القيم التالية:

$$t = \frac{0}{f_2-f_1}, \frac{1}{f_2-f_1}, \frac{2}{f_2-f_1}, \frac{3}{f_2-f_1}, \ldots, \frac{N}{f_2-f_1}$$

وبذلك فإن الفترة الزمنية τ بين أكبر سعتين متتاليتين في الغلاف تساوي

$$\tau = \frac{1}{f_2-f_1} = \frac{1}{\Delta f} \quad --- (20)$$

أي أن عدد السعات الكبرى في الغلاف (التي قيمتها تساوي $2A$) في الثانية الواحدة تساوي Δf أي أنها تتكرر Δf مرة في الثانية الواحدة

* أن أصغر قيمة للسعة B (وتساوي صفر) وتحدث عندما قيمة الـ Cos تساوي صفر (من معادلة (19))

$$\cos\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right)t = 0$$

أي أن :

$$\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right)t=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\left(\frac{2\pi f_2-2\pi f_1}{2}\right)t=\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\therefore (f_2-f_1)t=N+\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{N}{f_2-f_1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(f_2-f_1)}=\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(f_2-f_1)}$$

أي أن t تأخذ القيم

$$t=\frac{1}{2(f_2-f_1)},\ \frac{3}{2(f_2-f_1)},\ \frac{5}{2(f_2-f_1)},\ \dots,\ \frac{(N+\frac{1}{2})}{(f_2-f_1)}$$

$$t=\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1},\ \frac{3}{2}\frac{1}{f_2-f_1},\ \frac{5}{2}\frac{1}{f_2-f_1},\ \dots,\ \left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{f_2-f_1}$$

أن الفترة الزمنية τ بين أصغر سعتين متتاليتين في الغلاف تساوي

$$\therefore \tau=\frac{1}{f_2-f_1}=\frac{1}{\Delta f} \quad ---(21)$$

أي أن عدد السعات الصغرى في الغلاف (التي تساوي صفر) في الثانية الواحدة تساوي Δf وهو يساوي لعدد السعات الكبرى (كما لاحظنا في معادلة (20) و (21)) ، وحيث أن الدورة الكاملة تتكون من سعة كبرى واحدة وسعة صغرى واحدة لذلك فان عدد الدورات الكاملة (بالنسبة للغلاف) في الثانية الواحدة والذي يساوي عدد الضربات في الثانية الواحدة يساوي (Δf)

{عدد الضربات في الثانية الواحدة} = {عدد الدورات الكاملة في الثانية الواحدة (بالنسبة للغلاف)} $=\Delta f=f_2-f_1=\frac{1}{\tau}$

مما تقدم نستنتج أن محصلة تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين بنفس الاتجاه ومختلفتين قليلاً بالتردد يكون حركة توافقية بسيطة أيضاً ترددها يساوي متوسط (معدل) تردد الحركتين الأصلية [$\frac{1}{2}(f_1+f_2)$] وسعتها تتغير دورياً مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وبتردد مقداره الفرق بين الترددين الأصليين

لو كان لدينا شوكتين رنانة مهتزة قريبة من بعضها، الأولى ترددها [270 Hz] والثانية ترددها [275 Hz] فان الأذن تسمع صوت تردد متوسط تردد الشوكتين [$f=\frac{1}{2}(270+275)=272.5$] ترتفع شدته وتنخفض Δf أي خمس مرات بالثانية الواحدة [$\Delta f=f_2-f_1=275-270=5$]

ملاحظة : أن الأذن البشرية لا تستطيع تمييز أكثر من (7) ضربات بالثانية الواحدة .

المادة: الصوت والحركة الموجية ①

المرحلة: الثانية

تمارين الفصل الثالث

س1) اهتزازين على طول نفس الخط يمكن وصفهما بالمعادلتين:

$Y_1 = A\sin 10\pi t$ و $Y_2 = A\sin 12\pi t$

جد الزمن الدوري للضربات وارسم شكلاً تخطيطياً لشكل الاضطراب على طول زمن دورة واحدة للضربات.

الحل: الزمن الدوري للضربات

$$T = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

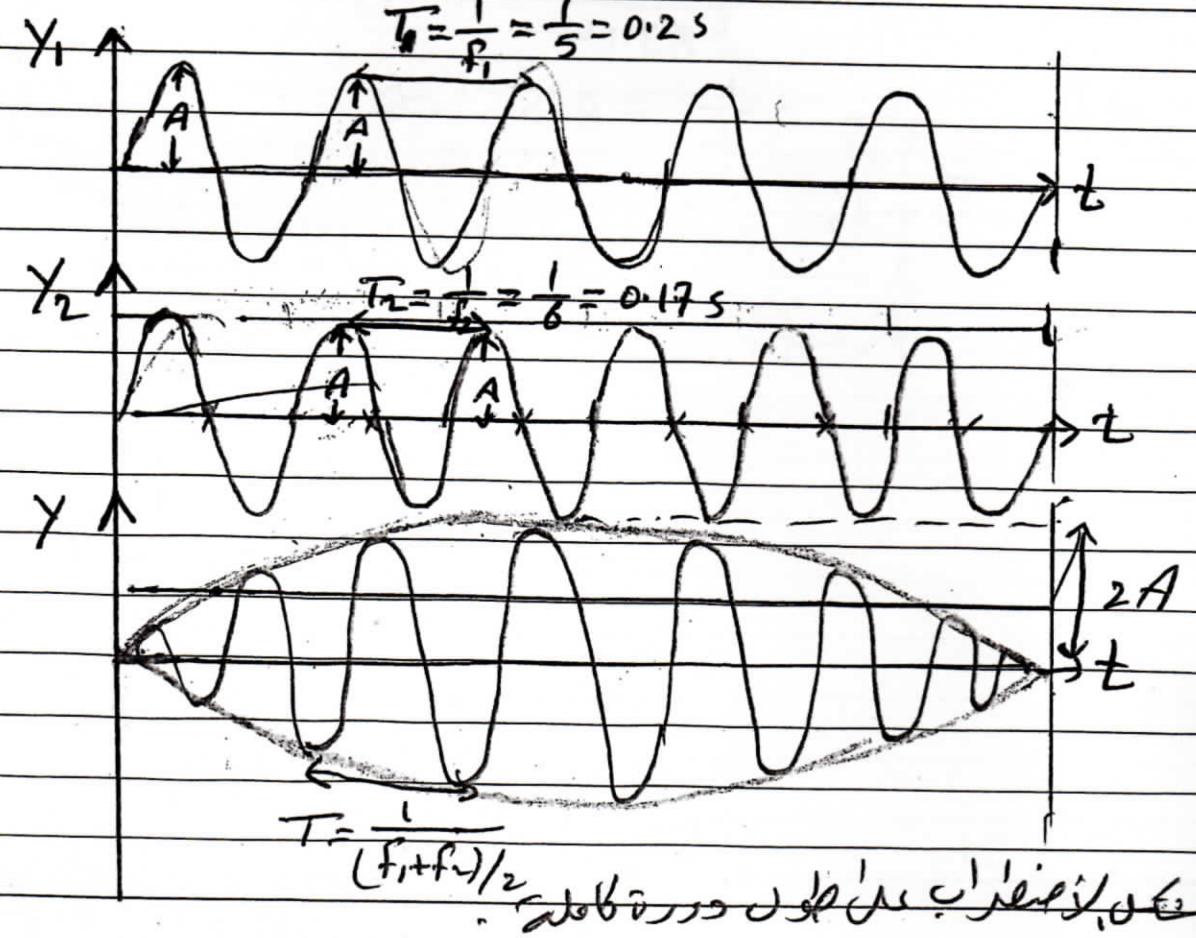
من المعادلتين نستنتج:

$$W_1 = 10\pi \ ; \ f_1 = \frac{W_1}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\ Hz$$

$$W_2 = 12\pi \ ; \ f_2 = \frac{W_2}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = 6\ Hz$$

$$\therefore T = \frac{1}{6-5} = 1\ Sec.$$

$\Delta f = f_2 - f_1 = 6 - 5 = 1\ Hz$ يمثل عدد الضربات في الثانية الواحدة. أي أن هناك دورة واحدة كاملة في الثانية (بالنسبة للعلاقات)



شكل الاضطراب على طول دورة كاملة.

س2) جد تردد الحركة المركبة لكل مما يأتي

(b) $\sin(2\pi t - \sqrt{2}) + \cos 2\pi t$

$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$; $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ Hz$

$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\ Hz$

$\therefore f_1 = \frac{1+1}{2} = 1\ Hz$

$\Delta f = f_2 - f_1 = 1 - 1 = 0$

(c) $\sin 12\pi t + \cos(13\pi t - \pi/4)$

$f_1 = \frac{12\pi}{2\pi} = 6\ Hz$; $f_2 = \frac{13\pi}{2\pi} = 6.5\ Hz$

$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{6 + 6.5}{2} = 6.25\ Hz$

$\Delta f = f_2 - f_1 = 6.5 - 6 = 0.5\ Hz$

(d) $\sin 3t - \cos \pi t$

$f_1 = \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{3 \times 3.14} = 0.48\ Hz$

$f_2 = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0.5\ Hz$

$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{0.48 + 0.5}{2} = 0.49\ Hz$

$\Delta f = f_2 - f_1 = 0.5 - 0.48 = 0.02\ Hz$