(1)

Chapter-3- الفصل الثالث

Composition of Simple Harmonic Motion: تركيب الحركات التوافقية البسيطة:

قاعدة التركيب: Composition base

نفس

يمكن لحركتين اهتزازيتين او موجتين او اكثر ان تحدث عن النقطة دون ان تؤثر احدهما على الاخرى . اي انه يمكن لموجتين او اكثر ان تنتقل في نفس الوقت خلال نقطة معينة في الفضاء دون ان تؤثر احدهما على الاخرى لبعد الافتراق .

ان الموجات المختلفة تكون مستقلة عن بعضها الاخرى حتى عند مرورها في نقطة معينة حيث تكون محصلة الازاحة في تلك النقطة مساوية الى مجموع الازاحات المنفردة الناتجة عن كل موجة على حدة (ان هذه القاعدة تسري فقط على الحركات الموجية والاهتزازية الخطية ، اي على الحالات التي تخضع لقانون هوك ضمن حدود المرونة فقط) . وان ابرز هذه المعادلات هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة

ومن الامثلة عليها ان طبلة الاذن تسمع الصوت الصادر عن مصدر معين على الرغم من وجود عدة موجات صوتية اخرى في الفضاء . وكذلك عند مرور موجتين مختلفتين في بركة ماء فانهما قد تتداخلا مع بعضهما ثم تخرجا من منطقة التداخل وتستمر بالتقدم دون ان تؤثر احداهما على الاخرى .

ان قاعدة التركيب تعتبر وسيلة فعالة لتحليل الحركات الموجية الاهتزازية المعقدة الى مركباتها التوافقية البسيطة ، ولكنها تقتصر فقط على الحركات الصغيرة التي توصف بالمعادلات الخطية ولا تنطبق على الحركات التي توصف بالمعادلات غير الخطية (الحركات العنيفة) ، ان المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة هي معادلة خطية متجانسة وان حل هذه المعادلة يعطي وصفاً كاملاً للحركة

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -W^2X \quad (1)$$

نلاحظ من معادلة (1) ان التناسب طردي (خطي) بين التعجيل $\frac{d^2x}{dt^2}$ والازاحة X حيث كل منها مرفوع للاس واحد . وكذلك نلاحظ ان طرفي المعادلة يحتويان على متغير واحد وهو X لذلك تكون متجانسة .

نفرض ان حلول المعادلة (1) هما

$$X = X_1 = C \sin Wt \quad (2)$$

$$X = X_2 = B \cos Wt \quad (3)$$

من المعادلتين ① و ②

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -w^2 x_1 \quad (4)$$

من المعادلتين ① و ③

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -w^2 x_2 \quad (5)$$

من المعادلتين ④ و ⑤

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) = -w^2(x_1+x_2) \quad (6)$$

من المعادلات ④ و ⑤ و ⑥ نستنتج بأن هنالك ثلاث حلول للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة (المعادلة ①) وهي

$x = x_1 = C\sin wt$; $x = x_2 = B\cos wt$

$x = x_1 + x_2 = C\sin wt + B\cos wt$

من ذلك نستنتج أن للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة الخطية المتجانسة يوجد لها حلين وأن التركيب الخطي للحلين (أو مجموع الحلين) يكون حل ثالث للمعادلة (وهذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب)، وهذه تصح فقط للمعادلات الخطية وحيث أن جميع الحركات التوافقية البسيطة تنطبق عليها المعادلة ① (والمعادلة خطية متجانسة) فهي تخضع لقاعدة التركيب، وبذلك فإن محصلة اهتزازين توافقيين أو أكثر يساوي مجموع الاهتزازات المنفردة التي تؤثر على الجسم.

اجباري

أشكال ليساجو Lissajou's Figures

عند التأثير على الجسم بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين فإن محصلة الحركة للجسم تكون بشكل منحنٍ ويدعى بـ(أشكال ليساجو). أن شكل هذا المنحني (أشكال ليساجو) يعتمد على السعة وتردد كل من الحركتين التوافقيتين البسيطتين وعلى فرق الطور بينهما. عندما تكون النسبة بين ترددي الحركتين عدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فإن شكل المسار (أشكال ليساجو) يكون مسار مغلق. ويلاحظ أن أشكال ليساجو تكون دورية فقط (أي تكرر نفسها في كل دورة) عندما تكون النسبة بين ترددي الحركتين المتعامدتين يساوي عدد صحيح.

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين (الطريقة التحليلية)

عندما يتأثر جسماً بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين أحدهما باتجاه المحور السيني والأخرى باتجاه المحور الصادي ولكن تردد الحركتين متساوي وفرق الطور بينهما زاوية θ. فإن الإزاحة الآنية

للجسم باتجاه المحور السيني تساوي

$$X = a\sin(\omega t+\theta) \quad ---(7)$$

والازاحة الزمنية باتجاه المحور الصادي تساوي

$$y = b\sin\omega t \quad ---(8)$$

للحصول على المعادلة العامة لمسار الحركة نتخلص من الزمن (t) بين المعادلتين 7 و 8 .

من المعادلة 7

$$\frac{X}{a} = \sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta \quad ---(9)$$

من المعادلة 8

$$\sin\omega t = \frac{Y}{b} \quad ---(10)$$

$$\cos\omega t = \sqrt{1-\frac{Y^2}{b^2}} \quad ---(11)$$

نعوض المعادلة (10) و (11) بالمعادلة (9)

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b}\cos\theta + \sqrt{1-\frac{Y^2}{b^2}}\,\sin\theta$$

نربع طرفي المعادلة الاخيرة

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\cos\theta = \sqrt{1-\frac{Y^2}{b^2}}\,\sin\theta$$

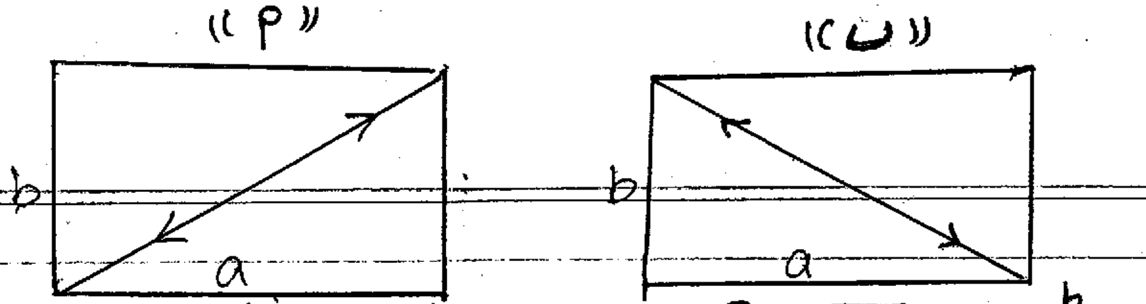
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\cos^2\theta - \frac{2XY}{ab}\cos\theta = \left(1-\frac{Y^2}{b^2}\right)\sin^2\theta$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta) - \frac{2XY}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{2XY}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta \quad ---(12)$$

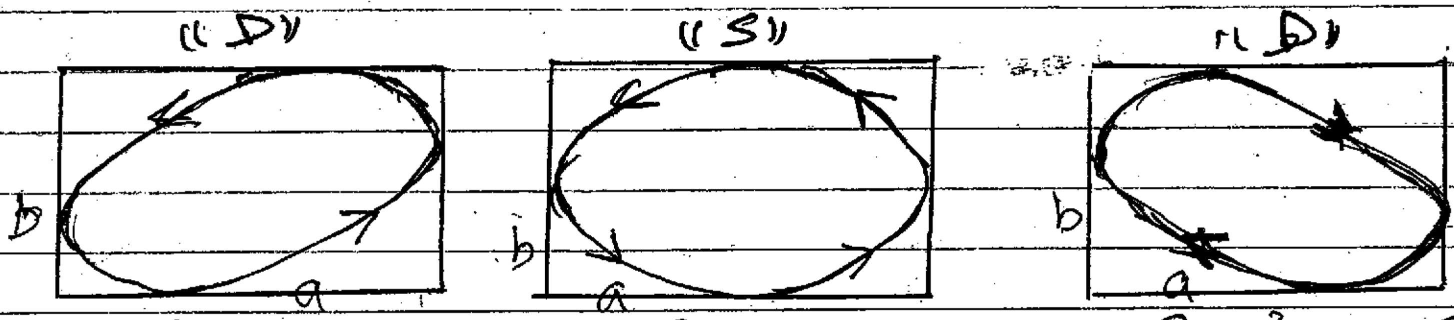
معادلة (12) هي المعادلة العامة للقطع الناقص (Ellipse) وهي تمثل المسار الذي يسلكه الجسم عندما يتأثر بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين ولهما نفس التردد ويختلفان بالسعة وفرق الطور بينهما θ

من المعادلة (12) يمكن الحصول على اشكال ليساجو لمختلف قيم θ وكما مبين في الشكل التالي :



$\theta = 0$; $y = \frac{b}{a}x$
معادلة خط مستقيم ميله يساوي $\frac{b}{a}$ (موجب)

$\theta = \pi$; $y = -\frac{b}{a}x$
معادلة خط مستقيم ميله يساوي $-\frac{b}{a}$ (سالب)



$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$
معادلة قطع ناقص مائل
اتجاه الحركة عكس اتجاه حركة عقرب الساعة

$\theta = \frac{\pi}{2}$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
ومعادلة القطع الناقص الذي تقع محاوره الأساسيات على امتداد المحورين X و Y

$\theta = \frac{3}{4}\pi = 27$
معادلة قطع ناقص مائل
اتجاه الحركة باتجاه حركة عقرب الساعة

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين لهما نفس التردد (الطريقة البيانية)

نفرض أن جسماً يتأثر بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين أحدهما باتجاه المحور السيني والثانية باتجاه المحور الصادي، سعة كل منهما a و b على التوالي وفرق الطور بينهما θ ولهما نفس التردد w، وحسب المعادلتين:

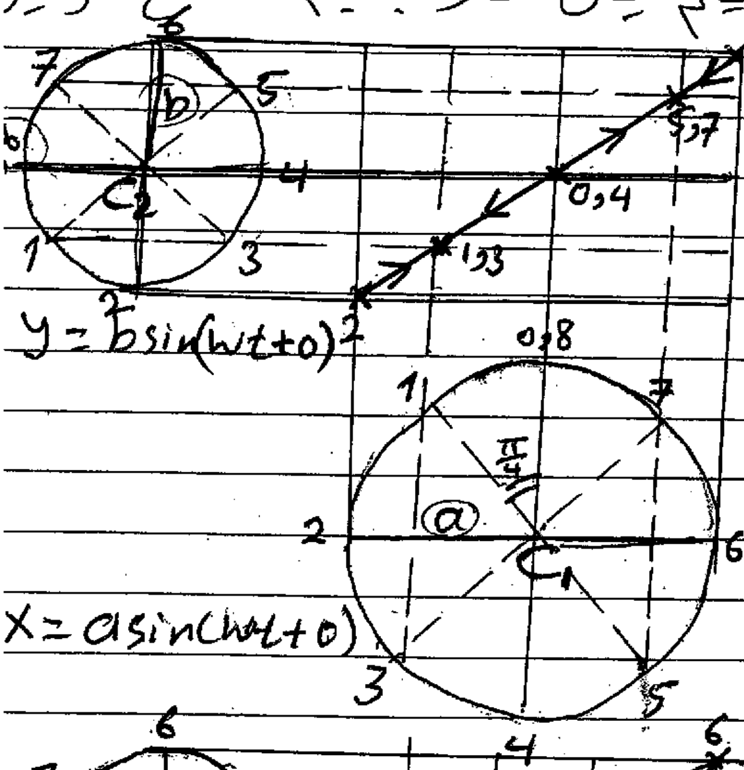
$$X = a\sin(wt + \theta) \quad (7)$$
$$Y = b\sin wt \quad (8)$$

لأجل تركيب هاتين الحركتين بطريقة بيانية، نرسم دائرتين مركزهما C_1 و C_2 وأنصاف أقطارهما a و b على التوالي. نقسم محيط كل دائرة إلى ثمانية أجزاء متساوية، كل جزء يمثل $\frac{1}{8}$ زمن الدورة الواحدة $(\frac{1}{8}T)$ أي يعادل زاوية $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$. نضع أرقاماً على هذه الأجزاء بحيث يشير الرقم إلى زاوية الطور أو الزمن. مثلاً الرقم (0) يعني الزمن $(t=0)$ والرقم (1)

(5)

حيث الزمن $(t=\frac{T}{8})$ ، وهكذا الرقم (2) يشير الى الزمن $(t=\frac{2T}{8})$ ثم نأخذ اسقاطات هذه النقاط على المستطيل او المربع وبتوصيل نقاط التقاطع حسب تسلسلها نحصل على مسار الحركة الذي يسلكه الجسم من تأثير الحركتين التوافقيتين المتعامدتين (الشكل ليساجو).

(a) عندما يكون فرق الطور $(\theta=0)$ في الزمن $(t=0)$ فان الحركة تبدأ من الوضعين (0،0) على محيط الدائرتين ، وبعد اسقاط النقاط على المستطيل والتوصيل بينهما نحصل على خط مستقيم (كما مبين بالشكل) وهذا الخط المستقيم يمثل مسار الجسم الخاضع لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد وفرق الطور بينهما صفر ومختلفتان بالسعة.



الشكل المجاور يمثل شكل ليساجو للجسم الناتج لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد ولهما سعة مختلفة

$a \neq b$

$w_1 = w_2 = w$

$\theta = 0$

(b) عندما يكون فرق الطور لمحور السينات $\theta=\frac{\pi}{4}$ فان الحركة تبدأ من الوضع (0،0) على محيط الدائرتين ولكن الصفر لمحور السين متقدم بزاوية $\frac{\pi}{4}$ وبعد اسقاط النقاط والتوصيل بينهما نحصل على قطع ناقص مائل يمثل مسار الحركة للجسم (شكل ليساجو) تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد ومختلفتان بالسعة وفرق الطور بينهما $\theta=\frac{\pi}{4}$