نحسب أولاً الزمن اللازم لوصول الجسم الى نهاية المسار مبتدأً من موضع التوازن ونفرض ان الزمن يساوي t_3 وان الازاحة $X = A$

$$A = A\sin(\omega t_3 + \delta) \Rightarrow \sin(\omega t_3 + \delta) = 1$$

$$\therefore \omega t_3 + \delta = \frac{\pi}{2} \quad --- (4)$$

نحسب الزمن اللازم لوصول الجسم من نقطة P الى نهاية المسار، بطرح المعادلتين (2) و (4) نحصل على

$$\omega(t_3 - t_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

نعوض من معادلة (1) عن ω

$$\Delta t' = t_3 - t_1 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3\frac{2}{3}\pi} = 0.5 \text{ sec}$$

$$\Delta t' = 0.5 \text{ sec} \quad --- (5)$$

الزمن اللازم لوصول الجسم من نهاية المسار الى موضع التوازن يساوي ربع زمن الذبذبة اي انه يساوي

$$\Delta t'' = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \times 3 = 0.75 \text{ sec.}$$

لايجاد الزمن المطلوب نجمع المعادلتين (5) و (6)

$$t = \Delta t' + \Delta t'' = 0.5 + 0.75 = 1.25 \text{ sec.}$$

لايجاد السرعة العظمى للجسم

$$V_{max} = A\omega \quad --- (7)$$

$$\because V = A\omega \cos(\omega t_1 + \delta)$$

$$\therefore V = V_{max}\cos(\omega t_1 + \delta)$$

$$V_{max} = \frac{V}{\cos(\omega t_1 + \delta)} = \frac{0.6}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{0.6}{\sqrt{3}/2}$$

$$V_{max} = 0.69 \text{ m/sec.}$$

س2) جسم كتلته 25 gm يتحرك بصورة أفقية حركة توافقية بسيطة بثابت قوة 400 dyn/cm . إذا علمت أن الحركة ابتدأت بإزاحة 10cm وبسرعة 40 cm/sec . أحسب:

أ) الطاقة الكلية ب) أقصى إزاحة جـ) أقصى تعجيل

د) الإزاحة والسرعة والتعجيل بعد زمن $\frac{\pi}{6}$ من بدء الحركة

الحل: $m=25\ gm\ ;\ K=400\ \frac{dyn}{cm}\ ;\ X=10\ cm\ ;\ V=40\ cm/sec.$

أ) $E=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}KX^2$ $\quad t=0 \Leftarrow$ بداية الحركة

$$E=\frac{1}{2}\times25\times40^2+\frac{1}{2}\times400\times10^2=40000\ erg=0.4\ Joul$$

ب) $V_{max}=AW$

$$A=\sqrt{\frac{2E}{K}}=\sqrt{\frac{2\times40000}{400}}=10\sqrt{2}=14.14\ cm$$

$$W=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{400}{25}}=4\ Hz$$

$$\therefore V_{max}=14.14\times4=56.56\ cm/sec.$$

حل آخر $\quad V_{max}=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\times40000}{25}}=56.56\ cm/sec.$

جـ) $a_{max}=AW^2=14.14\times4^2=226.24\ cm/sec^2$

د) لإيجاد الإزاحة بعد زمن $\frac{\pi}{6}$ نأخذ معادلة الإزاحة للحركة التوافقية البسيطة ونعوض جميع القيم فيها وكما يلي

$$X=A\sin(wt+\delta)$$

* نجد δ أولاً من الشروط الابتدائية للحركة حيث $(t=0\ ;\ X=10cm)$

$$X=A\sin(0+\delta)\Rightarrow X=A\sin\delta$$

$$\delta=\sin^{-1}\frac{X}{A}=\sin^{-1}\frac{10}{10\sqrt{2}}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ$$

$$\delta=\frac{\pi}{4}=45^\circ$$

* لإيجاد الإزاحة نعوض القيم بمعادلة الإزاحة

$$X = 10\sqrt{2}\,\sin\left(4\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$X = 3.7\ cm$$

* نجد السرعة بعد زمن $t=\frac{\pi}{6}$

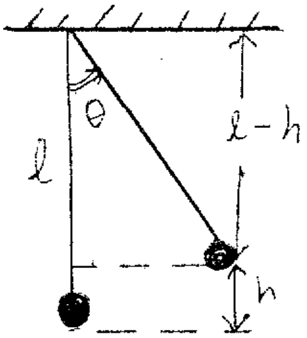
$$V=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega_0 t+\delta)$$

$$=10\sqrt{2}\times 4\times\cos\left(4\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=-54.6\ cm/sec$$

$$a=\frac{dV}{dt}=-A\omega^2\sin(\omega t+\delta)=-\omega^2 X$$

$$a=-4^2\times 3.7=-59.2\ cm/sec^2$$

س٢) أثبت أن أقصى سرعة لكتلة البندول البسيط تعطى بالعلاقة: $V=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$ إذا كان البندول يبدأ بالاهتزاز من زاوية مقدارها θ وأن طول البندول l .



الحل: عند أعلى موقع من المسار يمتلك الجسم طاقة كامنة فقط مقدارها mgh ، وعند أدنى موقع (موضع التوازن) يمتلك الجسم طاقة حركية $\frac{1}{2}mV^2$ فقط . وحسب قانون حفظ الطاقة فإن

أقصى طاقة كامنة (عند أعلى موقع) = أقصى طاقة حركية (عند موضع التوازن)

$$\frac{1}{2}mV_{max}^2 = mgh$$

$$V_{max}^2 = 2gh$$

$$V_{max}=\sqrt{2gh} \quad \text{----} \ (1)$$

$$\cos\theta=\frac{l-h}{l} \Rightarrow h=l(1-\cos\theta) \quad \text{--} \ (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$V_{max}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

⑤

س4) قطعة حديد كتلتها (4 kgm) معلقة بنابض المرونة ومهتزة بحركة توافقية بسيطة. اذا كانت سعة الاهتزاز (30 cm) وزمن الذبذبة (0.6 s) احسب:
أ) ثابت المرونة للنابض ب) اقصى سرعة ج) السرعة عند الازاحة (10 cm) د) الازاحة عند السرعة (200 m/s)

الجواب

$m = 4\ kgm \quad A = 30\ cm \quad T = 0.6\ s$

$V = 200\ m/s \quad X = ?$ (د) $\quad x = 10\ cm \quad V = ?$ (ج) $\quad V_{max} = ?$ (ب) $\quad K = ?$ (أ)

(أ) $W^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = mW^2$

$W = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{0.6} = 10.47\ Hz$

$K = mW^2 = 4 \times (10.47)^2 = 438.48\ N/m$

(ب) $V_{max} = W A$

$V_{max} = 10.47 \times 30 = 314.1\ cm/s$
$= 3.141\ m/s$

(ج) $V = W\sqrt{A^2 - x^2}$

$V = 10.47\sqrt{(30)^2 - (10)^2} = 10.47\sqrt{800}$

$V = 295.14\ cm/sec$

(د) $V = W\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow V^2 = W^2(A^2 - x^2)$

$X^2 = A^2 - \frac{V^2}{W^2} \Rightarrow X = \sqrt{A^2 - \frac{V^2}{W^2}}$

$X = \sqrt{30^2 - \frac{200^2}{10.47^2}} = 23.13\ cm$

(6)

س ٦) جسم يهتز بحركة توافقية بسيطة وكانت سرعته لحظة (6 cm/s) عند الإزاحة (8 cm) بينما كانت سرعته (8 cm/s) عند الإزاحة (6 cm) . أوجد : السعة والتردد الزاوي وزمن الدورة

الجواب :

$V_1 = 6 \ cm/s \qquad X_1 = 8 \ cm$

$V_2 = 8 \ cm/s \qquad X_2 = 6 \ cm$

$A = ? \qquad W = ? \qquad T = ?$

$V = W \sqrt{A^2 - X^2}$ —— (1)

$V_1 = W \sqrt{A^2 - X_1^2} \Rightarrow V_1^2 = W^2 (A^2 - X_1^2)$

نعوض عن X_1 و V_1 بالمعادلة الأولى فنحصل على

$6^2 = W^2 (A^2 - 8^2) \Rightarrow W^2 = \frac{36}{A^2 - 64}$ —— (2)

نعوض عن X_2 و V_2 بالمعادلة (1) نحصل على :

$8^2 = W^2 (A^2 - 6^2) \Rightarrow W^2 = \frac{64}{A^2 - 36}$ —— (3)

بحل المعادلتين (2) و (3) نحصل على

$\frac{36}{A^2 - 64} = \frac{64}{A^2 - 36} \Rightarrow 64(A^2 - 64) = 36(A^2 - 36)$

$64A^2 - 36A^2 = 4096 - 1296 \Rightarrow 28A^2 = 2800$

$A^2 = \frac{2800}{28} = 100$

$\boxed{A = \pm 10} \ cm$

$\pm$ ناتج من تذبذب الجسم حول موضع التوازن

لإيجاد التردد الزاوي نعوض قيمة A بمعادلة (2)

$W^2 = \frac{36}{(\pm 10)^2 - 64}$

(7)

$$w^2 = \frac{36}{100-64} = \frac{36}{36}$$ تطبيق في القانون

$$w^2 = 1$$

$$\boxed{w = 1 \quad Hz}$$

لايجاد الزمن الدوري (زمن الذبذبة T)

$$w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w}$$

$$T = \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28 \ s$$