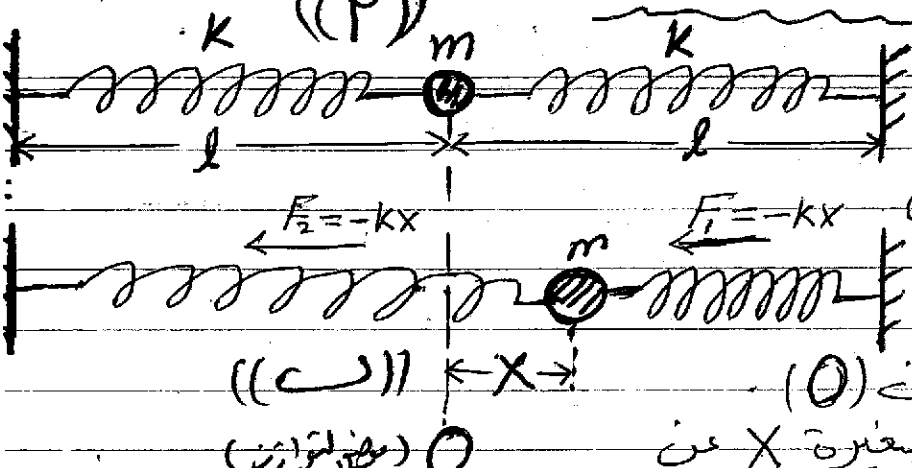
③ الكتلة المتصلة بين نابضين متماثلين :



نفرض لدينا نابضين متماثلين مربوط بينهما كتلة m موضوعة على سطح أفقي أملس (كما في الشكل P) ، عند عدم تأثير أي قوة خارجية يكون الجسم في موضع التوازن (O)

عند إزاحة الجسم بإزاحة صغيرة X عن موضع التوازن نحو اليمين أو اليسار فإن أحد النابضين يمتد والآخر ينضغط (كما في الشكل ب) ، وتظهر قوة معيدة بكل نابض ويكونان بنفس الاتجاه (باتجاه اليسار) مقدار كل منهما

$$F_1=-kX \quad , \quad F_2=-kX$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه القوة بعكس اتجاه زيادة الإزاحة

محصلة القوتين المعيدة تساوي F

$$F=F_1+F_2=-2kX \quad \text{---} \quad (A)$$

عند ترك الجسم حراً بعد إزاحته إزاحة بسيطة فإنه سوف يهتز ، نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة

$$F=ma=m\frac{d^2X}{dt^2} \quad \text{---} \quad (B) \qquad a_y=0$$

من المعادلتين (A) و (B) نحصل على

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=-2kX$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{2k}{m}X \quad \text{---} \quad (23)$$

بمقارنة معادلة (23) بالمعادلة (4) نستدل على أن حركة جسم طوليا بين نابضين عند إزاحة الجسم إزاحة بسيطة X وتركه حراً هي حركة توافقية بسيطة لها تردد زاوي وتردد طبيعي وزمن دوري كما يلي:

$$W_0=\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

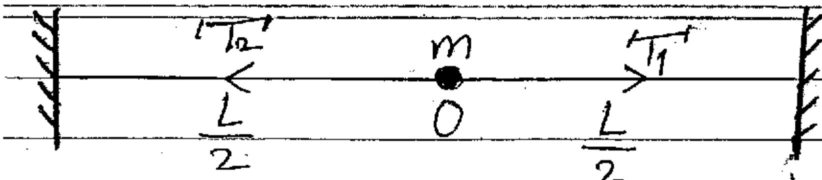
وأن الحل العام للمعادلة (23) هو

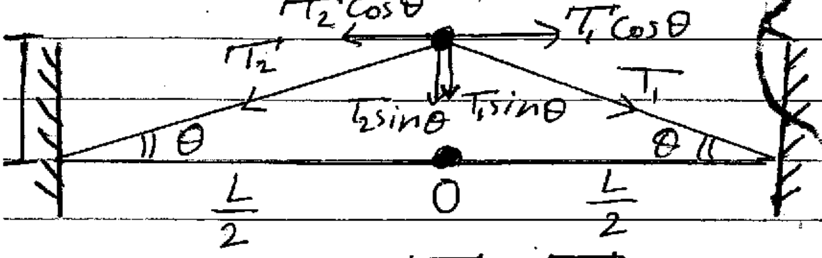
$$X=C\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t+B\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t$$

حيث أن B و C ثوابت يمكن إيجادها من الشروط الابتدائية للحركة (t=0)

④ جسم مربوط في وسط وتر

ليكن جسماً صغيراً كتلته m مربوط في وسط وتر مرن وأفقي. الوتر مربوط من الجانبين وطوله L وقوة الشد فيه T. عند إزاحة الجسم إزاحة صغيرة y فإن محصلة القوى المؤثرة على الجسم -





محصلة القوى الأفقية

$T_1 = T_2 = T \qquad \sum F_x = T_1\cos\theta - T_2\cos\theta = 0$

محصلة القوى العمودية

$$\sum F_y = -T_1\sin\theta + (-T_2\sin\theta)$$
$$\sum F_y = -2T\sin\theta$$

القوة $\sum F_y$ هي القوة التي تحاول اعادة الجسم الى موضع توازنه وهي التي تسبب الاهتزاز.

$$F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{(قانون نيوتن الثاني)} \qquad a_x = 0$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2T\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{L/2} \qquad (y : \text{very small})$$

من المعادلتين الأخيرتين نحصل على

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2Ty}{L/2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4T}{mL}\,y} \quad (24)$$

بمقارنة المعادلة (24) مع المعادلة (4) نستنتج أن حركة الجسم المربوط في وسط وتر مشدود من الجانبين تكون حركة توافقية بسيطة بتردد زاوي ، وتردد طبيعي ، وزمن دورية كما يلي:

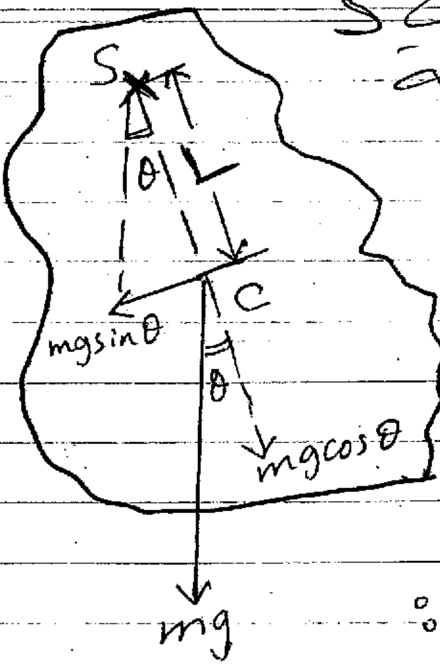
$$w_0 = \sqrt{\frac{4T}{mL}} = 2\sqrt{\frac{T}{mL}} \; ; \; f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{T}{mL}} \; ; \; T = \pi\sqrt{\frac{mL}{T}}$$

وإن الحل العام للمعادلة (24) هو

$$Y = C\sin\left(2\sqrt{\frac{T}{mL}}\,t\right) + B\cos\left(2\sqrt{\frac{T}{mL}}\,t\right)$$

حيث B و C ثوابت يمكن ايجادها من الشروط الابتدائية

⑤ البندول المركب (البندول الفيزيائي) Physical pendulum



لنفرض أن المسافة بين نقطة التعليق S ومركز الكتلة C هي L ، وأن m كتلة الجسم و I عزم القصور الذاتي.
عند أزاحة الجسم بزاوية θ عن موضع التوازن فأن الخط الواصل بين S و C يصنع زاوية θ مع العمود ، أن عزم القوة المعيدة يساوي
(العزم = القوة × ذراعها)

$$\tau = Fd = -(mg\sin\theta)L$$

عندما θ صغيرة فان $\therefore \sin\theta \simeq \theta$

$$\therefore \tau = -mgL\theta \quad \text{---} \ (A)$$

عزم القوة (وحسب قانون نيوتن الثاني) يساوي

α : التعجيل الزاوي

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{---} \ (B)$$

من المعادلتين (A) و (B) نحصل على :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgL}{I}\right)\theta \quad \text{---} \ (25)$$

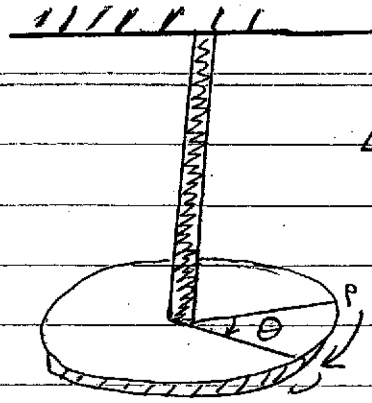
من مقارنة معادلة (25) مع المعادلة (4) نستدل أن حركة البندول المركب هي حركة زاوية توافقية بسيطة [من وجهة النظر الرياضية أن معادلة (25) مطابقة لمعادلة (4)] وأن التردد الزاوي والتردد الطبيعي والزمن الدوري يساوي :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \ ; \ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{I}} \ ; \ T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

الحل العام لمعادلة (25) هو

$$\theta = C\cos\sqrt{\frac{mgL}{I}} + B\sin\sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

⑥ بندول اللي : Torsional pendulum



إذا أدير القرص من نقطة P الى نقطة ب
بزاوية θ يحدث لي في القضيب بعزم لي L
يعمل على أعادة البندول الى موضع التوازن
(عزم القوة المعيدة).

$$L \propto \theta \quad \text{(قانون هوك)}$$

$$L = -K\theta \quad \text{--- (A)}$$

K: ثابت اللي
ويعتمد على طول وقطر السلك وطبيعة مادة السلك

وعند ترك البندول حراً فان عزم اللي (وهو عزم القوة المعيدة)
يولد تعجيل زاوي مقداره $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ فيتحرك القرص بحركة زاوية
توافقية بسيطة:

$$L = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{--- (B)}$$

α: التعجيل الزاوي

~~وعند ترك البندول حراً فان عزم اللي (وهو عزم القوة المعيدة)~~
~~يولد تعجيل زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ فيتحرك القرص بحركة زاوية توافقية بسيطة~~

$$\cancel{L = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

من المعادلتين (A) و (B) نحصل على معادلة الحركة لبندول اللي

$$L = -K\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta \quad \text{--- (26)}$$

من مقارنة معادلة (26) مع المعادلة (4) نحصل على:

$$W_0 = \sqrt{\frac{K}{I}} \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I}} \quad ; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

للحصول على الازاحة الزاوية في اية لحظة (θ) نجد الحل العام للمعادلة (26) وهو

$$\theta = C\sin\sqrt{\frac{K}{I}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{K}{I}}\,t$$

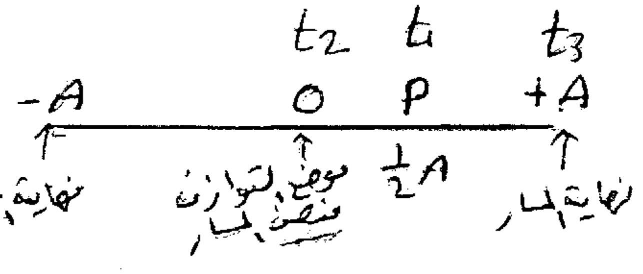
$$\theta = \theta_{max}\cos(W_0 t + \alpha_1)$$

حيث α_1: زاوية الطور الابتدائي

الفصل الثاني
تمارين محلولة

س١) جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة مدة ذبذبتها 3 sec. فإذا كانت سرعة الجسم 0.6 m/sec في نقطة أزاحتها $\frac{1}{2}A$ ، أحسب الزمن اللازم لكي يصل الجسم إلى موضع التوازن عندما يكون متحركاً (P) مقترباً نحو موضع التوازن (ب) مبتعداً عن موضع التوازن . ثم أحسب السرعة العظمى للجسم .

الحل



$$w = 2\pi f$$
$$f = \frac{1}{T}$$
$$w = \frac{2\pi}{T}$$
$$w = \frac{2}{3}\pi \ rad/sec \quad --- (1)$$

$$X = A\sin(wt+\delta)$$

نفرض أن الزمن عند نقطة P يساوي t_1 وان $X=\frac{1}{2}A$ نعوض بالمعادلة أعلاه

$$\frac{1}{2}A = A\sin(wt_1+\delta) \Rightarrow \sin(wt_1+\delta) = \frac{1}{2}$$
$$\therefore \quad wt_1+\delta = \frac{\pi}{6} \quad --- (2) \qquad \frac{\pi}{6}\ rad = 30^\circ$$

(P) نفرض أن الزمن عند موضع التوازن $(X=0)$ يساوي t_2 ، ونعوض بمعادلة الإزاحة نحصل على :

$$0 = A\sin(wt_2+\delta) \Rightarrow \sin(wt_2+\delta) = 0$$
$$\therefore \quad wt_2+\delta = 0 \quad ---- (3)$$

بطرح المعادلتين (2) و (3) نحصل على

$$w(t_2-t_1) = \frac{\pi}{6}$$

نعوض عن قيمة w بالمعادلة (1) في المعادلة الأخيرة نحصل على

$$t_2-t_1 = \Delta t = \frac{\pi}{6w} = \frac{\pi}{6\times\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{4} = 0.25\ sec$$