من المعادلة (9)

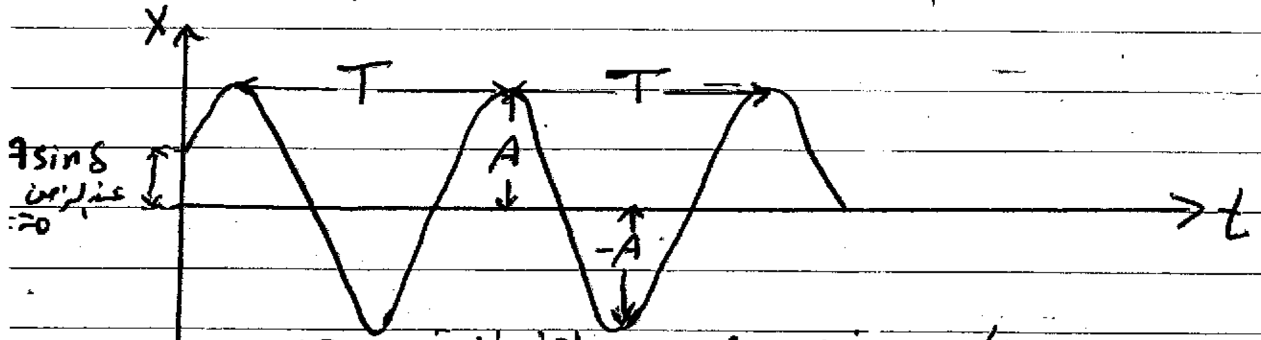
$$X = A\left[\frac{C}{A}\sin\omega_0 t + \frac{B}{A}\cos\omega_0 t\right]$$

نعوض المعادلة (10) بالمعادلة الأخيرة

$$X = A\left[\cos\delta \sin\omega_0 t + \sin\delta \cos\omega_0 t\right]$$

$$\therefore \boxed{X = A\sin(\omega_0 t+\delta)} \quad ---(11)$$

المعادلة (11) تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة (معادلة 1)



الشكل يبين الحل العام للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة (معادلة (11))

توضيح الرموز بالمعادلة (11)

X : الإزاحة الخطية Displacement الآنية للجسم عن موضع التوازن في أي لحظة زمنية t

A : سعة الاهتزاز Amplitude وهي أكبر إزاحة عن موضع التوازن

ω_0 : التردد الزاوي للحركة Angular Frequency $\quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$

δ : ثابتة الطور phase constant أو الطور الابتدائي Initial phase وهو الذي يحدد موضع الجسم في الزمن $t=0$

$(\omega_0 t+\delta)$: زاوية طور الحركة (phase Angle) $\quad \therefore \omega = 2\pi f$

من المعادلتين (7) و (12)

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}\right\} --(13)$$

ملاحظة:

إن الطور الابتدائي δ لأي جسم مهتز مقدار ثابت ويعتمد على الشروط الابتدائية للحركة. بينما زاوية طور الحركة $(\omega_0 t+\delta)$ غير ثابتة بل تتغير دورياً مع الزمن فمثلاً بعد مرور زمن $t=\frac{2\pi}{\omega_0}$ ~~غير ثابتة بل تتغير دورياً~~ أي دورة كاملة من بدء الحركة تكون زاوية الطور $(2\pi+\delta)$ أي أن الحالة تعيد نفسها. ونفس الشيء يحصل بعد مرور $t=\frac{4\pi}{\omega_0}$ ، $t=\frac{6\pi}{\omega_0}$ ، $t=\frac{8\pi}{\omega_0}$ حيث أن

$$\sin(0+\delta) = \sin(2\pi+\delta) = \sin(4\pi+\delta) = ----$$

السرعة الآنية والتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط

$$X = A\sin(W_0 t + \delta) \quad --- (11) \Rightarrow X_{max} = A$$

$$V = \frac{dx}{dt} = AW_0\cos(W_0 t + \delta) \quad -- (12) \qquad V_{max} = AW_0$$

∵ لأن أقصى قيمة للجيب والجيب تمام تساوي واحد

$$V = V_{max}\cos(W_0 t + \delta)$$

$$\frac{X}{A} = \sin(W_0 t + \delta)$$ من معادلة (11) ⇐

$$\frac{V}{AW_0} = \cos(W_0 t + \delta)$$ من معادلة (12) ⇐

$$\because \sin^2(W_0 t + \delta) + \cos^2(W_0 t + \delta) = 1$$

$$\therefore \frac{X^2}{A^2} + \frac{V^2}{A^2 W_0^2} = 1$$

$$W_0^2 X^2 + V^2 = A^2 W_0^2 \Rightarrow V^2 = A^2 W_0^2 - X^2 W_0^2$$

$$V = W_0\sqrt{A^2 - X^2} \quad ---- (15)$$

يلاحظ من المعادلة (15) أن السرعة الآنية للجسم المهتز تساوي صفر عند أقصى إزاحة عن موضع التوازن $(X = A)$. بينما تكون السرعة أقصى ما يمكن $= AW_0$ عندما يمر الجسم في موضع التوازن $X = 0$

* ولإيجاد التعجيل الآني نأخذ المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -AW_0^2\sin(W_0 t + \delta) \quad --- (16) \qquad \boxed{AW_0^2 = a_{max}}$$

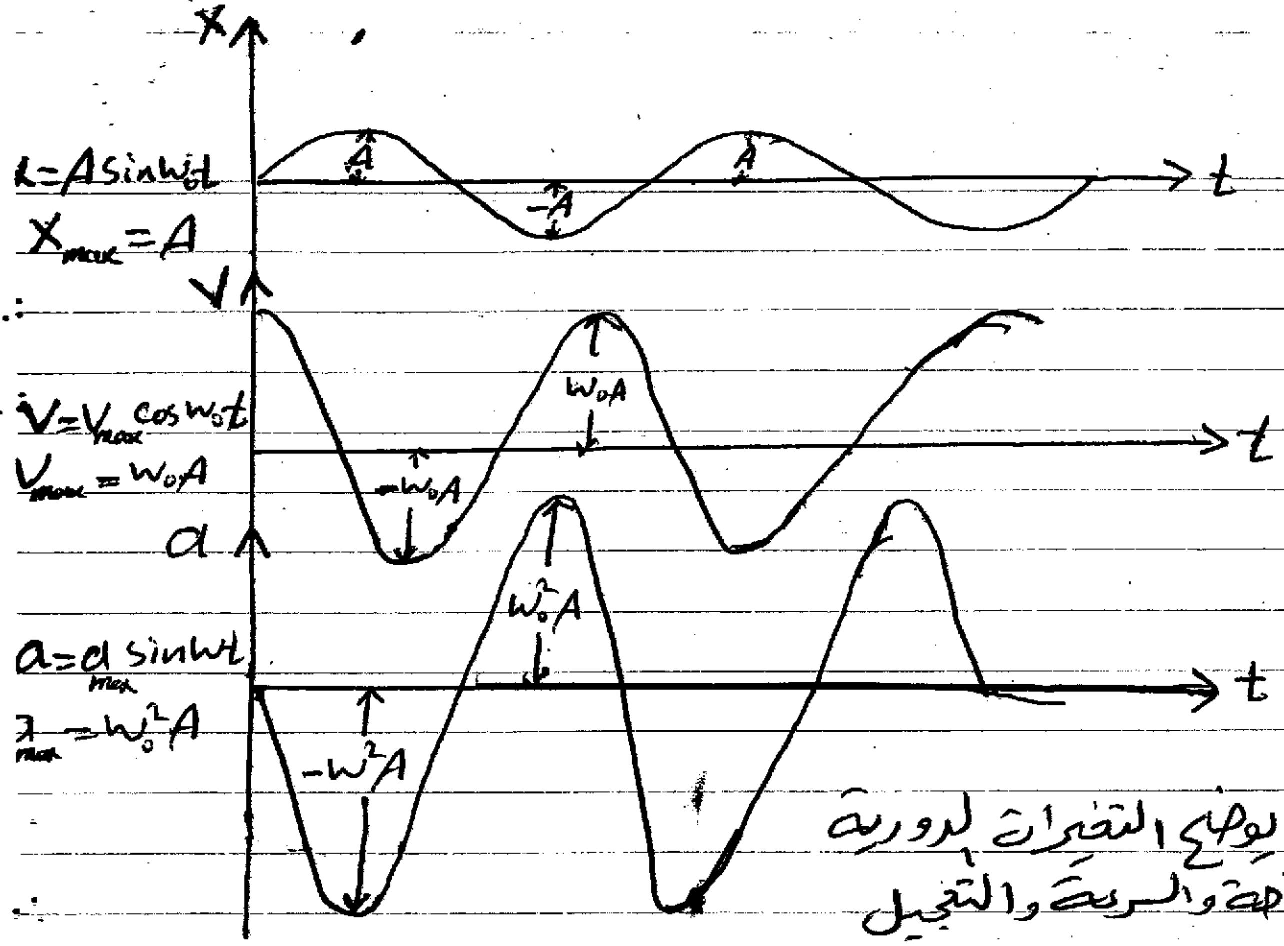
$$a = -a_{max}\sin(W_0 t + \delta)$$

من المعادلتين (11) و (16) نستنتج أن:

$$a = -W_0^2 X \quad --- (17)$$

يمكن رسم العلاقة بين الزمن وكل من الإزاحة والسرعة والتعجيل للمهتز التوافقي البسيط، وللسهولة نفرض أن $(\delta = 0)$ ويكون الرسم كما في الشكل التالي:

الشكل في الصفحة اللاحقة



الشكل يوضح التغيرات الدورية في الإزاحة والسرعة والتعجيل

طاقة المهتز التوافقي البسيط :

لو أخذنا حالة مثالية يكون فيها المجموع الكلي للطاقة الميكانيكية مقدار ثابت في أية لحظة ، أي أنه لا يوجد هناك ضياع بالطاقة الميكانيكية للجسم المهتز . فهذا يعني أنه عند اهتزاز الجسم تحدث عملية تبادل متناوب بين شكلي الطاقة الكامنة والحركية وأن الجسم يمتلك في كل الأحوال طاقة كامنة وطاقة حركية ما عدا في موقعين . فعند أقصى إزاحة عن موضع التوازن حيث يتوقف الجسم عن الحركة آنياً فتكون الطاقة الحركية صفر والكامنة أقصى ما يمكن ، والموقع الثاني عند موضع التوازن حيث تكون الإزاحة صفر أي أن الطاقة الكامنة تساوي صفر والحركية أقصى ما يمكن .

لنفرض أن المجموع الكلي للطاقة الميكانيكية E عند أي لحظة زمنية هو :

$$E = K.E + P.E \quad \text{---} \quad (18)$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2 \cos^2(w_0 t + \delta)$$

$$\therefore K.E_{max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2 = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2$$

$$\therefore P.E = \frac{1}{2} K X^2 = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(w_0 t + \delta)$$

$$\therefore P.E_{max} = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} K X_{max}^2$$

(9)

$$E = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2 \cos^2(w_0 t + \delta) + \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(w_0 t + \delta)$$

$$\because \; m w_0^2 = K \quad \longleftarrow$$ من معادلة (7)

$$\therefore \; E = \frac{1}{2} K A^2 \left[\cos^2(w_0 t + \delta) + \sin^2(w_0 t + \delta)\right]$$

$$E = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m A^2 w_0^2 \quad \text{---} \; (19)$$

من المعادلة (18) و (19)

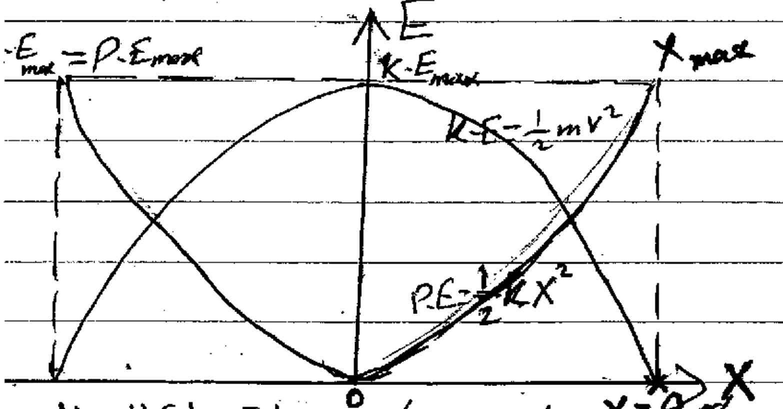
$$\frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K X^2$$

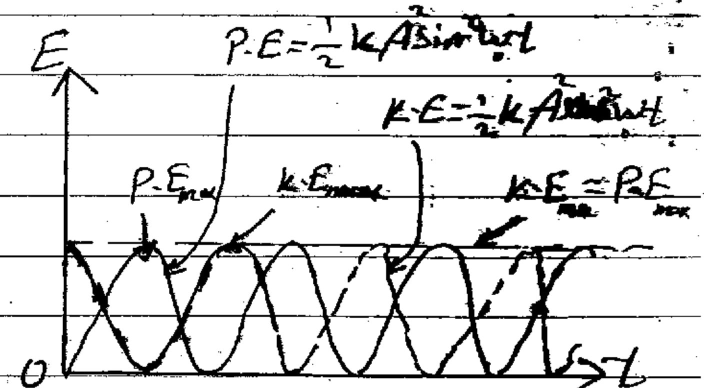
$$m V^2 = K A^2 - K X^2 \Rightarrow V^2 = \frac{K}{m}(A^2 - X^2)$$

$$V = \pm w_0 \sqrt{A^2 - X^2} \quad \Leftarrow$$ وهي نفسها معادلة (15)

عند المرور بموقع التوازن $(X=0)$ فان السرعة

$$V_{max.} = \pm w_0 A$$ (أي أقصى سرعة)





الشكلان يوضحان العلاقة بين الطاقة الحركية والكامنة للاهتزاز التوافقي البسيط

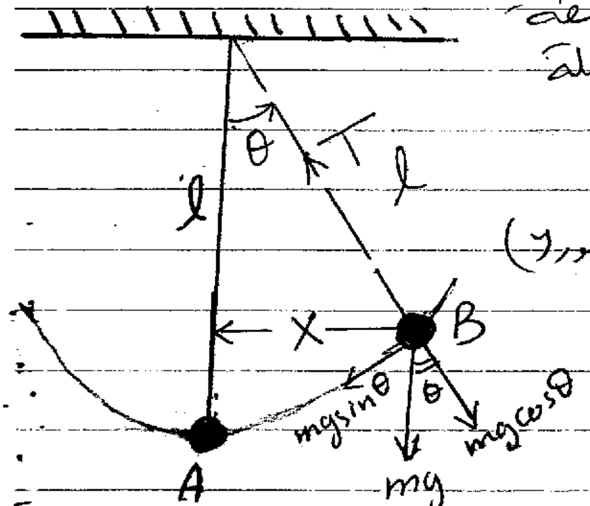
تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

Application of SHM

① البندول البسيط: The simple pendulum

يتكون البندول البسيط من كرة صغيرة مربوطة بنهاية خيط خفيف ورفيع والطرف الآخر للخيط مثبت بنهاية ثابتة.

نفرض أن طول البندول من نقطة التعليق الى مركز الكرة l وكتلة الجسم m ، g التعجيل الأرضي ، T قوة الشد بالخيط



عند ازاحة كرة البندول عن موضع التوازن (أي نقطة A) بازاحة صغيرة X عند نقطة B فأن محصلة القوى المؤثرة على الكرة:

حسب قانون نيوتن الثاني $\sum F = ma$

(باتجاه محور y) $\sum F_y = T - mg\cos\theta = ma_y = 0$

لأن $a_y = 0$

$$\therefore T = mg\cos\theta \quad \text{--- (A)}$$

محصلة القوى باتجاه محور x

$$\sum F_x = -mg\sin\theta = ma_x \quad \text{--- (B)}$$

الاشارة السالبة تعني أن القوة المعيدة F تعاكس الزيادة بالازاحة الزاوية θ . عندما تكون θ صغيرة $(\theta < 5^\circ)$ فأن $[\sin\theta \simeq \theta = \frac{X}{l}]$

قانون نيوتن الثاني

$$F = \sum F_x + \sum F_y = ma \quad \text{--- (C)}$$

من المعادلات (A) و (B) و (C)

$$F = \sum F_x + 0 = \sum F_x = -mg\sin\theta$$

$$F = m\frac{d^2X}{dt^2} = -mg\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{g}{l}X \quad \text{--- (20)}$$

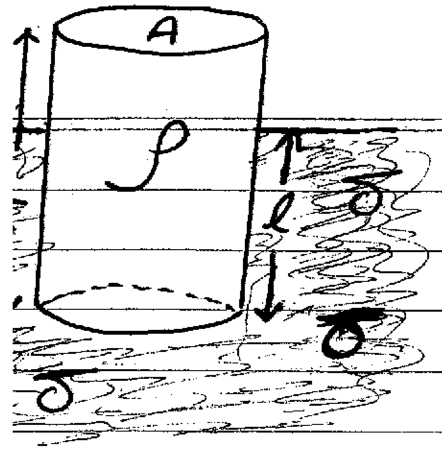
من مقارنة المعادلة (4) مع المعادلة (20) نستدل أن حركة البندول البسيط (عندما تكون θ صغيرة) هي حركة توافقية بسيطة، وأن:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f \Rightarrow \therefore f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\therefore T = \frac{1}{f} \Rightarrow \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

نلاحظ أن التردد الطبيعي f وزمن الذبذبة T للبندول البسيط يعتمد على طول خيط البندول وعلى التعجيل الأرضي ولا يعتمد على كتلة الكرة

يمكن اتباع نفس الطريقة لحل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة للحصول على حلول المعادلة (20) للبندول البسيط.



② الجسم الطافي :

أن أي جسم طافي على سطح سائل إذا ما دفع قليلاً إلى الأسفل أو رفع قليلاً إلى الأعلى ثم ترك حراً فإنه سوف يهتز عمودياً صعوداً ونزولاً على سطح السائل.

نفرض أن الجسم أسطواني مساحة مقطعه A وطوله L وكثافته ρ يطفو على سطح سائل كثافته σ. عندما يكون الجسم في حالة توازن فإن طول الجزء المغمور في السائل l وحسب قاعدة أرخميدس فإن: (وزن الجسم الطافي = وزن السائل المزاح)

$$A l \sigma g = A L \rho g$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\sigma}{\rho} \qquad \frac{\text{طول الجسم الكلي}}{\text{طول الجزء المغمور}} = \frac{\text{كثافة السائل}}{\text{كثافة الجسم}}$$

والآن عند دفع الأسطوانة قليلاً نحو الأسفل لتقطع إزاحة مقدارها X عن موضع التوازن عند لحظة زمنية t، يكون وزن السائل الإضافي المزاح $(AX\sigma g)$ والذي يساوي قوة دفع السائل للأسطوانة نحو الأعلى (التي تمثل القوة المعيدة) والتي تحاول إعادة الأسطوانة إلى موضع التوازن وتسبب الاهتزاز. بتطبيق قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = AL\rho \frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\therefore F = -AX\sigma g \quad \text{القوة المعيدة}$$

$$\therefore AL\rho \frac{d^2X}{dt^2} = -AX\sigma g$$

* الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه قوة دفع السائل يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{\sigma g}{\rho L} X \quad \text{---} \ (21)$$

من مقارنة المعادلة (4) مع المعادلة (21) نستدل على أن حركة الجسم الطافي على سطح السائل عند رفعه أو دفعه قليلاً عن موضع التوازن ثم تركه حراً تكون حركة توافقية بسيطة بتردد زاوي مقداره

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho L}{\sigma g}}$$

الإزاحة الآنية X في أية لحظة زمنية تساوي

$$X = C \sin\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, t + B \cos\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, t$$

C, B ثوابت يمكن إيجادها من الشروط الابتدائية للحركة

وأن الحل العام وفق الشروط الابتدائية يكون كالآتي:

$$X = X_{max} \cos\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, t \quad \text{---} \ (22) \qquad X_{max} = A$$