القيمة V_1 تكون شحنة المكثف قد وصلت إلى q_1 . الـخ وعـلى هذا فإن مقـدار الشغل المبذول لنقل شحنة قدرها dq من أحد الطرفين إلى الآخر يساوي :

$$dW = V_1\, dq$$

وعند الشحنة q يحدد الجهد بالعلاقة :

$$q = C\, V_1$$

$$dW = \frac{1}{C} q\,dq \quad \Rightarrow \quad \therefore W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

وهذا الشغل المبذول يحفظ على شكل طاقة وضع U أي أن :

$$\therefore U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣-١١)$$

$$\because V = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad \therefore U = \frac{1}{2} QV \text{ or } U = \frac{1}{2} CV^2 \ldots \quad (٣-١٢)$$

وإذا كان المكثف متوازي اللوحين وكانت S مساحة اللوح و x المسافة بين اللوحين و σ الكثافة السطحية فإن : $\sigma = Q/S$ و $C = \varepsilon_0 S/x$

$$\therefore U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Sx}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots \quad (٣-أ١٣)$$

وبـما أن حجم الفـراغ الـذي فيه المجـال الكهـربي هو $V = Sx$ فإن المعـادلة (٣-أ١٣) تصبح كالتالي :

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V \quad \ldots\ldots \quad (٣-ب١٣)$$

والتي يمكن كتابتها بالصيغة التالية :

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2 dV \quad \ldots\ldots \quad (٣-جـ١٣)$$

حيث dV عنصر الحجم ، والتكامل على كل الفراغ . وهذه المعادلة هي المعادلة نفسها (٢-٥٨) . علما بأن $\sigma = \varepsilon_0 E$

أما الطاقة المختزنة في وحدة الحجم ، حسب المعادلة (٣-ب١٣) فهي :

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad \ldots\ldots \quad (٣-١٤)$$

القوة بين لوحي المتسعة (المكثف) المستوى Force between the plates of a capacitor

تتجاذب الشحنات السالبة والموجبة الموجودة على لوحي مكثف بقوة من الممكن حسابها بتطبيق قانون كولوم على عنصري شحنتين صغيرتين على اللوحين المتقابلين ثم يجرى بعـد ذلك تكاملان مزدوجان على كل من اللوحين، ويكون اللوحان في حالة توازن عندما تتعادل القوى الكهربية المحسوبة مع قوى ميكانيكية مصدرها القواعد المثبتة في حالة المكثف الهوائي، والعازل في حالة المكثف الورقي.

والقوة الكهربية بين الشحنات الموجودة على لوحي المكثف لا تتغير قيمتها إذا تغير نوع العازل بين اللوحين: فإذا كان بين اللوحين عازل فإن هذا العازل يجهد بواسطة المجال، وتعرف هذه الظاهرة بالانضغاط الكهربي (electrostriction) وينتج عن إجهاد العازل قوة ميكانيكية تؤثر على اللوحين اللذين يصبحان في حالة توازن نتيجة لتأثير عدة قوى بعضها كهربية والأخرى ميكانيكية.

فإذا كانت شحنة كل من اللوحين بعد شحنهما Q ، وكانت S مساحة كل من اللوحـين و x المسافة بينهما، وكانت F القوة التي يؤثر بها كل من الحاملين على اللوح المناظر، فإن الشغل dW الذي يبذل عند زيادة ضئيلة للمسافة بين اللوحين قدرها dx يساوي:

$$dW = -Fdx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣-١٥)$$

وتعني الإشـارة السالبة أن القوة التي سببت في زيادة المسافة بين اللوحين بمقدار dx تعـاكس وتساوي القوة الكهربية بين اللوحين. وحيث إن الإزاحة dx تغير من قيمة الطاقة المخزنة بمقدار dU فإن القوة الكهربي يمكن معرفتها من المعادلة:

$$-Fdx = dU \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣-١٦)$$

ومعروف من المعادلة (٣-١٣) أنه عندما تكون الألواح معزولة تكون Q ثابتة وتكون الطاقة المختزنة:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S}$$

والتغير الحادث نتيجة الانتقال مسافة صغيرة dx هو:

$$dU = \frac{1}{2}\frac{Q^2 dx}{\varepsilon_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣-١٧)$$

وبمساواة (٣-١٦) و (٣-١٧) يكون:

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٣-١٨)$$

فقدان الطاقة لتقاسم الشحنات بين موصلين أو متسعتين (مكثفتين)

إذا فرض أن موصلا، أو لوح مكثف شحنته موجبة، سعته C_1 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_1 وصل بموصل آخر، أو بلوح مكثف آخر شحنته موجبة، سعته C_2 وجهده «أو الفرق في الجهد» V_2 فإنهما سوف يتقاسمان الشحنة بحيث تصبح جميع نقط كل من الموصلين واقعة تحت الجهد نفسه. فإذا كان $V_1 > V_2$ وكان V هو الجهد المشترك فإن:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = V(C_1 + C_2) \Rightarrow \therefore V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

وتكون الطاقة قبل التوصيل هي: $\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2$

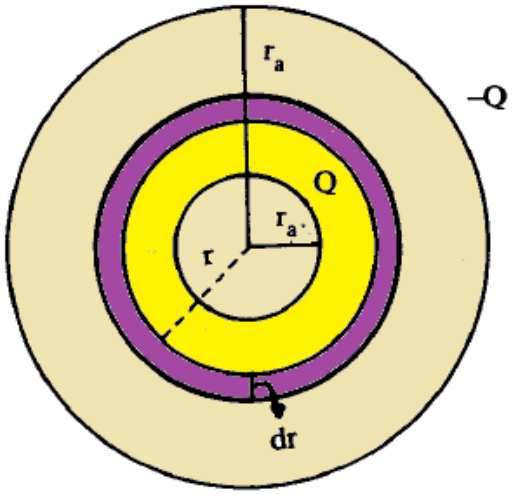
والطاقة بعد التوصيل هي: $\frac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2 = \frac{1}{2}\frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2}$

ولذلك فالفرق في الطاقة قبل وبعد التوصيل هي:

$$\frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 C_2 (V_1 - V_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \quad (٣-١٩)$$

وهذه الكمية موجبة ما لم يكن $V_1 = V_2$ ولذلك فالطاقة الكلية قبل التوصيل أكبر من الطاقة بعد التوصيل. وبتعبير آخر إنه إذا كان $V_1 \neq V_2$ فلابد من فقد للطاقة نتيجة لتقاسم الشحنات ويظهر هذا الفرق على هيئة شرارة أو ارتفاع في درجة حرارة الموصلين المتصلين أو المكثفين المتصلين.

مثال مكثف كروي يتألف من كرة داخلية نصف قطرها r_a وكرة خارجية نصف قطرها r_b كما في الشكل المجاور. فإذا كان المكثف يحمل شحنة قدرها Q فاحسب الطاقة الكلية (total energy) باستخدام المعادلة (٣-١١).



الحل تنص المعادلة (٣-١١) على: $U=\frac{1}{2C}Q^2$. ولكن من المعروف أن سعة المكثف الكروي تعطى بالمعادلة (٣-٦).

$$C=\frac{q}{V}=\frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{(b-a)} \qquad (٣-٦)$$

$$\therefore U=\frac{Q^2(r_b-r_a)}{8\pi\varepsilon_0 r_a r_b}$$

مثال وصل مكثفان على التوازي أولهما (A) وسعته $20\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 1000 V والآخر (B) وسعته $10\mu F$ وفرق الجهد بين طرفيه 100 V. احسب الطاقة الكلية قبل التوصيل. ومقدار فقدان الطاقة بعد التوصيل والجهد العام (common potential).

الحل وتكون الطاقة الكلية قبل التوصيل هي: $U_B=\frac{1}{2}C_1V_1^2+\frac{1}{2}C_2V_2^2$

$$\therefore U_B=\frac{1}{2}\frac{20}{10^6}\times(1000)^2+\frac{1}{2}\frac{10}{10^6}\times(100)^2=10.05\,J$$

أما الطاقة بعد التوصيل فهي : $U_A = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(0.021)^2}{30\times10^{-6}} = 7.55\,J$

وبذلك فإن الفقد في الطاقة هو: $U = U_B - U_A = 2.7\,J$

أما الجهد العام فهو: $V = \frac{q}{C} \Rightarrow \therefore V = \frac{0.021}{30\times10^{-6}} = 700\,V$

Introduction of Dielectric مقدمة عن المواد العازلة