القواعد المتعامدة الاحادية و طريقة گرام - شميدت

تعريف :

ليكن $(V, \langle , \rangle)$ فضاءاً اقليدياً ولتكن S مجموعة جزئية من V.
يقال بان S مجموعة متعامدة اذا وفقط اذا كان اي متجهين مختلفين في S متعامدين.
المجموعة المتعامدة تسمى مجموعة متعامدة احادية اذا وفقط اذا كان طول كل متجه فيها مساوياً الى 1 .

امثلة :

(1) المجموعة $S=\{\vec{u}=(1,1,1), \vec{v}=(0,0,0)\}$ تكون مجموعة متعامدة في الفضاء $\mathbb{R}^3$ مع الضرب الداخلي الاعتيادي ، لكنها ليست مجموعة متعامدة احادية وذلك لان :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (1)(0) + (1)(0) + (1)(0) = 0$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3} \neq 1$$

$$S=\left\{\vec{u}_1=(0,1,0),\ \vec{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{u}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$ مجموعة

تكون مجموعة متعامدة احادية في الفضاء $\mathbb{R}^3$ مع الضرب الداخلي الاعتيادي ، وذلك لان :

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle = (0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1)(0) + (0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0)(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

أي أن :

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle = \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = 0$$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\langle \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

أي أن :

$$\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 1$$

إذن المجموعة S متعامدة احادية .

$$S = \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$ المجموعة

ليست مجموعة متعامدة في الفضاء $M_2(\mathbb{R})$ ← الضرب الداخلي المعرف سابقاً وذلك لأن :

$$\langle A, C \rangle = (1)(0) + (1)(1) + (1)(1) + (1)(-1) =$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u}_k \rangle = \langle \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k + \dots + \alpha_n \vec{u}_n , \vec{u}_k \rangle$$

$$\left(\begin{matrix}\text{خواص}\\ \text{الضرب}\\ \text{الداخلي}\end{matrix}\right) = \alpha_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_k \rangle + \alpha_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_k \rangle + \dots + \alpha_k \langle \vec{u}_k, \vec{u}_k \rangle + \dots + \alpha_n \langle \vec{u}_n, \vec{u}_k \rangle$$

بما ان المجموعة S متعامدة احادية ، اذن : $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k \rangle = 0$ عندما $i \neq k$ وان $\langle \vec{u}_k, \vec{u}_k \rangle = \|\vec{u}_k\|^2 = 1$ لكل k .

اذن نحصل من المعادلة اعلاه على ما يأتي :

$$\langle \vec{u}, \vec{u}_k \rangle = \alpha_k$$

وذلك لكل $k = 1, 2, \dots, n$

بالتعويض عن α_k في المعادلة (1) ، نحصل على :

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{u}, \vec{u}_n \rangle \vec{u}_n$$

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_k u_k + \alpha_n u_n \quad \text{--- (1)}$$

معادلة (1)

و.هـ.م

مثال :

اثبت ان المجموعة

$$S = \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

قاعدة متعامدة احادية للفضاء $M_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للضرب الداخلي المعرف سابقاً (الاعتيادي) ثم عبر عن المتجه $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ كتركيب خطي من متجهات القاعدة S .

الحل : علينا ان نثبت ان S قاعدة ومجموعة

لكي تكون المجموعة S قاعدة، علينا ان نثبت انها مستقلة خطياً ومولدة.

بما ان $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ وعدد العناصر في المجموعة S هو 4،

اذن يكفي ان نثبت ان S مجموعة مستقلة خطياً او مولدة

حسب مبرهنة سابقة في ر (11).

سوف نثبت ان S مجموعة مستقلة خطياً. لهذا الغرض

علينا ان نثبت ان الحل الوحيد للمعادلة :

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = 0$$

هو الحل الصفري :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5}\alpha_2 + \frac{3}{5}\alpha_3 & \alpha_1 \\ \frac{3}{5}\alpha_2 + \frac{4}{5}\alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة، نحصل على :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 4$$

لنفرض الشيء ان $\vec{v} = \left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right)\vec{u}$

فان المتجه

يكون متجها احاديا الطول وذلك لان :

$$\|\vec{v}\| = \left\|\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right)\vec{u}\right\| = \left|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\right| \|\vec{u}\| \quad \text{(خواص الطول)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\|\vec{u}\|}} \cdot \cancel{\|\vec{u}\|} = 1 \quad \left(\text{لان } \|\vec{u}\| > 0 \text{ , } \vec{u} \neq \vec{0}\right)$$

اذن يمكن دائماً ايجاد متجه احادي الطول من متجه غير صفري .

مبرهنة (٤)

اذا كانت $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ قاعدة متعامدة احادية في فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ وكان $\vec{u}$ أي متجه في V ، فان :

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{u}, \vec{u}_n \rangle \vec{u}_n$$

البرهان :

ان المجموعة S قاعدة الى V ، اذن S تكون مجموعة مولدة للفضاء V وعليه توجد اعداد قياسية وحيدة : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ، بحيث ان :

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \quad \dots (1)$$

لكل متجه $\vec{u}_k$ في S ، $(k = 1, 2, \dots, n)$ يكون :

$$\langle A_1, A_2\rangle = (0)(-\tfrac{4}{5}) + (1)(0) + (0)(\tfrac{3}{5}) + (0)(0) = 0$$

$$\langle A_1, A_3\rangle = (0)(\tfrac{3}{5}) + (1)(0) + (0)(\tfrac{4}{5}) + (0)(0) = 0$$

$$\langle A_1, A_4\rangle = (0)(0) + (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$\langle A_2, A_3\rangle = \cancel{(-\tfrac{4}{5})(\tfrac{3}{5})} + (0)(0) + \cancel{(\tfrac{3}{5})(\tfrac{4}{5})} + (0)(0) = 0$$

$$\langle A_2, A_4\rangle = (-\tfrac{4}{5})(0) + (0)(0) + (\tfrac{3}{5})(0) + (0)(1) = 0$$

$$\langle A_3, A_4\rangle = (\tfrac{3}{5})(0) + (0)(0) + (\tfrac{4}{5})(0) + (0)(1) = 0$$

اذن S مجموعة متعامدة .

ثالثاً : لكي تكون المجموعة S احادية الطول علينا ان نثبت ان :

$$\|A_1\| = \|A_2\| = \|A_3\| = \|A_4\| = 1$$

$$\|A_1\| = \sqrt{\langle A_1, A_1\rangle} = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|A_2\| = \sqrt{\langle A_2, A_2\rangle} = \sqrt{(-\tfrac{4}{5})^2 + (0)^2 + (\tfrac{3}{5})^2 + (0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|A_3\| = \sqrt{\langle A_3, A_3\rangle} = \sqrt{(\tfrac{3}{5})^2 + (0)^2 + (\tfrac{4}{5})^2 + (0)^2}$$

$$\|A_3\| = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|A_4\| = \sqrt{\langle A_4, A_4\rangle} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

اذن المجموعة S احادية الطول .

وعليه فان المجموعة S تكون قاعدة متعامدة احادية .

بما ان S قاعدة متعامدة احادية ، اذن :

$$A = \langle A, A_1\rangle A_1 + \langle A, A_2\rangle A_2 + \langle A, A_3\rangle A_3 + \langle A, A_4\rangle A_4$$

$$\langle A, A_1\rangle = (6)(0) + (-5)(1) + (1)(0) + (0)(0) = -5$$

$$\langle A, A_2\rangle = (6)\left(-\frac{4}{5}\right) + (-5)(0) + (1)\left(\frac{3}{5}\right) + (0)(0) = \frac{-21}{5}$$

$$\langle A, A_3\rangle = (6)\left(\frac{3}{5}\right) + (-5)(0) + (1)\left(\frac{4}{5}\right) + (0)(0) = \frac{2}{5}$$

$$\langle A, A_4\rangle = (6)(0) + (-5)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$$

أي ان :

$$A = -5A_1 - \frac{21}{5}A_2 + \frac{22}{5}A_3 + 0 \cdot A_4$$

مبرهنة (7)

اذا كانت $S=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ قاعدة متعامدة لفضاء اقليدي $(V, \langle\, , \rangle)$ وكان $\vec{u}$ أي متجه في V ، فان :

$$\vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{\langle \vec{u}, u_2\rangle}{\|\vec{u}_2\|^2}\right)\vec{u}_2 + \dots + \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{u}_n\rangle}{\|\vec{u}_n\|^2}\right)\vec{u}_n$$

البرهان :

بما ان S قاعدة الى V ، اذن S تكون مجموعة مولدة للفضاء V وعليه توجد اعداد قياسية وحيدة :

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ، بحيث ان :

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_n\vec{u}_n \quad \dots (1)$$

لكل متجه $\vec{u}_k$ في S ، $k=1, 2, \dots, n$ ، يكون

$$\langle \vec{u}, \vec{u}_k\rangle = \langle \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_k\vec{u}_k + \dots + \alpha_n\vec{u}_n, \vec{u}_k\rangle$$

(خواص الضرب الداخلي)

$$= \alpha_1\langle \vec{u}_1, \vec{u}_k\rangle + \alpha_2\langle \vec{u}_2, \vec{u}_k\rangle + \dots + \alpha_k\langle \vec{u}_k, \vec{u}_k\rangle + \dots + \alpha_n\langle \vec{u}_n$$

بما ان المجموعة S متعامدة ، اذن :

$\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k\rangle = 0$ ، لكل $i \neq k$

وان $\langle \vec{u}_k, \vec{u}_k\rangle = \|\vec{u}_k\|^2$ ، لكل k

اذن من المعادلة اعلاه (*) نحصل على :

$$\langle \vec{u}, \vec{u}_k \rangle = \alpha_k \|\vec{u}_k\|^2 \quad , k=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u}_k \rangle}{\|\vec{u}_k\|^2}$$

بالتعويض عن α_k في المعادلة (1) ، نحصل على :

$$\vec{u} = \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{\langle u, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2}\right)\vec{u}_2 + \dots + \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{u}_n \rangle}{\|\vec{u}_n\|^2}\right)\vec{u}_n$$

و.هـ.م

نص فقط

مبرهنة (8)

اذا كانت $S=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ مجموعة منتهية متعامدة من المتجهات غير الصفرية في فضاء اقليدي $(V, \langle , \rangle)$ ، فان S تكون مجموعة مستقلة خطياً .

البرهان :

لكي تكون المجموعة S مستقلة خطياً ، علينا ان نثبت ان الحل الوحيد للمعادلة :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

هو الحل الصفري :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$