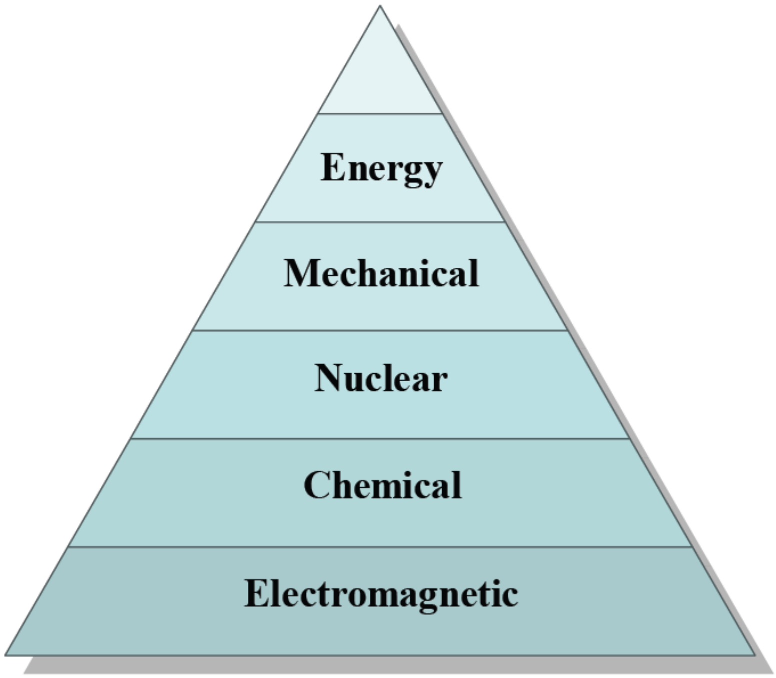
Chapter 4

Work and Energy

4.1 Work and Energy

إن مفهوم الشغل والطاقة مهم جداً في علم الفيزياء، حيث توجد الطاقة في الطبيعــة فــي صور مختلفة مثل الطاقة الميكانيكية ***Mechanical energy***، والطاقة الكهرومغناطيسية ***Electromagnetic energy***، والطاقــة الكيميائيــة ***Chemical energy***، والطاقــة الحراريــة ***Thermal energy***، والطاقــة النوويــة ***Nuclear energy***. إن الطاقــة بصورها المختلفة تتحول من شكل إلى آخر ولكن في النهاية الطاقة الكلية ثابتــة. فمــثلا الطاقة الكيميائية المختزنة في بطارية تتحول إلى طاقة كهربية لتتحول بدورها إلى طاقــة حركية. ودراسة تحولات الطاقة مهم جداً لجميع العلوم.



وفى هذا الجزء من المقرر سوف نركز على ***Mechanical energy***. وذلك لأنه يعتمد على مفاهيم القوة التي وضعها نيوتن في القوانين الثلاثة، ويجدر الــذكر هنــا أن الشــغل والطاقة كميات قياسية وبالتالي فإن التعامل معها سيكون أسهل من استخدام قوانين نيــوتن للحركة، وذلك لأننا كنا نتعامل وبشكل مباشر مع القوة وهى كمية متجهة. وحيث أننا لم نجد أية صعوبة في تطبيق قوانين نيوتن وذلك لأن مقدار القــوة المــؤثرة علــى حركــة

الأجسام ثابت، ولكن إذا ما أصبحت القوة متغيرة وبالتالي فإن العجلة ستكون متغيرة و هنا يكون التعامل مع مفهوم الشغل و الطاقة اسهل بكثير في مثل هذه الحالات.

ولكن قبل أن نتناول موضوع الطاقة فإننا سوف نوضح مفهوم الشغل الـــذي هـــو حلقـــة الوصل ما بين القوة و الطاقة.

و الشغل قد يكون ناتجاً من قوة ثابتة ***constant force*** أو من قـــوة متغيـــرة ***varying force***. وسوف ندرس كلا النوعين في هذا الفصل.

4.2 Work done by a *constant force*

اعتبر وجود جسم يتحرك إزاحة مقدارها s تحت تأثير قوة F، وهنا سوف نأخذ حالة بسيطة عندما تكون الزاوية بين متجه القوة ومتجه الإزاحة يساوي صفراً وفي الحالة الثانية عندما تكون هناك زاوية بين متجه الإزاحة ومتجه القوة وذلك للتوصل إلى القانون العام للشغل.

- **قوة منتظمة في اتجاه الحركة**

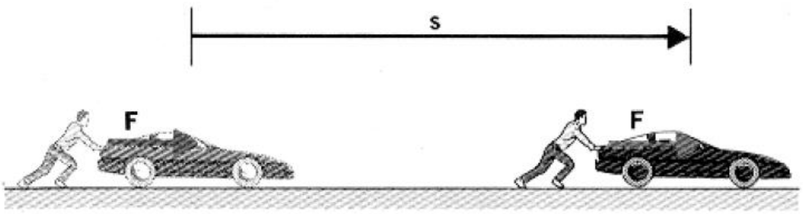


Figure 4.1

The work in this case is given by the equation

$$W = F\,s \qquad (4.1)$$

- **قوة منتظمة تعمل زاوية مقدارها θ مع اتجاه الحركة**

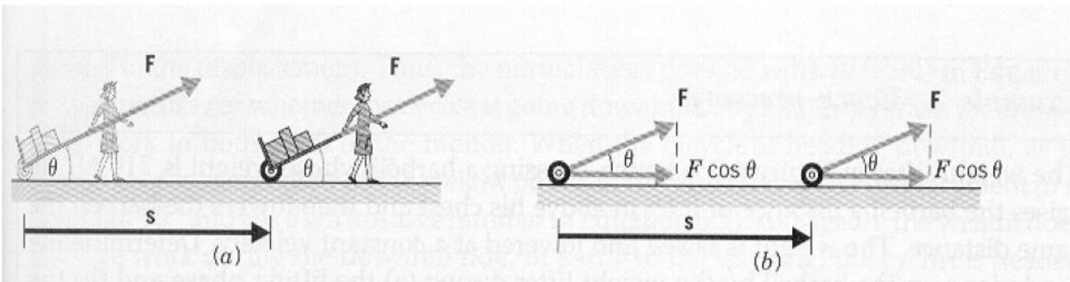


Figure 4.2

The work in this case is done by the horizontal component of the force

$$W = F\cos\theta\; s \qquad (4.2)$$

The above equation can be written in the directional form as dot product

$$W = \vec{F}\,.\,\vec{s} \qquad (4.3)$$

The unit of the work is N.m which is called Joule (J).

Example 4.1

Find the work done by a 45N force in pulling the luggage carrier shown in Figure 4.2 at an angle $\theta = 50^{o}$ for a distance s = 75m.

Solution

According to equation 4.2, the work done on the luggage carrier is

$$W = (F\cos\theta)\, s = 45 \cos 50^{o} \times 75 = 2170\text{J}$$

Work can be positive or negative

Important Notes

- *The object must undergo a displacement s.*
- *F must have a non-zero component in the direction of s.*
- *Work is zero when there is no displacement.*
- *Work is zero when the force is perpendicular to the displacement.*
- *Work is positive when F is indirection of displacement or when $0 \le \theta < 90$ as in Figure 4.3(a).*
- *Work is negative when F is in opposite direction of displacement or when $90 < \theta \le 180$ as in Figure4.3(b).*

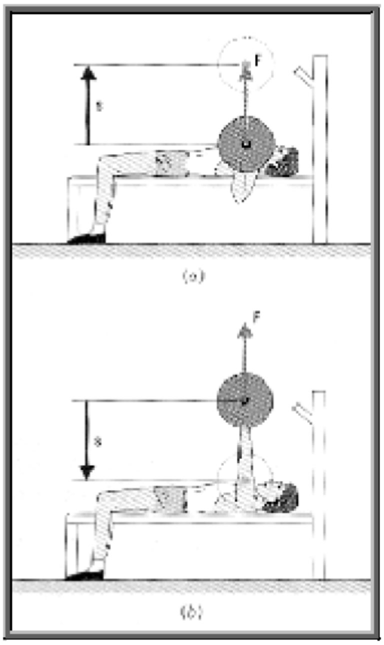


Figure 4.3

Example 4.2

The weight lifter shown in Figure 4.3 is bench-pressing a barbell whose weight is 710N. He raises the barbell a distance 0.65m above his chest and then lowers the barbell the same distance. Determine the work done on the barbell by the weight lifter during (a) the lifting phase and (b) the lowering phase.

Solution

(a) The work done by the force F during the lifting phase is

$$W = (F\cos\theta)\, s = 710 \cos 0^{\circ} \times 0.65 = 460\text{J} \quad [\textbf{\textit{Positive work}}]$$

(a) The work done by the force F during the lowering phase is

$$W = (F\cos\theta)\, s = 710 \cos 180^{\circ} \times 0.65 = -460\text{J} \; [\textbf{\textit{Negative work}}]$$

Example 4.3

A force $F = (6i - 2j)$ N acts on a particle that undergoes a displacement $s = (3i + j)$ m. Find (a) the work done by the force on the particle and (b) the angle between F and s.

Solution

(a) $W = \vec{F}\,.\,\vec{s} = (6i - 2j).(3i + j) = (6)(3) + (-2)(1) = 18 - 2 = 16\text{J}$

(b) $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 6.32\text{N}$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.16\text{m}$$

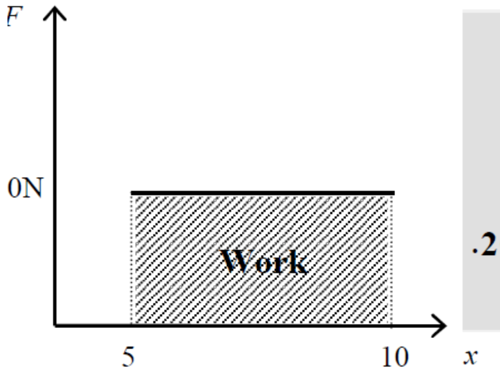
$$W = F\, s \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{W}{Fs} = \frac{16}{6.32 \times 3.16} = 0.8012$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.8012) = 36.8^{\circ}$$

4.3 Work done by a varying force

ذكرنا سابقا أن استخدام مفهوم الشغل سوف يساعدنا في التعامل مع الحركة عندما تكـــون القوة غير منتظمة، ولتوضيح ذلك دعنا نفترض أن قوة منتظمة قدرها 10N تؤثر علـــى جسم ليتحرك مسافة من x_i=5m إلى x_f=25m وبالتالي فـــإن الإزاحـــة مقـــدارها 20m، ولتمثيل ذلك بيانياً نرسم محور القوة ومحور الإزاحة كما في الشكل، وبالتالي تكون القوة هي خط مستقيم يوازي محور x.

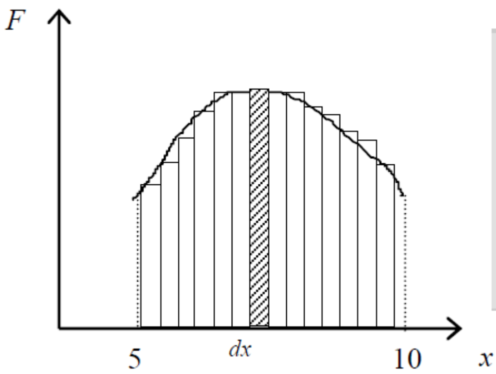


Work = F s = 10×(25-5) = 200J

وهذا عبارة عن المساحة تحت المنحنى وهي مساحة المستطيل الذي عرضه 10N وطوله 20m.

Figure 4.4

أما في حالة كون القوة متغيرة خلال الإزاحة كما هو مبين في الشكل التالي:



$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

وهذا عبارة عن المساحة تحت المنحنى أيضا.

Figure 4.5

في هذه الحالة نأخذ إزاحة صغيرة قدرها Δx حتى تكون القوة المـــؤثرة لهـــذه الإزاحـــة منتظمة و هنا يكون الشغل المبذول يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta W = F_x \Delta x \qquad (4.4)$$

وإذا قمنا بتقسيم منحنى القوة إلى أجزاء صغيرة وحسبنا الشغل المبذول خلال كل جزء وجمعناهم، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية:

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x \qquad (4.5)$$

وعند جعل الإزاحة Δx أصغر ما يمكن أي أنها تؤول إلى الصفر لكي نحصل على قيم أدق فإن المعادلة السابقة تتحول إلى

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \qquad (4.6)$$

وهذه هي الصورة العامة للشغل (لاحظ أن $F_x = F\cos\theta$).

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F.dx \qquad (4.7)$$

Example 4.4

If an applied force varies with position according to $F_x = 3x^3 - 5$, where x is in m, how much work is done by this force on an object that moves from x=4m to x=7m?

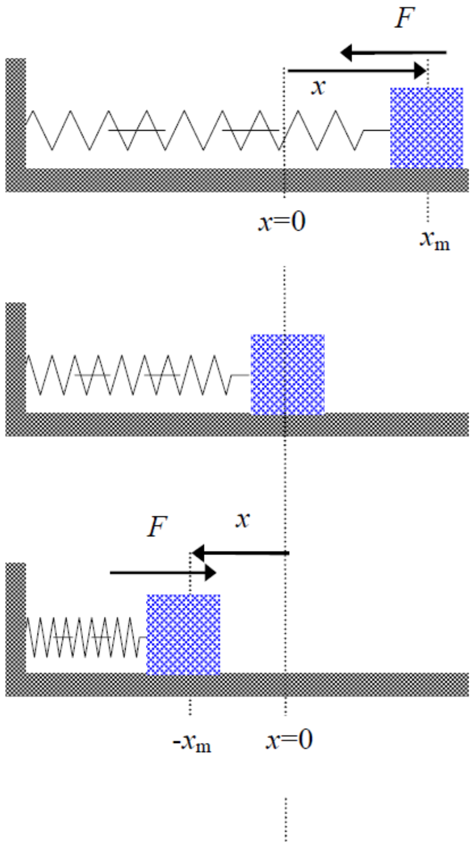
Solution

$$F = 3x^3 - 5$$

$$W = \int_{x1}^{x2} F dx \qquad \int_4^7 (3x^3 - 5)dx \qquad \left[\frac{3}{4}x^4 - 5x\right]_4^7$$

$$W = 1.59\text{kJ}$$

4.4 Work done by a spring



يعتبر الزنبرك Spring تطبيقاً عملياً على قوة متغيرة مع الإزاحة حيث أن القوة في حالة الزنبرك تعطى بالقانون التالي و هو قانون هوك Hooke's law.

$$F_s = -k\,x$$

حيث k هو ثابت الزنبرك، والإشارة السالبة تدل على أن قوة شد الزنبرك في عكس اتجاه الإزاحة x.

Work done by a spring:

$$W_s = W_{-xm\rightarrow 0} + W_{0\rightarrow xm} = \text{zero}$$

وذلك لأن الشغل المبذول لتحريك الجسم بواسطة قوة الزنبرك من x_i=-x_m إلى x_f=0 يساوى الشغل المبذول لتحريك الجسم بواسطة قوة الزنبرك من xi=0 إلى x_f=x_m ولكن بالسالب.

Work done by an external agent:

الشغل المبذول بواسطة مؤثر خارجي لتحريك الجسم المتصل بزنبرك ببطء من x_i=0 إلى x_f=x_m

$$W_{Fapp} = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Figure 4.6

الشكل السابق 4.5 يوضح مراحل إزاحة جسم مرتبط بزنبرك كمثال على القوة المتغيرة حيث أن القوة الاسترجاعية للزنبرك تتغير مع تغير الإزاحة. ولحساب الشغل المبذول بواسطة شخص يشد ببطء الزنبرك من x_i=-x_m إلى x_f=0 نعتبر أن القوة الخارجية F_{app} تساوي قوة الزنبرك F_s أي أن

$$F_{app} = -(-kx) = kx \qquad (4.8)$$

The work done by the external agent is

$$W_{F_{app}} = \int_0^{x_m} F_{app}\,dx = \int_0^{x_m} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_m{}^2 \qquad (4.9)$$

لاحظ أن الشغل المبذول بواسطة قوة خارجية تساوي سالب الشغل المبذول بواسطة قوة شد الزنبرك.

4.5 Work and kinetic energy

تعلمنا في أجزاء سابقة أن الجسم يتسارع إذا أثرت عليه قوة خارجية. فإذا فرضنا هنا أن جسم كتلته m يتعرض إلى قوة منتظمة مقدارها F في اتجاه محور x. وبتطبيق قــانون نيوتن الثاني نجد أن

$$F_x = m\,a \qquad (4.10)$$

فإذا كانت الإزاحة الكلية التي تحركها الجسم هي s فإن الشغل المبذول في هــذه الحالــة يعطى بالمعادلة

$$W = F_x\,s = (m\,a)\,s \qquad (4.11)$$

ومن معلومات سابقة عن جسم يتحرك تحت تأثير عجلة ثابتة

$$s = \frac{1}{2}(v_i + v_f)\,t \quad \& \qquad a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

وبالتعويض في معادلة الشغل نحصل على

$$W = m\left(\frac{v_f - v_i}{t}\right)\frac{1}{2}\left(v_i + v_f\right)t \qquad (4.12)$$

$$W = \frac{1}{2}\,m v_f^2 - \frac{1}{2}\,m v_i^2 \qquad (4.13)$$

The product of one half the mass and the square of the speed is defined as the ***kinetic energy*** of the particle and has a unit of J

$$K = \frac{1}{2}\,m v^2 \qquad (4.14)$$

$$W = K_f - K_i \qquad (4.15)$$

This means that the work is the change of the kinetic energy of a particle.

$$W = \Delta K \qquad (4.15)$$

لاحظ أن طاقة الحركة K دائما موجبة ولكن التغير في طاقة الحركة ΔK يمكن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفراً.

Example 4.5

A fighter-jet of mass 5×10^4kg is travelling at a speed of v_i=1.1×10^4m/s as showing in Figure 4.7. The engine exerts a constant force of 4×10^5N for a displacement of 2.5×10^6m. Determine the final speed of the jet.

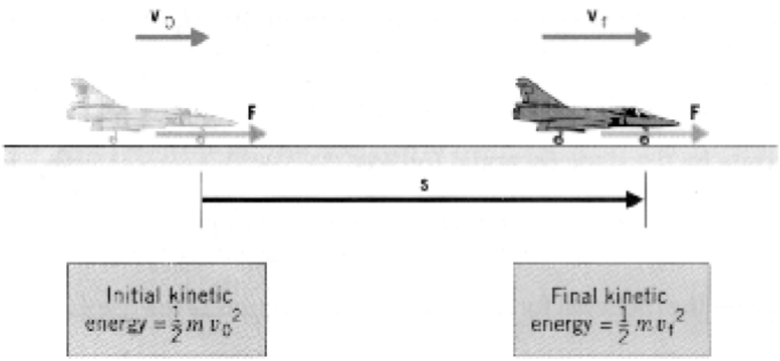


Figure 4.7

Solution

According to equation 4.7, the work done on the engine is

$$W = (F\cos\theta)\, s = 4\times10^5 \cos 0^\circ \times 2.5\times10^6 = 1\times10^{12}\text{J}$$

The work is positive, because the force and displacement are in the same direction as shown in Figure 4.7. Since $W = K_f - K_i$ the final kinetic energy of the fighter jet is

$$K_f = W + K_i$$

$$= (1\times10^{12}\text{J}) + \tfrac{1}{2}\,(5\times10^4\text{kg})\,(1\times10^4\text{m/s})^2 = 4.031\times10^{12}\text{J}$$

The final kinetic energy is $K_f = \frac{1}{2}\, m v_f^2$, so the final speed is

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(4.03\times10^{12})}{5\times10^4}} = 1.27\times10^4 \text{ m/s}$$

حيث أن المحرك يبذل شغلاً موجباً لذا كانت السرعة النهائية أكبر من السرعة الابتدائية.

4.6 Power

The power *is defined as the time rate of energy transfer.* If an external force is applied to an object, and if the work done by this force is ΔW it the time interval Δt, then the average power is:

$$P_{\text{ave}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (4.16)$$

The instantaneous power is given by

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (4.17)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F.\frac{ds}{dt} \qquad (4.18)$$

$$\therefore P = F.v \qquad (4.19)$$

The unit of the power is J/s which is called watt (W).

Example 4.6

A 65-kg athlete runs a distance of 600 m up a mountain inclined at 20° to the horizontal. He performs this feat in 80s. Assuming that air resistance is negligible, (a) how much work does he perform and (b) what is his power output during the run?

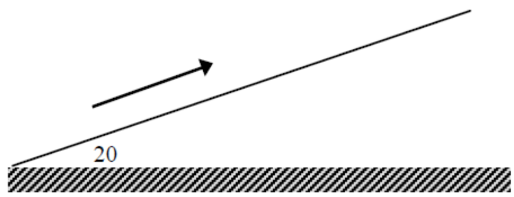


Figure 4.8

Solution

Assuming the athlete runs at constant speed, we have

$$W_A + W_g = 0$$

where W_A is the work done by the athlete and W_g is the work done by gravity. In this case,

$$W_g = -mgs(\sin\theta)$$

So

$$W_A = -W_g \;= +\,mgs(\sin\theta)$$

$$= (65\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)(600\text{m})\,\sin 20^\circ$$

(b) His power output is given by

$$P_A = \frac{W_A}{\Delta t} = \frac{1.31\times 10^5\,J}{80\,s} = 1.63\text{kW}$$

Example 4.7

A 4-kg particle moves along the x-axis. Its position varies with time according to $x = t + 2t^3$, where x is in m and t is in s. Find (a) the kinetic energy at any time t, (b) the acceleration of the particle and the force acting on it at time t, (c) the power being delivered to the particle at time t, and (d) the work done on the particle in the interval $t = 0$ to $t = 2$ s.

Solution

Given $m = 4$ kg and $x = t + 2t^3$, we find

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t + 2t^3) = 1 + 6t^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,(4)(1 + 6t^2)^2 = \;(2 + 24t^2 + 72t^4)\text{ J}$$

(b) $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + 6t^2) = 12t \text{ m/s}^2$

$F = m\,a = 4(12t) = 48t \text{ N}$

(c) $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 24t^2 + 72t^4) = (48t + 288t^3)\text{W}$

[or use $P = Fv = 48t\,(1 + 6t^2)$]

(d) $W = K_f - K_i$ where $t_i = 0$ and $t_f = 2\text{s}$.

At $t_i = 0$,

$K_i = 2\text{J}$

At $t_f = 2$ s,

$K_f = [2 + 24(2)^2 + 72(2)^4] = 1250 \text{ J}$

Therefore,

W = 1.25 × 103 J