وبعد اجراء بعض التبسيطات كما في مسألة الشبيكة أحادية الذرة على المعادلتين أعلاه نحصل على،

$$(2\alpha - m\omega^2)A - (2\alpha cos\ ka)B = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \qquad \text{(H.W)}$$

$$(-2\alpha cos\ ka)A + (2\alpha - M\omega^2)B = 0 \ \ldots\ldots(2) \qquad \text{(H.W)}$$

وباستخدام طريقة المصفوفات في حل المعادلتين الانيتين أعلاه نجد ان،

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha\cos ka \\ -2\alpha\ cos\ ka & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = 0$$

وبما ان A,B يمثلان سعة الاهتزاز للذرتين m و M لذا فانهما لا يساويان صفراً، اذن المحدد هو الذي يجب ان يساوي صفراً.

$$\begin{vmatrix} 2\alpha - m\omega^2 & -2\alpha\ cos\ ka \\ -2\alpha\ cos\ ka & 2\alpha - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2\alpha - m\omega^2)(2\alpha - M\omega^2) - (2\alpha\ cos\ ka)^2 = 0$$

$$mM\omega^4 - 2\alpha(m+M)\omega^2 + 4\alpha^2(1-\cos^2 ka) = 0$$

$$\omega^4 - 2\alpha(\frac{1}{m} + \frac{1}{M})\omega^2 + \frac{4\alpha^2 sin^2(ka)}{mM} = 0$$

المعادلة اعلاه عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية في ω^2 وتحل بالدستور فيعطي:

$$\boldsymbol{\omega^2 = \alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm \alpha\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4\ sin^2 ka}{mM}}}$$

وهذه هي علاقة التفريق في الشبيكة ذات نوعين مختلفين من الذرات في بعد واحد.

الحالة الأولى: عندما $k = \frac{n\pi}{2a}$ حيث n=0,2,4,.... (اعداد زوجية) فان المعادلة تصبح:

$$\omega^2 = \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

١–عندما نأخذ الإشارة السالبة فان $\omega^2 = 0$

$$\boldsymbol{\omega_1^- = 0}$$

٢–عندما نأخذ الإشارة الموجبة فان $\omega^2 = 2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$

$$\boldsymbol{\omega_2^+ = \sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}}$$

الحالة الثانية: عندما $k = \frac{n\pi}{2a}$ حيث n=1,3,5,.... (اعداد فردية):

$$\omega^2 = \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) \pm \alpha\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM}}$$

او

$$\omega^2 = \alpha\left(\frac{M+m}{mM}\right) \pm \alpha\left(\frac{M-m}{mM}\right)$$

١–عند اخذ الإشارة السالبة $\omega^2 = \alpha\left(\frac{M+m}{mM}\right) - \alpha\left(\frac{M-m}{mM}\right)$

$$\boldsymbol{\omega_3^- = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}}}$$

٢–عند اخذ الإشارة الموجبة $\omega^2 = \alpha\left(\frac{M+m}{mM}\right) + \alpha\left(\frac{M-m}{mM}\right)$

$$\boldsymbol{\omega_4^+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}}$$

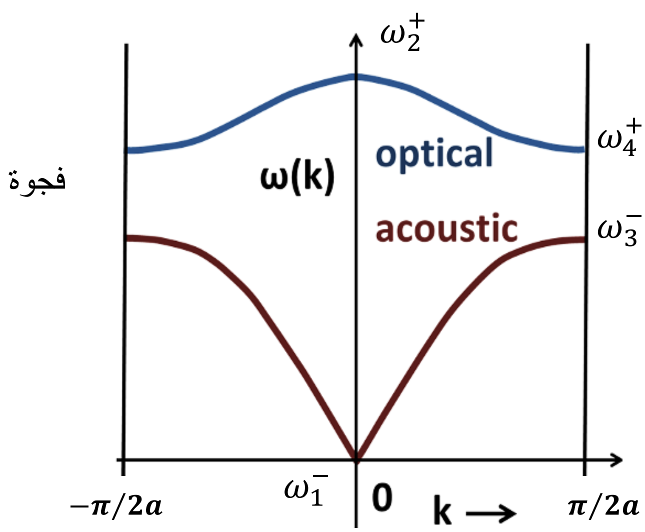
وهكذا فان حلول معادلة التفريق هي أربعة :

$$\omega_1^- = 0, \quad \omega_2^+ = \sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}, \qquad \omega_3^- = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}}, \qquad \omega_4^+ = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$$

ان الترددات المسموحة للانتشار تنقسم الى فرعين:

١–حلول الإشارة السالبة (ω_1^-, ω_3^-) يسمى الفرع السمعي Acoustical branch (المنحنى الأسفل في الشكل ادناه).

٢–حلول الإشارة الموجبة ω_2^+, ω_4^+ يسمى الفرع البصري Optical branch. (المنحني الأعلى في الشكل ادناه).



ملاحظات:

١ – يسمى الفرع الصوتي بهذا الاسم لان قيم ω تقع ضمن الترددات الواطئة، وان سبب تسمية المنحني الأعلى بالبصري لان ترددات هذا الفرع تقع في منطقة الاشعة تحت الحمراء أي بحدود 10^{13} هيرتز.

٢ – تغير ω مع k تغير ملحوظ في الفرع السمعي اما في الفرع البصري فتغيره بسيط ويكاد ان يكون ω ثابت بالنسبة الى k.

٣ – مدى التردد بين اعلى قمة للفرع السمعي واوطأ نقطة في الفرع البصري هي منطقة الترددات الممنوعة وتسمى الفجوة الممنوعة forbidden gap ويعتمد عرض هذه المنطقة على كتلتي الذرتين.

٤ – ان حدود منطقة بريليون الأولى هي $\frac{-\pi}{2a} \le k \le \frac{\pi}{2a}$.

مقارنة بين الفرع السمعي والفرع البصري

عندما $k \to 0$ في الفرع السمعي فان $\omega \to 0$ وبتعويضهما في المعادلة (1) ينتج:

$$(2\alpha - m\omega^2)A - 2\alpha B\cos ka = 0$$

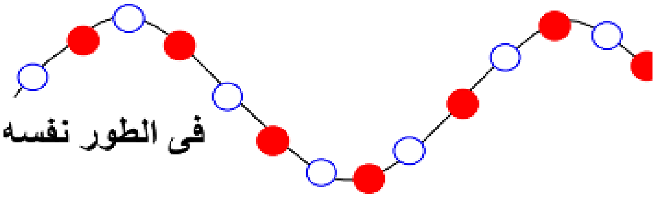
$$2\alpha A - 2\alpha B = 0$$

$$A = B$$

وهذا يعني: ان الذرتين في الفرع الصوتي تمتلكان سعة تذبذب متساوية وكذلك لهما نفس الطور، اي ان الشبيكة تتحرك كجسم هلامي.

وهذا مشابه جدا للموجات الطوليّة

(موجات الصوت)، لذلك سمي بالفرع الصوتي.



$$|k| \ll \frac{\pi}{2a} \approx \frac{1}{a} \qquad and \qquad \omega = \sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)} \;\Rightarrow\; v_{ph} = a\sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}$$

و بزيادة قيمة k عند حافة منطقة بريليون الأولى $k = \pm\frac{\pi}{2a}$ تكون قيمة ω في الفرع السمعي مساوية الى $\sqrt{\frac{2\alpha}{M}}$ حيث $A = B$ ولكنهما يتحركان بنفس الطور.

$$|k| \to \frac{\pi}{2a} \qquad and \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{M}} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v_{ph}} = \frac{\boldsymbol{2a}}{\boldsymbol{\pi}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{M}}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{8\,\alpha\,a^2}}{\boldsymbol{\pi^2\,M}}}$$

في الفرع البصري عندما $k = 0$ فان $\omega = \sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}$ وبالتعويض في المعادلة(2) :

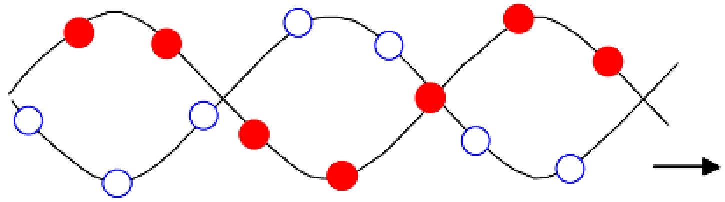
$$-2\alpha A\cos ka + (2\alpha - M\omega^2)B = 0$$

$$-2\alpha A + 2\alpha\left(1 - \left(1 + \frac{M}{m}\right)\right)B = 0$$

$$A = -\frac{M}{m}B \qquad or \qquad \frac{A}{B} = -\frac{M}{m}$$

وهذه النتيجة تعني ان التذبذب البصري يحدث بشكل بحيث يكون مركز كتلة الخلية (الحاوية على الذرتين) يبقى ثابتاً بينما تتحرك الذرات بفارق طور مقداره π ، $v_{ph} = 0$.

وعندما تزداد k نجد ان اهتزاز الذرات يتناقص ولكن ليس بشكل كبير وان الذرات تستمر بالاهتزاز بفارق طور π.



نمط ضوئي

في الفرعين البصري و السمعي تكون سرعة المجموعة $v_g = 0$.

==

تمارين:

١-برهن على ان معادلة الحركة لسلسلة ذرية خطية احادية، عند منتصف طيف الموجات الطويلة، يمكن ان تختزل الى معادلة انتشار موجة في وسط مرن مستمر.

٢-سلسلة رية خطية احادية الذرات ذات مسافة بينية $a=3x10^{-10}\ m$ ، فاذا كانت سرعة الصوت تساوي $300 m/sec$ ، احسب تردد القطع ω_m .

٣-احسب قيمة ثابت القوة لبلورة كلوريد الصوديوم، اذا علمت ان ثابت الشبيكة $2.82x10^{-10}m$ وكتلة الصوديوم $3.8x10^{-23}gm$ وكتلة الكلور $5.9x10^{-23}gm$ وسرعة الطور لهما تساوي $3.4x10^{-3}m/sec$.