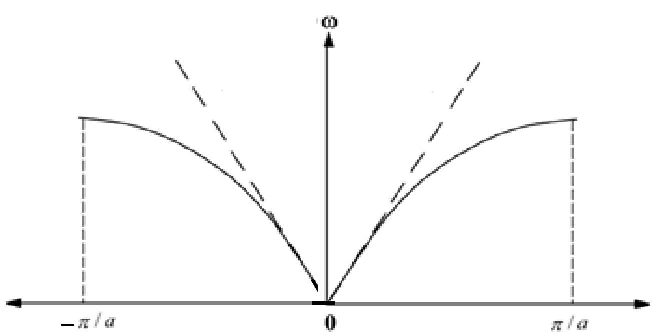
$$\frac{\omega_m^2 a^2}{4} = \frac{Y}{\frac{m}{a^3}} = \frac{Ya^3}{\frac{4\alpha}{\omega_m^2}}$$

$$\frac{\cancel{\omega_m^2}\cancel{a^2}}{\cancel{4}} = Y\overset{1}{\cancel{a^3}}\frac{\cancel{\omega_m^2}}{4\alpha} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = aY}$$

العلاقة $\boldsymbol{\alpha = aY}$ مفيدة لتعيين قيمة $\alpha$ عند التعويض بقيم فعلية لثابت الشبيكة ومعامل يونك للمرونة لنوع محدد من الذرات (لشبيكة محددة)

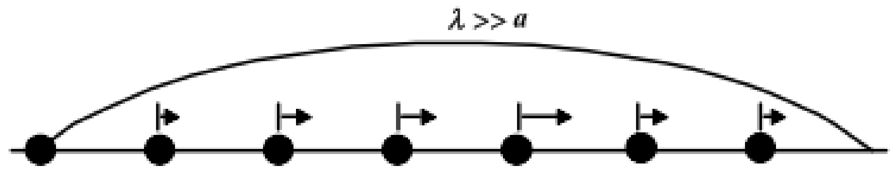
٥- عند ازدياد قيمة $k$ فان منحني التفريق يميل عن الخط المستقيم وينحني نحو الأسفل بينما يصل الى القيمة العظمى عند $k = \frac{\pi}{a}$ حيث يكون التردد اعلى ما يمكن $\omega_m = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ وهو يعتمد على ثابت القوة بين الذرات $\alpha$ وكتلة الذرة المهتزة كأي نظام يتذبذب تذبذبا توافقيا بسيطا، ويمكن إيجاد القيمة القصوى للتردد اذا علمنا قيمة ثابت القوة للذرات وكتلة الذرة ، مثال ذلك ذرة الهيدروجين فيها $(\alpha = 5 \times 10^3\ dyne/cm)$ و $(m = 2 \times 10^{-24} g)$ فنحصل على: $\omega_m = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 10^{14}\ s^{-1}$ والتي تقع في حدود منطقة الترددات تحت الحمراء.



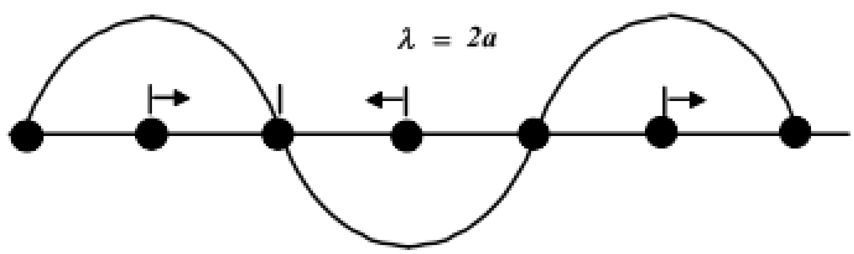

٦-يمكن فهم سلوك منحني التفريق ضمن مدى قيم $k$ المحصورة $0 < k < \frac{\pi}{a}$ من خلال ما يلي:

عندما يكون العدد الموجي $k$ صغير فان الطول الموجي يكون كبير $\lambda \gg a$ وفي هذه الحالة تتحرك الذرات باتجاه واحد وبنفس الطور مما يؤدي الى تقليل القوة المعيدة التي تؤثر على كل ذرة بسبب ذرات الجوار.

وعندما $(k \to 0)$ فان الطول الموجي $(\lambda \to \infty)$ وهذا يعني ان الشبيكة البلورية تتحرك كلها كجسم واحد وتكون القوة المعيدة الخطية متلاشية وهذا يفسر كون $\omega = 0$ عندما $k = 0$.

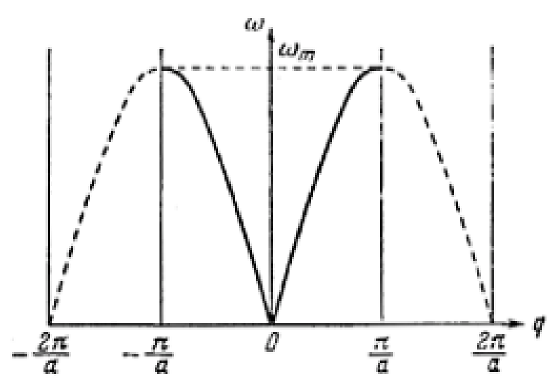



اما عندما $\left(k = \frac{\pi}{a}\right)$ فان $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2a$ ففي هذه الحالة تتحرك الذرات المتجاورة بحيث تكون القوة المعيدة والتردد اعلى ما يمكن.




٧- حدود منطقة بريليون الأولى: علاقة التفريق تتوفر فيها اغلب المعلومات اذا ما درست في منطقة بريليون الأولى $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ حيث ان بقية المناطق $-\frac{\pi}{a} > k > \frac{\pi}{a}$ تكون مكررة .

فعند حدود $k_{max} = \pm\frac{\pi}{a}$ تهتز الذرات المتناوبة باطوار مختلفة بحيث لا تنتقل الموجة الى اليسار ولا الى اليمين، في هذه الحالة تسمى هذه الموجة موجة واقفة *standing wave* وتكون مكافئة لانعكاس براغ للاشعة السينية، فعندما يتحقق شرط براغ لا يمكن للموجة المنتقلة ان تنتشر في الشبيكة وبذلك تكون موجة واقفة.




**س/ اثبت ان $k = \pm\frac{\pi}{a}$ تحقق شرط براغ $2d\ sin\theta = n\lambda$ .**

## سرعة الطور وسرعة مجموعة الأمواج:

هناك ثلاث سرع في الحركة الموجية متميزة عن بعضها ولكن ترتبط بعلاقات رياضية فيما بينها.

١-سرعة الذرة *atom velocity*: وهي السرعة التوافقية للذرة حول موقع اتزانها، وهي صغيرة المقدار، واعلى قيمة لها تحدث لحظة مرور الذرة بموقع الاتزان بينما تساوي صفراً عندما تكون في اقصى إزاحة عن موقع الاتزان.

٢-سرعة الطور *phase velocity*: وهي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحد وهي تمثل سرعة انتشار موجة نقية ذات تردد $\omega$ ومتجه موجة $k$ ويعبر عنها رياضيا:

$$\boldsymbol{v_{ph} = \frac{\omega}{k}}$$

٣-سرعة المجموعة *group velocity* : في حالة التعامل مع مجموعة من الموجات ذات الاطوال الموجية المختلفة التي تتحرك انيا في وسط ما فانه ينبغي التعامل مع السلوك الجماعي لجميع الموجات في ان واحد وعدم التعامل مع كل موجة على انفراد. وتمثل سرعة المجموعة سرعة النبضة *pulse* والتي متوسط ترددها $\omega$ وبمتجه موجي $\vec{k}$ وبما ان الطاقة (الزخم) تنتقل عمليا بواسطة النبضات وليس الموجات النقية لذا فان سرعة المجموعة هي الأكثر أهمية فيزيائياً وتعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

علاقة التفريق كما بينا سابقا هي:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

اذن

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k} = \frac{2\mathrm{v}_s sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{ka}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right) = v_s cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

عند الاطوال الموجية الطويلة $(k \rightarrow 0)$ فان $\sin\frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2}$ وبذلك:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{v_s k}{k} = v_s$$

و $$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_s k) = v_s$$

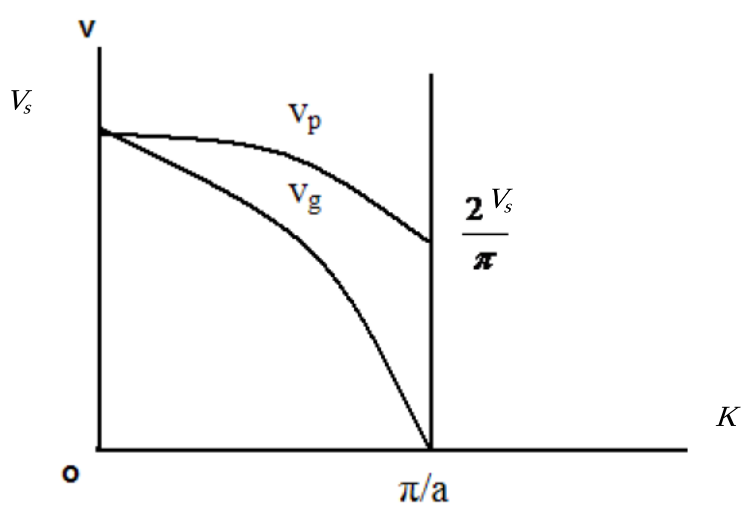
اذن $$v_{ph} = v_g = v_s$$

اما عندما $k = \pm\frac{\pi}{a}$ فان

$$v_{ph} = \frac{2\mathrm{v}_s sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{ka} = \frac{2\mathrm{v}_s}{\pi}$$

$$v_g = v_s cos\left(\frac{ka}{2}\right) = 0$$

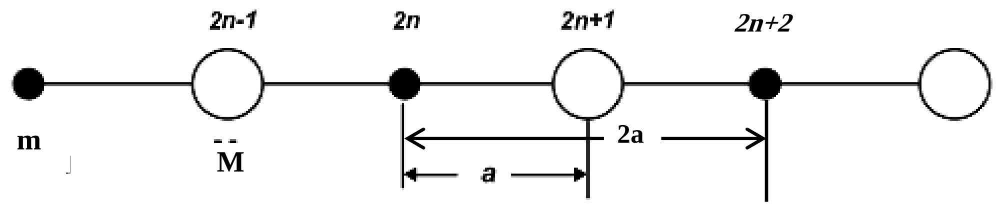
هذه النتيجة تعني عدم انتقال الطاقة، لان انتقال الطاقة في الوسط يعتمد على $v_g$. وهذا مكافىء لانعكاس براغ.




العلاقة بين سرعة الطور وسرعة المجموعة والعدد الموجي

## اهتزاز الشبيكة ثنائية الذرة في بعد واحد

في هذه الفقرة سندرس اهتزاز شبيكة ثنائية الذرة في بعد واحد، حيث تحتوي وحدة الخلية على نوعين من الذرات كتلتيهما m و M حيث ان $M > m$ والمسافة بينهما a. مثال على ذلك بلورة كلوريد الصوديوم.




نلاحظ ان ترقيم الذرات يبدأ بـ 2n وليس n ، وذلك لتمييز ذرات النوع الاول m عن ذرات النوع الثاني M، بحيث ان جميع الذرات التي كتلتها m تأخذ الاعداد الزوجية والتي كتلتها M تأخذ الاعداد الفردية.

يمكن معالجة حركية الشبيكة بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في الشبيكة أحادية الذرة . وبما انه توجد ذرتين مختلفتين فإنه يكون لدينا معادلتين للحركة على الصورة الآتية:

عندما تكون الذرة m عند 2n هي المرجع، فأن:

$$m\frac{d^2U_{2n}}{dt^2} = \alpha(U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n}) \qquad \text{(H.W)}$$

و عندما تكون الذرة M عند 2n+1 هي المرجع، فأن:

$$M\frac{d^2U_{2n+1}}{dt^2} = \alpha(U_{2n+2} + U_{2n} - 2U_{2n+1}) \qquad \text{(H.W)}$$

نفرض ان حل المعادلتين اعلاه يأخذ الصيغ الاتية:

$$U_{2n} = Ae^{i(2nka-\omega t)}$$

$$U_{2n+1} = Be^{i((2n+1)ka-\omega t)}$$

واذا عوضنا هذه الحلول في معادلتي الحركة نحصل على،

$$-m\omega^2 U_{2n} = \alpha(U_{2n+1} + U_{2n-1} - 2U_{2n})$$

$$-M\omega^2 U_{2n+1} = \alpha(U_{2n+2} + U_{2n} - 2U_{2n+1})$$