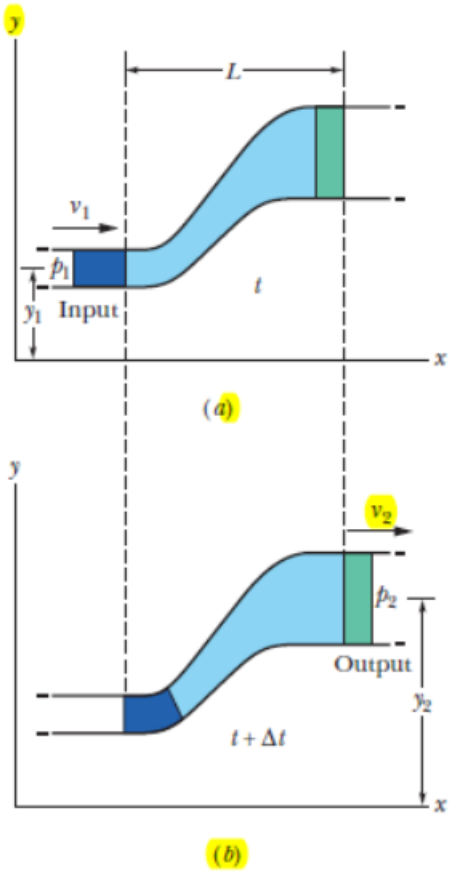
1- معادلة برنولي *Bernoulli's Equation*:



توضيح للطلبة..الشكل يوضح تدفق المائع بمعدل ثابت خلال انبوب طوله L من فتحة الدخول باتجاه اليسار نحو فتحة الخروج الى اليمين . من الوقت t(كما في الشكل a الى وقت t+dt في b, كمية المائع الداخلة للانبوب تساوي كمية المائع الخارجة

افرض ان y1 ، v1 و p1 هي موقع و سرعة و ضغط المائع الداخل للانبوب من اليسار ، بالمثل فان y2 ، v2 و p2 هي معاملات المائع الخارج من الانبوب من جهة اليمين.

الان بتطبيق قانون حفظ الطاقة على المائع ، نحصل على العلاقة التالية:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \quad \text{.....(1)}$$

و ممكن اعادة كتابة معادلة 1 كمايلي:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = Constant \quad \text{.....(2)}$$

- المعادلة(2) اعلاه تسمى معادلة برنولي Bernoulli's Equation و هي نتيجة لقانون حفظ الطاقة Energy conservation و التي تطبق على المائع المثالي (Ideal Fluid).
- الحد الثاني من المعادلة اعلاه يسمى كثافة الطاقة الحركية للمائع (kinetic energy density) معدل الطاقة الحركية لوحدة الحجم.
- اما الحد الثالث من المعادلة اعلاه يسمى كثافة الطاقة الكامنة للمائع (Gravetational potential energy density) , والتي تتولد بسبب الجاذبية الارضية.

- ملاحظة : نستنتج من معادلة برنولي الاتي :

((عندما يتحرك المائع خلال الانبوب الذي يتغير مقطعه العرضي وكذلك ارتفاعه فأن الضغط سوف يتغير على طول الانبوب))

2- اشتقاق معادلة برنولي *Bernoulli's Equation*:

لاشتقاق معادلة برونولي سوف نفرض ان المائع غير قابل للانضغاط (incompressible) ، غير لزج nonviscous و ينساب بشكل خالي من الدوامات nonturbulent و بحالة مستقرة، حسب قانون حفظ الطاقة من صيغة فان الشغل المنجز على النظام= التغير بالطاقة الحركية:

$$W = \Delta K \qquad (1)$$

المعادلة اعلاه توضح التغير في الطاقة الحركية للنظام ، و الذي يجب ان يساوي الشغل المنجز على النظام، التغير بالطاقة الحركية للنظام ينشىء من التغير في سرعة المائع بين نهايتي الانبوب (النهاية التي يدخل بها المائع للانبوب و التي يخرج منها المائع) و يعبر عنها كمايلي:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \qquad (2)$$

حيث ان $\Delta m (= \rho \Delta V)$ تمثل كتلة المائع التي تدخل من مدخل الانبوب و التي تخرج من النهاية الاخرى خلال فاصلة زمنية صغير مقدارها Δt.

الشغل المنجز على النظام ينشئ من مصدرين ، الاول: الشغل المنجز بواسطة قوة الجاذبية $(\Delta m\vec{g})$ على كتلة المائع خلال الارتفاع العمودي من منفذ الدخول الى منفذ الخروج للانبوب و يعرف بالطاقة الكامنة بالمعادلة التالية:

$$W_g = -\Delta m g (y_2 - y_1)$$
$$= -\rho g \Delta V (y_2 - y_1) \qquad (3)$$

<u>الاشارة السالبة</u> في المعادلة اعلاه تشير الى ان الازاحة التي ينتقلها العنصر الحجمي من المائع نحو الاعلى معاكسة لاتجاه قوة الجاذبية الارضية و التي تكون نحو الاسفل. ، و المصدر الثاني للشغل هو الشغل المنجز بواسطة قوة تؤثر على مائع محجوز في انبوب مساحته A لدفع push المائع مسافة Δx من نهاية الدخول (input end) للمائع باتجاه النهاية الاخرى (output end) يعطى كما يلي:

$$F\Delta x = (pA)(\Delta x) = p(A\Delta x) = p\,\Delta V$$

الشغل المنجز على النظام يعرف $p_1\,\Delta V$ و الشغل المنجز بواسطة النظام $-p_2\,\Delta V$ و مجموعهما هو

$$W_p = -p_2\,\Delta V + p_1\,\Delta V$$
$$= -(p_2 - p_1)\,\Delta V \qquad (3)$$

جزء من الشغل سوف يذهب الى تغيير في الطاقة الحركية و الجزء الاخر يذهب الى تغيير الطاقة الكامنة لنظام الموائع و الارض.

الان نظرية الشغل و الطاقة الحركية تصبح

$$W = W_g + W_p = \Delta K \qquad (4)$$

الان ممكن اعادة كتابة المعادلة (1) باستخدام معادلات 2-4 بالشكل التالي:

$$-\rho g \Delta V(y_2 - y_1) - (p_2 - p_1)\,\Delta V = \frac{1}{2}\rho \Delta V(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5)$$

بالقسمة على ΔV و اعادة ترتيب المعادلة اعلاه ، نحصل على معادلة برنولي

$$-\rho g(y_2 - y_1) - (p_2 - p_1) = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5)$$

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2} \quad \text{.....(6)}$$

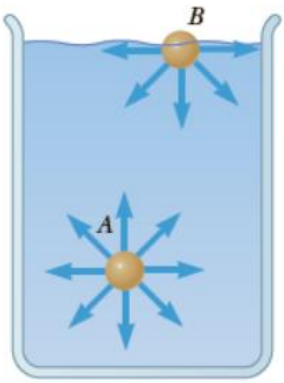
$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = Constant \quad \text{.....} \quad \text{...(7)}$$

معادلة برونولي يعبر عنها نصيا : مجموع الضغط P، و الطاقة الحركية لوحدة الحجم $\frac{1}{2}\rho v^2$ و الطاقة الكامنة لوحدة الحجم $\rho g y$ لها القيمة نفسها في كل النقاط على طول التدفق المنساب Stream line .

امثلة:

3- الشد السطي و الخاصية الشعرية *Surface Tension and Capillary* :

ان قطرات الماء (الندى) تتخذ شكل كروي عند ملاحظتها في الصباح الباكر والقطرات تتخذ هذا الشكل بسبب خاصية سطح السائل التي تدعى الشد السطحي (Surface Tension) . لغرض فهم مبدأ هذه الخاصية نفرض ان جزيئة عند النقطة A في حاوية ماء وايضا قريبة من جزيئات الماء الاخرى التي تبذل عليها قوة ترابط ، محصلة القوة عليها هي صفر بسبب انها محاطة من جميع الجهات بجزيئات الماء التي تبذل عليها قوة تجاذب متساوية بجميع الجهات و كما موضح بالشكل المدرج ادناه.



من جانب اخر ، فان الجزئية عند الموقع B لاتنجذب بصورة متساوية من قبل جزيئات الماء لانها لاتحاط بجزيئات الماء من الاعلى و بالتالي تسحب نحو داخل السائل. الانخفاض في سطح السائل ينتهي عندما قوة السحب المبذولة على سطح الجزيئات تتعادل مع قوة التنافر الخارجة نتيجة التصادمات مع الجزيئات في داخل السائل.

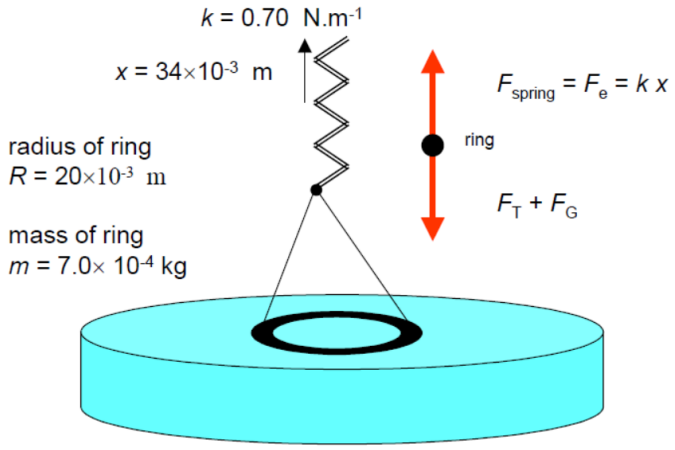
((*اذن شبكة القوى التي تسحب جزيئات سطح السائل تعمل على تقليص سطح السائل وبالنتيجة تعمل على تصغير المساحة السطحية للسائل اصغر مايمكن*)) وهذا يفسر ان قطرات الماء تتخذ الشكل الكروي الذي ينتج اصغر مساحة السطية لحجم محدد من السائل.

مثال اخر : اذا وضعت ابرة خياطة بحذر على سطح الماء فانك تلاحظ ان الابرة (needle) سوف يطفو رغم ان كثافته اعلى من كثافة الماء بثمانية مرات. سطح الماء هنا يعمل كغشاء مرن تحت الشد. الابرة تعمل انخفاض في سطح السائل و بالتالي تسبب زيادة في المساحة السطحية للسائل ، القوة الجزيئية تعمل على جميع النقاط على طول الانخفاض تحاول استرجاع سطح السائل الى وضعه الافقي الاصلي (قبل وضع الابرة عليه) . المركبة العمودية لهذه القوى توازن قوة الجاذبية المؤثرة على الابرة (needle) . الابرة الطافية على السطح ممكن ان تغطس بالماء بعد وضع قليل من غسول اليدين الذي يقلل من الشد السطحي للماء.

الشد السطحي γ ممكن تعريفة على انه قيمة قوة الشد مقسومة على طول تأثير القوة L و كما يلي:

$$\gamma = F/L \qquad \text{(N/m)}$$

مثال: سلك رقيق دائري قطره **40 mm** و الكتلة الكلية **0.7 g** دفع بعناية عمودياً على سطح الماء بواسطة نابض حساس ($k=0.7\ N.m^{-1}$). عندما النابض تمدد لـ**34 mm** من موقع الاتزان في الهواء ، عندما الحلقة على وشك ان تسحب من سطح الماء ، احسب معامل الشد السطحي . اهمل كتلة الماء التي علقت بالنابض.



spring restoring force = $F_e = k\ x$

weight of ring = $F_G = m\ g$

surface tension force = $F_T = \gamma\ L$

Coefficient of surface tension = γ = ? $N.m^{-}$

The length of contact L, with the water surface is **twice** the circumference of the ring since there is water on both sides of the ring.

$L = 2(2\pi R) = 4\pi R$

Equilibrium

$F_e = F_T + F_G$

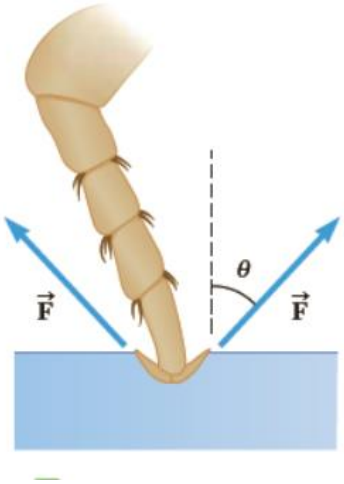
$k\ x = 4\pi R\ \gamma + m\ g$

$\gamma = (k\ x - m\ g) / (4\pi R)$

$\gamma = \{(0.70)(34\times10^{-3}) - (7.0\times10^{-4})(9.8)\} / \{(4\pi)(20\times10^{-3})\}\ N.m^{-1}$

$\gamma = 0.076\ N.m^{-1}$

مثال:(واجب): عندما الحشرة تتخطى على سطح الماء بواسطة اقدامها الستة فان انخفاض بسطح الماء ينشئ حول كل قدم ، افرض ان قدمها دائرية الشكل ، و كما بالشكل المجاور ، احسب الزاوية θ اذا علمت ان كتلة الحشرة 2.0×10^{-5} kg و نصف قطر كل قدم 1.5×10^{-4} m .



الجواب: 62^o