(10)

① عند الطرف الأول $X=0 \Leftarrow \bar{P}=0 \Leftarrow \frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ لكل قيم t

② عند الطرف الثاني $X=L \Leftarrow \bar{P}=0 \Leftarrow \frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ لكل قيم t

نفاضل المعادلة ① ونطبق عليها الشرط الحدودي الأول نحصل على:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-ak\cos(wt-kx)+bk\cos(wt+kx)$$

$$=-ak\cos wt+bk\cos wt=0$$

$$(-a+b)k\cos wt=0$$

$$\because k\cos wt\neq 0$$

$$\therefore -a+b=0 \qquad \boxed{a=b}$$

a و b لها نفس الإشارة (موجبة) أي لها نفس الطور

نعوض في معادلة ③

$$\eta=a\sin(wt-kx)+a\sin(wt+kx)$$

$$\eta=(2a\sin wt)\cos kx \quad --- ④$$

أن المقدار $(2a\sin wt)$ يمثل سعة الموجة الواقفة وأنها تتغير جيبياً مع الزمن t وأن أقصى قيمة لها تساوي $2a$ وتحدث عندما:

$$wt=(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{(عند البطون)} \quad (n=1,2,3\ldots)$$

وأن أدنى قيمة لسعة الموجة الواقفة تساوي صفر وتحدث عندما

$$wt=m\pi \quad \text{(عند العقد)}$$

m: عدد صحيح

يمكن كتابة المعادلة ④ كما يلي:

$$\eta=(2a\cos kx)\sin wt$$

أن المقدار $(2a\cos kx)$ يمثل سعة الموجة الواقفة وأنها تتغير بشكل جيب تمام مع الموقع X وأن أقصى قيمة لها تساوي $2a$ وتحدث عند البطون وفي المواقع

$$kx=n'\pi \Rightarrow X=n'\frac{\pi}{k}=n'\frac{\pi}{2\pi/\lambda}=\frac{n'}{2}\lambda$$

$$\boxed{X=\frac{n'}{2}\lambda} \ (*) \quad \text{البطون} \quad (n'=0,1,2,3\ldots$$

(2)

$$X = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \ldots$$

وان ادنى قيمة لسعة الموجة الواقفة تساوي صفر وتحدث عند العقد في المواقع

$$Kx = (2m' - 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2m' - 1)\frac{\pi}{2k} = (2m' - 1)\frac{\pi}{4\pi/\lambda}$$

$$\boxed{X = (2m' - 1)\frac{\lambda}{4}} \quad (**) \text{ العقد} \qquad m' = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$X = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \frac{7}{4}\lambda, \ldots$$

نلاحظ من المعادلتين (*) و (**) ان المسافة بين اي بطنين متتاليين او بين اي عقدتين متتاليتين تساوي نصف الطول الموجي $(\frac{1}{2}\lambda)$. وان المسافة الفاصلة بين عقدة وبطن متتاليين تساوي ربع طول الموجة $(\frac{1}{4}\lambda)$.

من المعادلة (4)

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2ak\sin wt \sin kx$$

نطبق الشرط الحدودي الثاني على المعادلة اعلاه

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 = -2ak\sin wt \sin kL$$

$$\because -2ak\sin wt \neq 0$$

$$\therefore \sin kL = 0$$

$$\therefore KL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

$$\boxed{L = \frac{n}{2}\lambda}$$

اي ان طول عمود الهواء داخل انبوبة مفتوحة الطرفين يجب ان يستوعب عدد صحيح من الانماط المسموحة لاهتزاز عمود الهواء في داخل الانبوب (كما مبين بالشكل) ولايجاد الترددات الطبيعية او الرنينية المصاحبة لهذه الانماط من الاهتزازات لدينا :

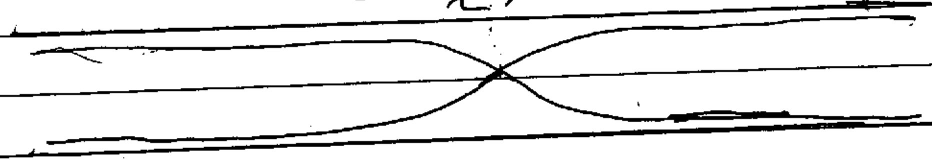
$$U = f_n \lambda_n \quad ; \quad U = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

$$\therefore f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

من المعادلة الأخيرة يمكن الاستدلال أن الترددات الطبيعية لعمود الهواء داخل أنبوب مفتوح الطرفين تساوي الترددات الطبيعية لعمود الهواء داخل أنبوب مغلق الطرفين

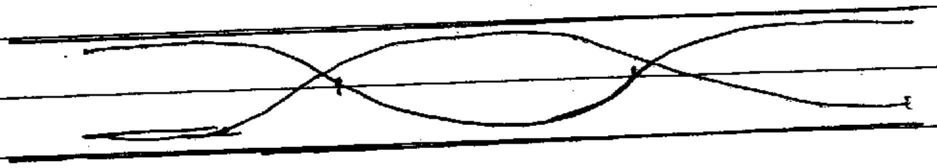
$$L = \frac{1}{2}\lambda$$

التردد التوافقي الأول (الأساسي)



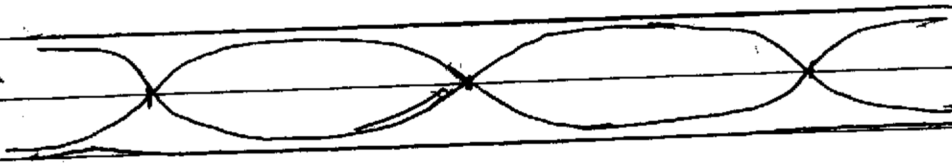
$n=1$

التردد التوافقي الثاني



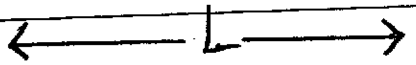
$n=2$

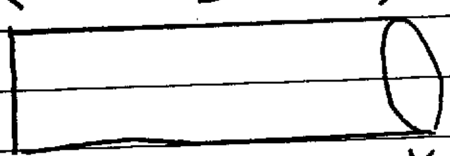
التردد التوافقي الثالث



$n=3$

3) الموجات الطولية الواقفة في أنبوب مجوف أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح





$X=0$ $X=L$

نفرض لدينا أنبوب مجوف ونسبة طوله L وأن أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح تولدت فيه موجة طولية من الطرف المغلق حيث $X=0$ فإنها سوف تنعكس عند الطرف المفتوح حيث $X=L$.
نفرض أن الموجة الساقطة تمثل بالمعادلة:

$$\eta_1 = a\sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

الموجة المنعكسة

$$\eta_2 = b\sin(\omega t + kx) \quad (2)$$

محصلة الإزاحة لأي جسيم يتأثر بالموجتين الساقطة والمنعكسة تساوي:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = a\sin(\omega t - kx) + b\sin(\omega t + kx) \quad (3)$$

الشروط الحدودية عند طرفي الأنبوب هي:

① عند الطرف المغلق $X=0 \Leftarrow \eta=0$ لجميع قيم t

② عند الطرف المفتوح $X=L \Leftarrow P=0 \Leftarrow \frac{\partial \eta}{dx}=0$ لجميع قيم t

نطبق الشرط الحدودي الأول على المعادلة ③

$$0 = a \sin wt + b \sin wt$$

$$\therefore a = -b$$

a و b متساويان بالمقدار ومختلفان بالإشارة أي أن الموجة الساقطة والمنعكسة لهما نفس السعة (أي ...) وبينهما فرق بالطور مقداره π. نعوض بالمعادلة ③

$$\eta = a \sin(wt - kx) - a \sin(wt + kx)$$

$$\eta = -2a \cos wt \sin kx \quad ④$$ معادلة الإزاحة الطولية للموجة الواقفة

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2ak \cos wt \cos kx$$

نطبق الشرط الحدودي الثاني على المعادلة الأخيرة

$$0 = -2ak \cos wt \cos kL$$

$$2ak \cos wt \neq 0$$

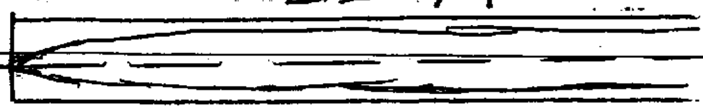
$$\therefore \cos kL = 0$$

$$kL = \frac{(2n-1)}{2}\pi \qquad \therefore k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

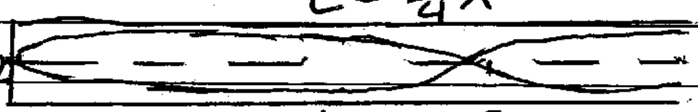
$$\therefore L = \frac{\lambda}{4}(2n-1) \quad ⑤$$

أي أن عمود الهواء في الأنبوبة يستوعب ربع طول الموجة أو مضاعفاتها الفردية في حالة الرنين وكما مبين بالشكل التالي:

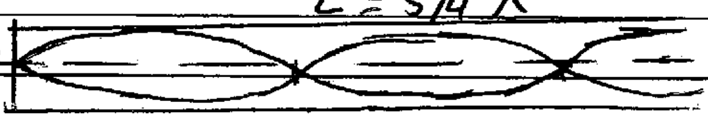
$L = \lambda/4$

$n=1$  التردد التوافقي الأول (النغمة الأساسية)

$L = \frac{3}{4}\lambda$

$n=2$  التردد التوافقي الثاني

$L = 5/4\,\lambda$

$n=3$  التردد التوافقي الثالث

Q4

ولإيجاد الترددات الرئيسية المصاحبة لهذه الأنماط من الاهتزاز لعمود الهواء

$$\left.\begin{aligned} U &= \lambda_n f_n \\ U &= \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} \end{aligned}\right\} \text{---} (6)$$

من المعادلات (5) و (6) نحصل على

$$\boxed{f_n = \frac{2n-1}{4L}\sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}} \text{---} (7)$$

وأن معادلة تردد النغمة الأساسية لعمود الهواء (عندما $n=1$) هو

$$f_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$$