س (6-38) سلك يصدر نغمة أساسية مقدارها 250 Hz عندما يكون تحت تأثير شد يعادل ثقل 10 kg

أ) تحت أي شد يكون تردد النغمة الصادرة من السلك 512 Hz

ب) كيف تجعل السلك يصدر نغمة ترددها 768 Hz مع الاحتفاظ بالشد ثابت (ثقل 10 kg)

الحل:

$f_1' = 250\ Hz\ ;\ m' = 10\ kg\ ;\ (أ)\ T'' = ?$

$f_1'' = 512\ Hz \quad f_1''' = 768\ Hz$

(أ) $T = mg$

$T' = 10 \times 9.8 = 98\ N$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$f_1' \propto \sqrt{T'}$

$f_1'' \propto \sqrt{T''}$

$\frac{f_1'}{f_1''} = \sqrt{\frac{T'}{T''}}$

$T'' = \frac{f_1''^2}{f_1'^2} T'$

$T'' = \frac{(512)^2}{(250)^2} \times 98 = 411\ N$

وهو مقدار الشد لنحصل على تردد (512)

$m'' = \frac{T''}{g} = \frac{411}{9.8} = 41.94\ kg$

وهو مقدار الثقل لنحصل على تردد (512 Hz)

(ب) ثابتة n, μ, T

$\therefore \frac{f_1'}{f_1'''} = \frac{L'''}{L'}$

$L''' = L' \frac{f_1'}{f_1'''}$

$L''' = L' \times \frac{250}{768} = 0.33 L'$

$L''' = \frac{1}{3} L'$

أي أنه لنحصل على تردد 768 هيرتز نجعل طول السلك $\frac{1}{3}$ طوله الأصلي.

Chapter - 7 - الفصل السابع

الموجات الطولية (التضاغطية) في الغازات
(الموجات الصوتية في الغازات)
Longitudinal Waves in gas

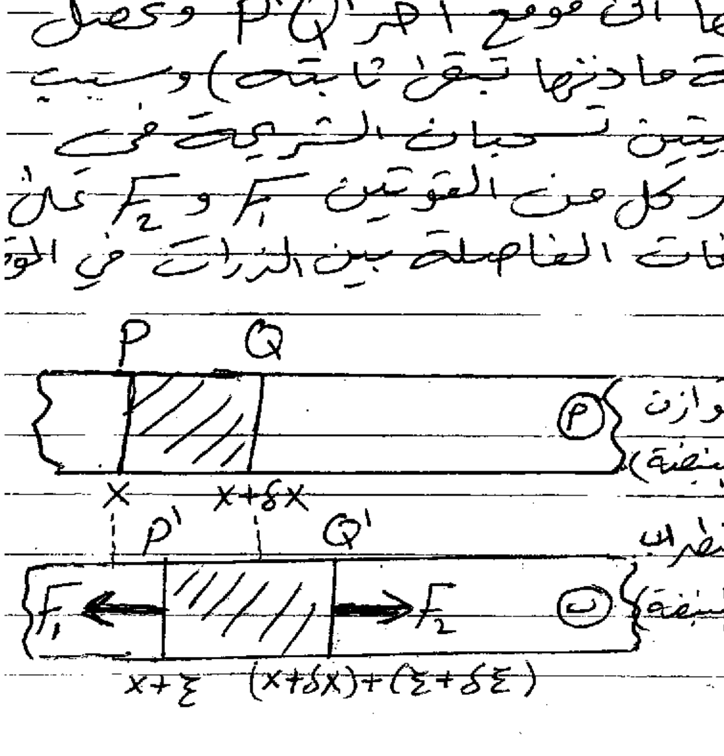
إن الموجات الطولية تتميز باهتزاز جسيمات الوسط الناقل للموجة بصورة موازية لانتقال الموجة والتي تسمى أيضاً بالموجات التضاغطية لأن انتقالها يكون بشكل تضاغط وتخلخل وإن الصوت ينتقل بشكل موجات طولية.

لغرض فهم الموجات الطولية في الغازات سنقوم أولاً بدراسة الموجات الطولية في عمود صلب (أي يمتد باتجاه واحد).

الموجات الطولية في قضيب معدني:

نفرض أن قضيب معدني مرن ومنتظم وطويل جداً وأن محوره يقع على امتداد محور X وكثافة مادته ρ ومساحة مقطعه A ولنفرض أن شريحة PQ تقع في بداية القضيب وعند الموقع المحصور بين X و $X+\delta X$

عند مرور نبضة أو موجة في القضيب فإن موقع الشريحة PQ سوف يزاح عن موقع توازنها الى موقع آخر $P'Q'$ وتحصل لها استطالة كذلك (إلا أن كمية مادتها تبقى ثابتة) وسبب ذلك هو ظهور قوتين غير متساويتين تسحبان الشريحة في اتجاهين متعاكسين ونعتمد مقدار كل من القوتين F_1 و F_2 على مقدار التغير النسبي في المسافات الفاصلة بين الذرات في الموقع X والموقع $X+\delta X$ على التوالي.



وبذلك تكون المادة ضمن الشريحة PQ في حالة إجهاد.

بسبب مرور نبضة في الشريحة PQ تحصل إزاحة طولية أيضاً

(2) وإزاحة آنية طولية

تساوي ε عند النقطة في الموقع X بينما تساوي $\varepsilon + \delta\varepsilon$ عند الموقع $X + \delta X$. وبذلك فإن الموقع الآني للشريحة أثناء مرور الموجة يقع بين الموقعين $X + \varepsilon$ و $(X+\delta X)+(\varepsilon+\delta\varepsilon)$ وإن طول الشريحة $P'Q'$ يكون تحت الإجهاد ، وإن التغير الآني في طول الشريحة يساوي $\delta\varepsilon$.

إن المطاوعة الإجمالية للشريحة تساوي

$$\text{المطاوعة} = \frac{\text{الزيادة بالطول } (\delta\varepsilon)}{\text{الطول الأصلي } (\delta X)} \quad \text{---} (1)$$

(ضمن حدود المرونة)

وإن معامل يونك (معامل مرونة الطول)

$$Y = \frac{\text{الإجهاد}}{\text{المطاوعة}} \quad \text{---} (2)$$

من المعادلتين (1) و (2)

$$\text{متوسط الإجهاد} = \text{المطاوعة} \times \text{معامل يونك} = Y\frac{\partial \varepsilon}{\partial X}$$

إن الإجهاد في أي موقع X يساوي

$$\text{الإجهاد في الموقع } X = Y\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \quad \text{----} (3)$$

إن الإجهاد في الموقع $(X+\delta X)$ [حسب مفكوك سلسلة تايلر وبأخذ الحدين الأول والثاني فقط] يساوي

$$\text{الإجهاد في الموقع } (X+\delta X) = Y\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^2}\delta X\right) \quad \text{--} (4)$$

مفكوك سلسلة تايلر $f(x+dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}dx + \cdots$

$$\therefore \text{الإجهاد في الموقع } X = \frac{F_1}{A} \quad \text{----} (5)$$

من المعادلتين (3) و (5)

$$F_1 = AY\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad \text{----} (6)$$

وكذلك الإجهاد في الموقع $(X+\delta X) = \frac{F_2}{A}$ ---- (7)

من المعادلتين (4) و (7)

$$F_2 = AY\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\delta X\right) \quad \text{----} (8)$$

وبذلك فان محصلة القوى المؤثرة على الشريحة PQ تساوي (F_2-F_1)

من المعادلتين (6) و (8)

$$F_2 - F_1 = AY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,\delta x \quad --- (9)$$

ولكن حسب قانون نيوتن الثاني فان:

محصلة القوى = كتلة الشريحة × تعجيلها = (حجم الشريحة × كثافة مادتها) × التعجيل

= [(مساحة مقطع الشريحة (A) × طولها (δx) × كثافتها (ρ)) × التعجيل]

$$F_2 - F_1 = A\,\delta_x\,\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad --- (10)$$

من المعادلتين (9) و (10)

$$\cancel{A}Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cancel{\delta x} = \cancel{A}\cancel{\delta x}\,\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad --- (11)$$

معادلة (11) تمثل معادلة الحركة الموجية الطولية في قضيب معدني (ذي بعد واحد) ويمكن كتابتها كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad --- (12)$$

حيث U تمثل سرعة الموجة (أو النبضة) الطولية في قضيب معدني وتساوي:

$$U = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad --- (13)$$

نلاحظ أن معادلة (12) أعلاه والتي تمثل معادلة الموجة الطولية المنتقلة في قضيب معدني مشابهة إلى معادلة الموجة المستعرضة في سلك [معادلة (7) بالفصل السادس حيث كانت

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad --- (7)$$

معادلة بالفصل السادس

حيث

$$U = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

حل معادلة الموجة الطولية في قضيب معدني

~~من معادلة (12) نلاحظ أن الإزاحة الطولية ξ تعتمد على~~
متغيرين x و t أي أن:

$$\xi(x,t) = f(x,t)$$

ولغرض حل المعادلة (12) نفصل المتغيرين x و t ونفرض أن الحل يكون بالشكل التالي:

$$\xi(x,t) = X(x)\,T(t) \quad \text{---(14)}$$

حيث أن: X دالة مستقلة وتعتمد على الموقع x فقط
T دالة مستقلة وتعتمد على الزمن t فقط
اعتماداً على المعادلة (14) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= X(x)\frac{d^2 T}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= T(t)\frac{d^2 X}{dx^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{---(15)}$$

ملاحظة: التفاضل بالطرف الأيمن تفاضل كلي لأن المتغير T يعتمد على الزمن فقط (t).. والمتغير X يعتمد على الموقع (x) فقط. أما الطرف الأيسر تفاضله جزئي لأن ξ تعتمد على الزمن t والموقع x

من المعادلتين (12) و (15) نحصل على

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{U^2} X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

$$\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{U^2}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -W^2 \quad \text{---(16)}$$

حيث أن:
W مقدار ثابت والإشارة السالبة لتسهيل الحل
نلاحظ من معادلة (16) أن كل طرف مستقل عن الآخر ولا يعتمد عليه حيث أن أحدهما يعتمد على الزمن t والآخر على الموقع x
ويمكن أن نحصل من معادلة (16) على المعادلتين

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} + W^2 T &= 0 \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \left(\frac{W}{U}\right)^2 X &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{---(17)}$$