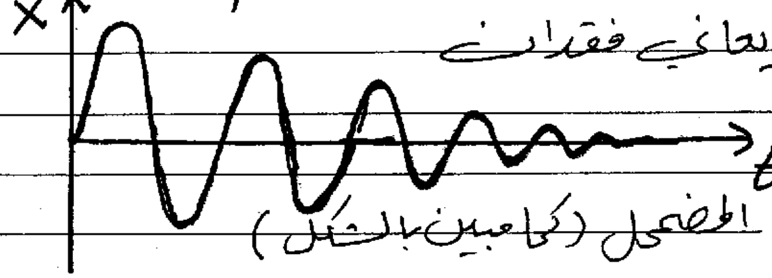
Chapter-4- الفصل الرابع

الاهتزاز المضمحل (الحركة التوافقية المضمحلة)

Damped Harmonic Motion (D.H.M)



ان اي جسم يهتز لابد وأن يعاني فقدان في الطاقة وبذلك فان سعة حركته تتناقص تدريجياً مع الزمن ويسمى هذا بالاهتزاز المضمحل (كما مبين بالشكل)

القوى المسببة لاضمحلال الاهتزازات

ان كل جسم مهتز لابد أن يجابه قوى مقاومة لحركته والتي تؤدي الى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجياً، اي تؤدي الى اعاقة حركته. وأن هذه القوى المقاومة للحركة قد تكون ناتجة من لزوجة المائع الذي يتحرك فيه الجسم أو قد تكون ناتجة عن الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني حركة نسبية نتيجة للاهتزاز أو بسبب قوى محتثة تنتج من الحث الكهرومغناطيسي المتولد عن اهتزاز الجسم الذي يحتوي أصلاً على مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي أو كهربائي. في عملية الاهتزاز أحد هذه العوامل أو أكثر قد يؤثر على الحركة، لذلك يجب أن يصرف شغل للتغلب على ذلك وان هذا الشغل يضيع تدريجياً بشكل حرارة للوسط المحيط، ونتيجة لذلك فان سعة الاهتزاز تتناقص مع الزمن الى أن يتوقف الجسم عن الحركة ويسمى هذا بالاضمحلال او التبديد بالطاقة، وتسمى هذه الحركة بالحركة التوافقية المضمحلة.

ان جميع الجسيمات المهتزة تعاني من الاضمحلال او التبديد بالطاقة ولكن بدرجات متباينة بالاعتماد على عدة عوامل وان أبرز هذه العوامل ناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته أو بسبب الاحتكاك، وأن مقاومة المائع تعتمد على سرعة الجسم وشكله وخواص المائع. عند السرع الاعتيادية مقدار القوة المقاومة F_R يتناسب خطياً مع السرعة الآنية V للجسم المهتز

$$F_R \propto V \Longrightarrow F_R = -RV$$

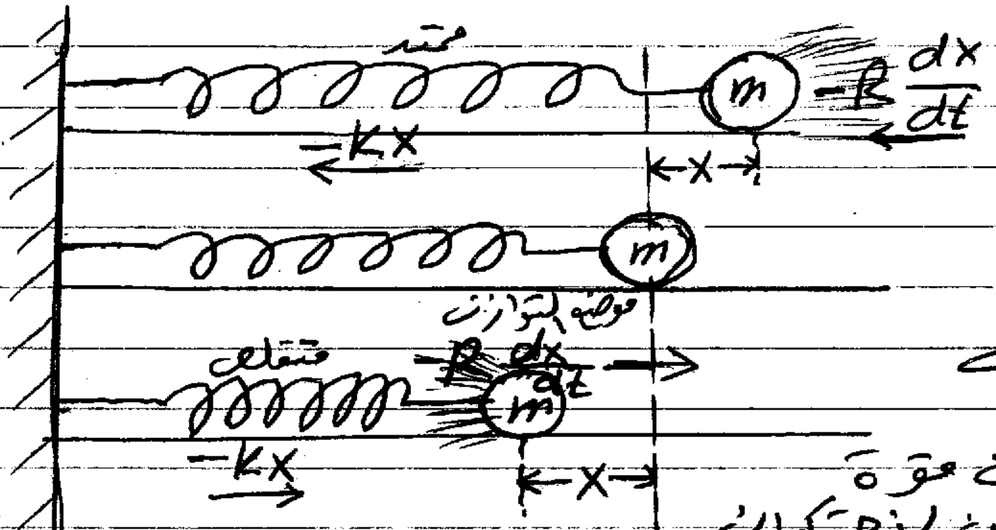
حيث ان: R = ثابت الاضمحلال،

الاشارة السالبة: تعني أن F_R تكون دائماً بعكس اتجاه حركة الجسم اي ان القوة تحاول دائماً ابطاء حركة الجسم المهتز

عندما يهتز الجسم باتجاه المحور السيني فإن

$$F_R = -R\frac{dx}{dt} \quad ---(1)$$

معادلة الحركة التوافقية المضمحلة



عندما تزاح الكتلة المربوطة إزاحة صغيرة X فإن هناك قوة معيدة تساوي $-KX$ وعند ترك الكتلة تتحرك فإنها ستعاني من قوة مقاومة ناتجة عن الاحتكاك (أو لزوجة المائع) والتي تساوي $-R\frac{dx}{dt}$

وأن محصلة القوى المؤثرة تساوي

$$F = -R\frac{dx}{dt} - KX$$

قانون نيوتن الثاني

$$\therefore F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

ولنفرض أن $\left(\frac{R}{m} = 2r\right)$ ، وحيث أن $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad ---(2)$$

المعادلة (2) هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة وهي من المرتبة الثانية . ولحل هذه المعادلة (معادلة (2)) نفتش عن دالة تكون مشتقتها الأولى والثانية مشابهة لنفس الدالة (مضروبة في ثابت) وهذا ما تحققه الدالة الأسية . ولذلك نفرض الحل:

$$X = D e^{\alpha t} \quad ---(3)$$

حيث D ثابت

نعوض الحل من معادلة ③ بالمعادلة ② نحصل على:

$$\alpha^2 D e^{\alpha t} + 2r\alpha D e^{\alpha t} + w_0^2 D e^{\alpha t} = 0$$

$$D e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2r\alpha + w_0^2) = 0$$

$$\because \quad D e^{\alpha t} \neq 0$$

(لأنه الحل المفروض بالمعادلة ③ ولا يمكن أن نفرض حل يساوي صفر)

$$\therefore \quad \alpha^2 + 2r\alpha + w_0^2 = 0$$

نحل المعادلة الأخيرة بطريقة الدستور:

$$\alpha = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 - 4w_0^2}}{2 \times 1} \qquad \left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\alpha = -r \pm \sqrt{r^2 - w_0^2}$$

either $\alpha_1 = -r + \sqrt{r^2 - w_0^2}$ or $\alpha_2 = -r - \sqrt{r^2 - w_0^2}$

نعوض هذه الحلول بالمعادلة ③ التي تمثل الحل العام للمعادلة ②

$$X = D_1 e^{\alpha_1 t} + D_2 e^{\alpha_2 t} \qquad X = X_1 + X_2$$

$$X = D_1 e^{(-r + \sqrt{r^2 - w_0^2})t} + D_2 e^{(-r - \sqrt{r^2 - w_0^2})t} \quad \text{--- ④}$$

من المعادلة ④ التي تمثل الحل الرياضي للمعادلة ② نستنتج أربع حالات للحركة يعتمد كل منها على قيمة r نسبةً لـ w_0 وهذه الحالات هي:

① $r^2 = 0$ ② $r^2 < w_0^2$ ③ $r^2 = w_0^2$ ④ $r^2 > w_0^2$

① **الحالة الأولى: حالة انعدام الاضمحلال $(r = 0)$:**

عندما $(r = 0)$ فأن $\left(\frac{R}{m} = 2r = 0\right)$ أي أن $(R = 0)$ وهذا يعني أن قوة الاحتكاك (أو لزوجة المائع) تساوي صفر، وبذلك تصبح الحركة توافقية بسيطة غير مضمحلة (أي حالة انعدام الاضمحلال) ويصبح الحل الممثل بالمعادلة ④ كما يلي:

$$X = D_1 e^{(-0 + \sqrt{0^2 - w_0^2})t} + D_2 e^{(-0 - \sqrt{0^2 - w_0^2}t)}$$

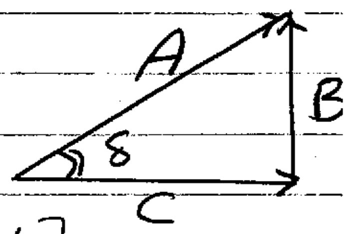
$$X = D_1 e^{\sqrt{-w_0^2}\,t} + D_2 e^{-\sqrt{-w_0^2}\,t} \qquad \sqrt{-1} = i$$

$$X = D_1 e^{i w_0 t} + D_2 e^{-i w_0 t} \qquad \because e^{i w_0 t} = \cos w_0 t + i \sin w_0 t, \quad e^{-i w_0 t} = \cos w_0 t - i \sin w_0 t$$

$$\therefore X = (D_1 + D_2) \cos w_0 t + i(D_1 - D_2) \sin w_0 t$$

let: $D_1 + D_2 = B$; $i(D_1 + D_2) = C$

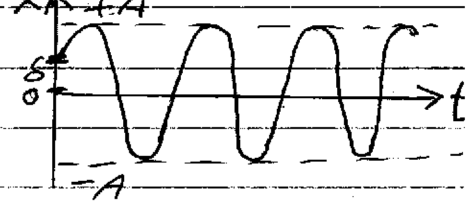
$$X = B \cos w_0 t + C \sin w_0 t$$



$$X = A\left[\frac{B}{A} \cos w_0 t + \frac{C}{A} \sin w_0 t\right]$$

$$X = A[\sin\delta \cos w_0 t + \cos\delta \sin w_0 t]$$

$$X = A \sin(w_0 t + \delta) \quad \text{---} (5)$$



من معادله (5) نلاحظ ان سعة الاهتزاز A تبقى ثابتة مع مرور الزمن

من مقارنة المعادله (5) أعلاه مع المعادله (11) بالفصل الثاني نرى أنهما معادله واحدة ، أي ان المعادله (5) تمثل الحركة التوافقية البسيطة غير المخمدة

الحالة الثانية: حالة الحركة الناقصة للاضمحلال $(r^2 < w_0^2)$

عندما $(r^2 < w_0^2)$ أي أن معامل الاضمحلال r يكون صغير مقارنة مع التردد الزاوي بمعنى أن المقاومة التي يلاقيها الجسم صغيرة فيكون الاضمحلال قليل نسبيًا.

أي أن المقدار $\sqrt{r^2 - w_0^2}$ يكون مقدار تخيلي

let $w_0^2 - r^2 = w^2 \Rightarrow r^2 - w_0^2 = -w^2$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 - w_0^2} = \sqrt{-w^2} = \sqrt{-1}\, w = i w \quad \text{--} (6)$$

نعوض معادله (6) بالمعادله (4) نحصل على:

$$X = D_1 e^{(-r + iw)t} + D_2 e^{(-r - iw)t}$$

$$X = e^{-rt}\left(D_1 e^{iwt} + D_2 e^{-iwt}\right)$$

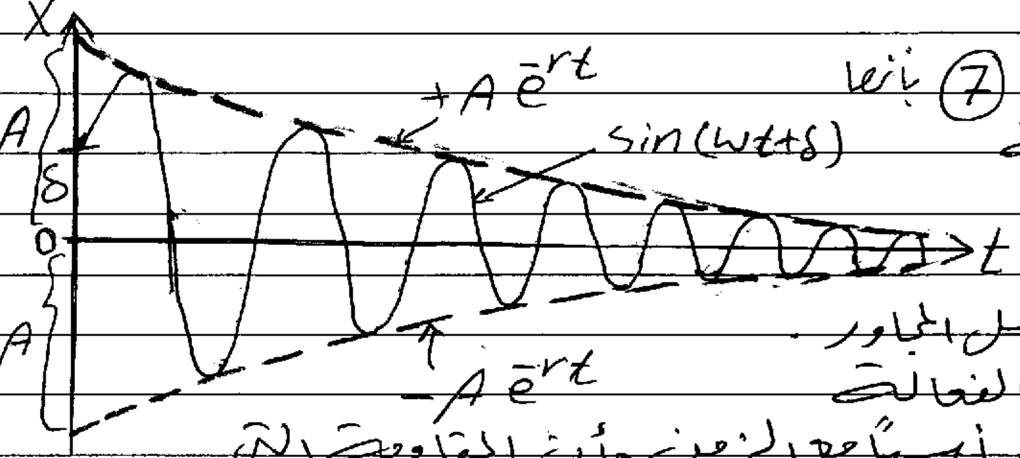
وبنفس الطريقة المتبعة بالحالة الاولى يمكن ان نثبت أن:

$$X = A e^{-rt} \sin(wt + \delta) \quad \text{---} (7)$$

حيث أن :

ω = التردد الزاوي للاهتزاز المضمحل

A و δ ≡ ثوابت يمكن إيجادهما من الشروط الابتدائية للحركة



نلاحظ أن المعادلة (7) بأنها تمثل الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة ويمكن رسمها بيانياً كما مبين بالشكل المجاور.

نلاحظ أن السعة الفعالة $\pm Ae^{-rt}$ تتناقص أسياً مع الزمن وأن المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز قليلة وتسمح بحدوث اهتزاز حول موضع التوازن. إن الفرق بالزمن بين قمتين (أو مقعرين) متتاليتين يسمى بـ (الزمن الدوري للاهتزاز الحر المضمحل) ويرمز له T ويمكن إيجاده كما يلي:

$$\because T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \quad \text{---(8)}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

لأن $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$

$$\therefore T > T_0$$

حيث أن T : الزمن الدوري للاهتزاز المضمحل

T_0 : الزمن الدوري للاهتزاز غير المضمحل

المعادلة (8) تمثل معادلة الزمن الدوري للاهتزاز الحر المضمحل ويلاحظ أنه دائماً يكون أكبر من الزمن الدوري للاهتزاز الحر غير المضمحل الذي يساوي $\frac{2\pi}{\omega_0}$ وذلك بسبب المقاومة التي تؤثر على حركة الجسم المهتز (أو لزوجة المائع) وكلما تزداد r يزداد الزمن الدوري للاهتزاز المضمحل T حتى يصبح مالانهاية عندما $\omega_0 = r$ أي أن الجسم سيرجع الى موضع التوازن عند تركه حراً بعد زمن لانهائي ولا تكون هناك حركة اهتزازية.

نلاحظ في هذه الحالة بأنه عندما تكون هناك مقاومة صغيرة للجسم المهتز نحصل على اضمحلال للاهتزاز وإن هذا الاضمحلال يمتلك خاصيتين: (1) تناقص تدريجي للسعة (2) زيادة في طول الزمن الدوري لأن الطاقة هنا تتبدد بشكل حرارة بسبب المقاومة حتى تنعدم الحركة ويتوقف الاهتزاز وهذا يمثل أغلب الاهتزازات بالطبيعة.