Chapter-2- الفصل الثاني

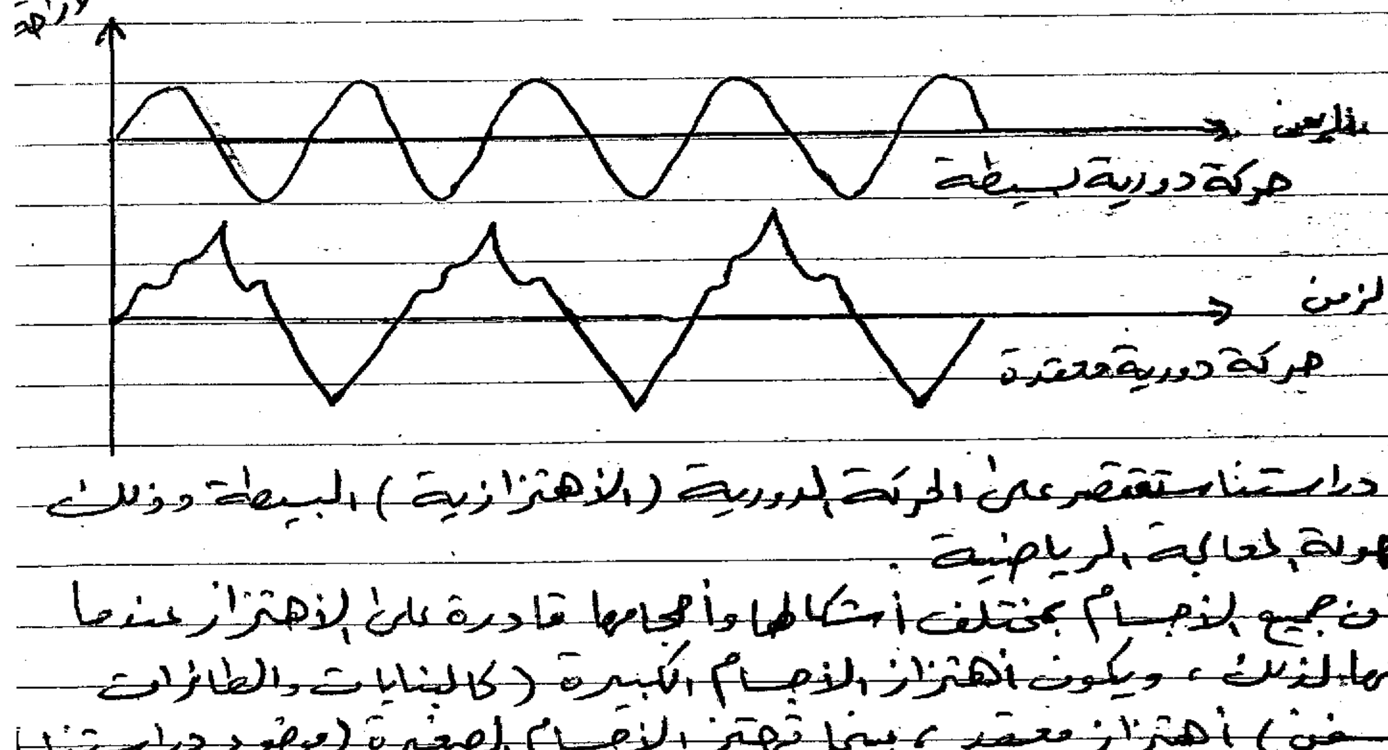
نظرية الاهتزاز الحر

Theory of free vibration (Oscillation)

[Oscillatory (vibrational) motion] الحركة الاهتزازية

هي الحركة على مسار معين ذهاباً وإياباً حول نقطة ثابتة تسمى بـ (موضع التوازن) أو (موضع الاستقرار) equilibrium position وهو الموضع الذي تكون فيه محصلة القوى المؤثرة على الجسم المهتز تساوي صفر وانه يمثل موقع سكون الجسم عندما يتوقف عن الاهتزاز.

أن سمة جميع الظواهر الاهتزازية هي الصفة الدورية، وتسمى الحركة التي تعيد نفسها في فترات زمنية متساوية بالحركة الدورية periodic motion ، كحركة رقاص الساعة ودوران الأرض حول محورها واهتزاز كتلة في نهاية نابض حلزوني، وقد يكون مسار الحركة الدورية بسيطاً أو معقداً كما في الشكل:



أن دراستنا ستقتصر على الحركة الدورية (الاهتزازية) البسيطة وذلك لسهولة المعالجة الرياضية.

أن جميع الأجسام بمختلف أشكالها وأحجامها قادرة على الاهتزاز عندما ندفعها لذلك، ويكون اهتزاز الأجسام الكبيرة (كالبنايات والطائرات والسفن) اهتزاز معقد، بينما تهتز الأجسام الصغيرة (موضوع دراستنا) بطريقة بسيطة، هي الحركة التوافقية البسيطة.

الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion (S.H.M)

إذا تذبذب جسم حول موضع توازن وكان تحت تأثير قوة تتناسب مع بُعد الجسم عن موضع التوازن تسمى حركة هذا الجسم بالحركة التوافقية البسيطة ويسمى هذا الجسم بالمتذبذب التوافقي البسيط (SHO) Simple Harmonic Oscillator وتكون القوة دائماً باتجاه يحاول أرجاع الجسم الى موضع توازنه ويطلق عليها (القوة المعيدة) (Restoring force).

للحركة التوافقية البسيطة ثلاثة شروط هي:

1. يمر مسار الجسم بنقطة ثابتة تسمى موضع التوازن أو الاستقرار
2. مقدار تعجيل الجسم يتناسب طردياً مع مقدار ازاحته عن موضع التوازن، أي أن القوة المعيدة تتناسب طردياً مع مقدار الازاحة عن موضع التوازن.
3. أتجاه تعجيل الجسم يكون دائماً باتجاه موضع التوازن، أي أن اتجاه القوة المعيدة يكون دائماً باتجاه موضع التوازن، ~~أي أن اتجاه القوة المعيدة يكون دائماً باتجاه معاكس للازاحة~~ ((اتجاه التعجيل باتجاه القوة المعيدة)).

تقسم الحركة التوافقية البسيطة الى قسمين:

أ) الحركة الخطية التوافقية البسيطة:

وهي حركة الجسم على خط مستقيم ذهاباً واياباً بتعجيل يتناسب مقداره طردياً مع أزاحة الجسم عن موضع التوازن ويكون اتجاهه باتجاه موضع التوازن وتكون حركة الجسم تحت تأثير قوة معيدة تحاول اعادته دائماً الى موضع التوازن.

ب) الحركة الزاوية التوافقية البسيطة:

وهي حركة الجسم على مسار دائري حول محور ثابت بتعجيل زاوي يتناسب مقداره طردياً مع الازاحة الزاوية عن موضع التوازن، وتكون حركة الجسم تحت تأثير عزم قوة يحاول اعادته الى موضع التوازن.

القوة المعيدة المتولدة عن المرونة:

ينص قانون هوك على أن القوة المعيدة تتناسب طردياً مع مقدار الاستطالة ضمن حدود المرونة

$$F \propto X$$

$$F = -KX$$

حيث أن: F: القوة المعيدة

X: الازاحة

K: ثابت المرونة ويعتمد على طبيعة المادة المستخدمة

الاشارة السالبة تدل على أن أتجاه القوة المعيدة بعكس اتجاه الازاحة

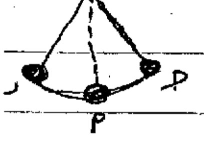
لتطبيق هذه العلاقة يجب أن تكون ازاحة الجسم الناتجة من القوة الخارجية المؤثرة ضمن حدود المرونة، وأن القوة المعيدة ناتجة بسبب مرونة المادة المستخدمة

ويدون هذه المرونة أو عند الخروج عن حدودها لا يمكن تطبيق قانون هوك لإيجاد القوة المعيدة . أن مقدار القوة المعيدة لا يكون ثابتاً بل يتناسب طردياً مع ازاحة الجسم من موضع التوازن بسبب تأثير قوة خارجية تُسلط على الجسم

تعاريف :

① الذبذبة الكاملة ((Vibration))

وهي حركة الجسم ذهاباً وإياباً على طول المسار . أو هي الحركة التي يصنعها الجسم المهتز عند مروره بنقطة معينة على المسار مرتين متتاليتين في اتجاه واحد



② زمن الذبذبة (T) ((period))

وهو الزمن الذي يستغرقه الجسم لإكمال ذبذبة كاملة

③ التردد (f) ((Frequency))

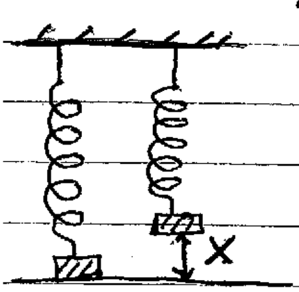
وهو عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز في وحدة الزمن (الثانية الواحدة)

ومن تعريف زمن الذبذبة والتردد نستنتج أن

$$T = \frac{1}{f}$$

يقاس التردد بوحدات هيرتز Hertz (H_z)

وأن الهيرتز $(H_z) = \frac{cycle}{sec}$ $\left(\frac{\text{ذبذبة}}{\text{ثانية}}\right)$



④ الإزاحة (X) ((Displacement))

هو بعد الجسم (خطي أو زاوي) عن موضع التوازن

⑤ السعة (A) ((Amplitude))

هي الإزاحة المحصورة بين موضع التوازن وأقصى موضع يصله الجسم أثناء اهتزازه (أي هي أعظم إزاحة يقطعها الجسم المهتز) $[A = X_{max}]$

ملاحظة :

وجد بالتجربة أن زمن الذبذبة T يكون ثابتاً للسعات الصغيرة والكبيرة في حدود المرونة أو في حدود معينة

معادلات الحركة التوافقية البسيطة Equations of (SHM)

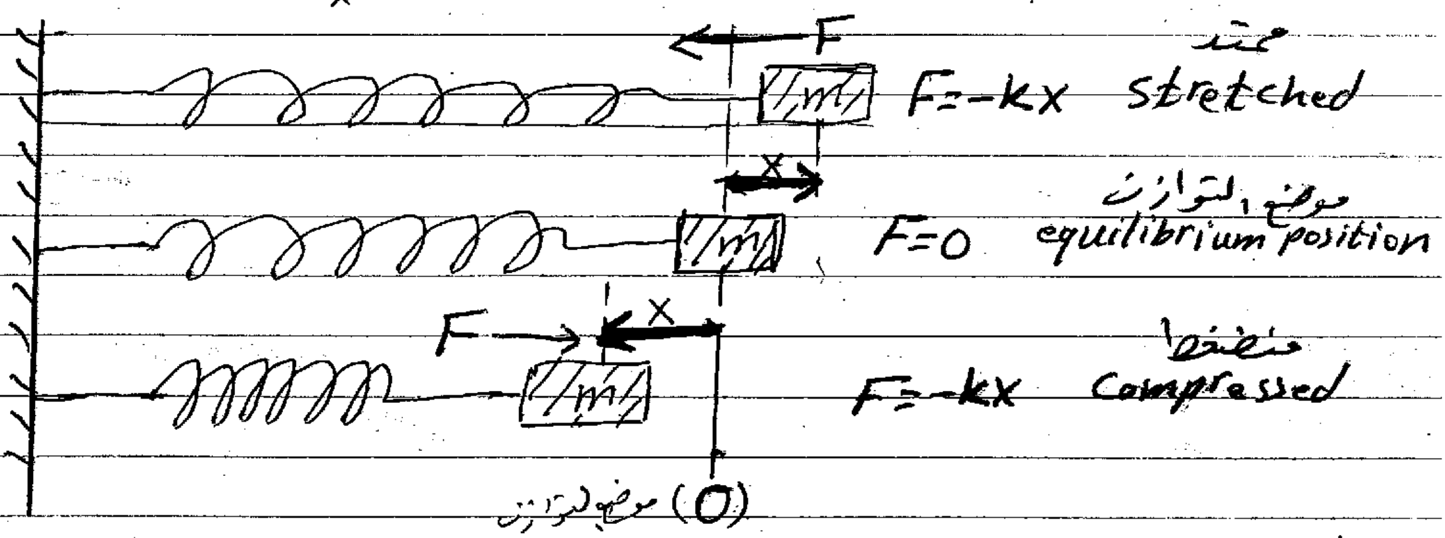
أن أبسط مثال عملي يوضح الحركة التوافقية البسيطة هو حركة جسم كتلته m (على سطح أفقي أملس) مثبت في نهاية نابض والنهاية الأخرى للنابض مثبتة بجسند (وكما مبين بالشكل) وأن ثابت القوة للنابض k نفرض أن نقطة الأصل تقع عند موضع التوازن وأن الجسم يتحرك ذهاباً وإ

على خط مستقيم على طول محور X حول موضع التوازن O (النقطة الأصل).
محصلة القوى التي تؤثر بصورة عمودية على الجسم تساوي الصفر (لأن التعجيل باتجاه محور y يساوي الصفر $a_y = 0$)

$$\therefore \sum F_y = N - mg = 0 \quad \text{---} (1)$$

أي أن القوة المحصلة هي القوة الوحيدة التي تؤثر على الجسم .
عند إزاحة الجسم إزاحة صغيرة (X) من موضع التوازن (ضمن حدود المرونة للنابض) . فان القوة المحصلة تساوي

$$F_x = -KX \quad \text{----} (2)$$



نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة على الجسم المهتز

$$\sum F = \sum F_x + \sum F_y = m(a_x + a_y) = m a_x \quad \text{--} (3)$$

($a_y = 0$ لأن)

من المعادلات (1) و (2) و (3) نحصل على

$$-KX + 0 = m a_x$$

$$\because a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2X}{dt^2} \Rightarrow \therefore -KX = m\frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{K}{m}X \quad \text{---} (4) \qquad X \Rightarrow X(t)$$

المعادلة (4) تسمى بالمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة ، وهي معادلة تربط بين الإزاحة كدالة للزمن $X(t)$ ومشتقتها الثانية للزمن (d^2x/dt^2) ولأجل إيجاد موضع الجسم في أي لحظة بالنسبة لموضع التوازن يجب إيجاد $X(t)$ التي تحقق هذه المعادلة (أي إيجاد الحل للمعادلة (4)) .
أي أن المطلوب هو إيجاد دالة $[X(t)]$ بحيث تكون مشتقتها الثانية مساوية

لنفس الدالة مضروبة في عدد ثابت $\left(-\frac{K}{m}\right)$ ، وهذه الخاصية تمتلكها دالة الجيب والجيب تمام ، فمثلاً

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\cos t) = -\cos t$$

$$\frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(\sin t) = -\sin t$$

(أ) لذا نفرض أن حل المعادلة (4) هو :

$$X = B\cos W_0 t \quad \text{---} \ (5)$$

حيث أن B و W_0 أعداد ثابتة (ثوابت)

$$\frac{dX}{dt} = -W_0 B \sin W_0 t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -W_0^2 B\cos W_0 t \quad \text{---} \ (6)$$

بتعويض المعادلتين (5) و (6) بالمعادلة (4) نحصل على

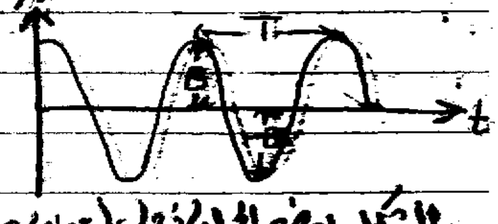
$$-W_0^2 B\cos W_0 t = -\frac{k}{m} B\cos W_0 t$$

لكي تكون المعادلة الأخيرة صحيحة يجب أن يكون

$$W_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow W_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{---} \ (7)$$

Angular frequency التردد الزاوي $= W_0$

وبذلك فإن المعادلة (5) تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية (4)



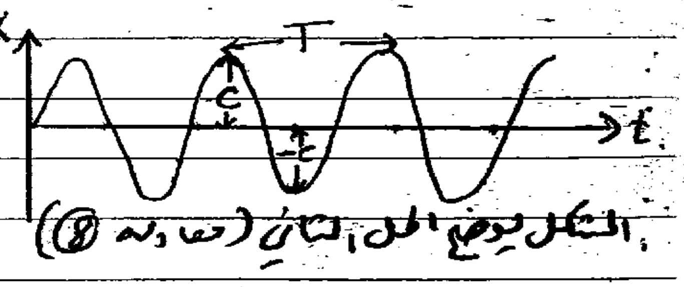
الشكل يوضح الحل الأول (معادلة (5))

(ب) كما يوجد هناك حلاً آخر للمعادلة (4) بدلالة الجيب وهو :

$$X = C\sin W_0 t \quad \text{---} \ (8)$$

ويمكن إثبات صحة الحل (معادلة (8)) باتباع نفس الخطوات السابقة.

أن كلا الحلين الأول (معادلة (5)) والثاني (معادلة (8)) يمثل حلاً خاصاً للمعادلة (4) وأن الحل العام والكامل هو مجموع الحلين ليكونا حلاً للمعادلة (4) وكما يلي



الشكل يوضح الحل الثاني (معادلة (8))

$$X = C\sin W_0 t + B\cos W_0 t \quad \text{---} \ (9)$$

ويمكن تبسيط هذا الحل بفرض أن B و C يمثلان طول ضلعين قائمين في مثلث قائم طول وتره A

$$A^2 = B^2 + C^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\delta = \frac{B}{C} \\ \sin\delta = \frac{B}{A} \ ; \ \cos\delta = \frac{C}{A} \end{array}\right\} \text{---} \ (10)$$