Chapter 2

Mechanics: Kinematics

Description of Motion

2.1 The position vector and the displacement vector

من أساسيات دراسة علم وصف الحركة الكينماتيكا ***Kinematics*** للأجسام المادية هو دراسة كل من الإزاحة ***Displacement*** و السرعة ***Velocity*** و العجلة ***Acceleration***. ونحتاج هنا إلى اعتماد محاور إسناد لتحديد موضع الجسم المتحرك عند أزمنة مختلفة ومن المناسب اعتماد محاور الإسناد الكارتيزية أو ما سميت بـ ***rectangular coordinate (x,y,z)***، فمثلاً نحتاج إلى تحديد موقع جسم ما إلى إسناده إلى مرجعية محددة فمثلاً يمكن اعتبار متجه الموضع ***Position vector*** هو المتجه الواصل من مركز إسناد معين إلى مكان الجسم الذي يراد تحديده. كما في الشكل 2.1 حيث تم اعتبار مركز الإسناد في بعدين فقط هو مركز المحاور x, y

مركز الإسناد في بعدين فقط هو مركز المحاور x, y

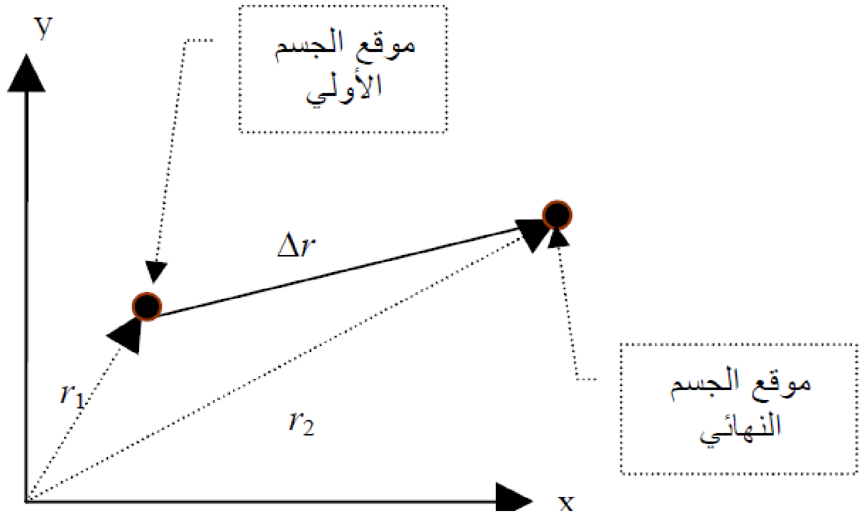


Figure 2.1

في الشكل 2.1 متجه الموضع r_1 يحدد موضع الجسم عند بداية الحركة ومتجه الموضع r_2 يحدد موقع الجسم النهائي بعد زمن وقدره $\Delta t = t_2 - t_1$ و هنا فإن الإزاحة للجسم تعطى بالمعادلة (2.3)

$$\vec{r}_1 = x_1 i + y_2 j \qquad (2.1)$$

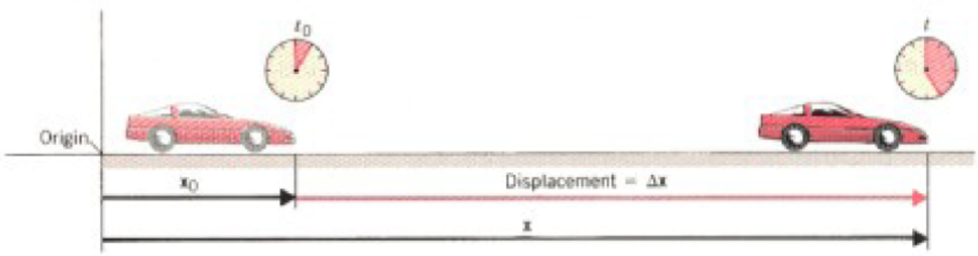
$$\vec{r}_2 = x_2 i + y_2 j \qquad (2.2)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (2.3)$$

Δr is called the displacement vector which represent the change in the

position vector

لاحظ أن الإزاحة displacement $\Delta\vec{r}$ تعتمد على المسافة بين نقطتي البداية و النهاية فقط و لا تعتمد على المسار الذي يسلكه الجسم.



Example 2.1

Write the position vector for a particle in the rectangular coordinate (x, y, z) for the points (5, -6, 0), (5, -4), and (-1, 3, 6).

Solution

For the point (5, -6, 0) the position vector is $r = 5i - 6j$.

For the point (5, -4) the position vector is $r = 5i - 4j$.

For the point (-1, 3, 6) the position vector is $r = -i + 3j + 6k$

2.2 The average velocity and Instantaneous velocity

عند انتقال الجسم من موضع البداية عند الزمن t_1 إلى موضع النهاية t_2 فإن حاصل قسمة الإزاحة على فرق الزمن Δt $(t_2\text{-}t_2)$ يعرف بالسرعة ***Velocity*** وحيث أن الجسم يقطع المسافة بسرعات مختلفة فإن السرعة المحسوبة تسمى بمتوسط السرعة ***Average velocity***. ويمكن تعريف السرعة عند أية لحظة بالسرعة اللحظية ***Instantaneous velocity***.

The ***average velocity*** of a particle is defined as the ratio of the displacement to the time interval.

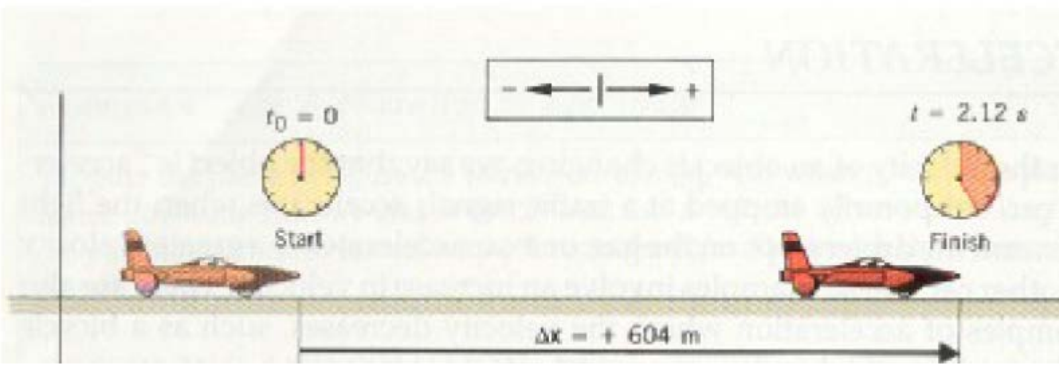
$$\vec{v}_{ave} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

The ***instantaneous velocity*** of a particle is defined as the limit of the average velocity as the time interval approaches zero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

$$\therefore\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2.6)$$

The unit of the velocity is (m/s)



2.3 The average acceleration and Instantaneous acceleration

عند انتقال الجسم من موضع البداية عند الزمن t_1 إلى موضع النهاية t_2 بسرعة ابتدائية v_1 وعند النهاية كانت السرعة v_2 فإن معدل تغير السرعة بالنسبة إلى الزمن يعـــرف باســـم التسارع ***Acceleration*** أو متوســـط التســـارع ***Average Acceleration***، ويكـــون التسارع اللحظي ***Instantaneous acceleration*** هو السرعة اللحظية على الزمن.

The ***average acceleration*** of a particle is defined as the ratio of the change in the instantaneous velocity to the time interval.

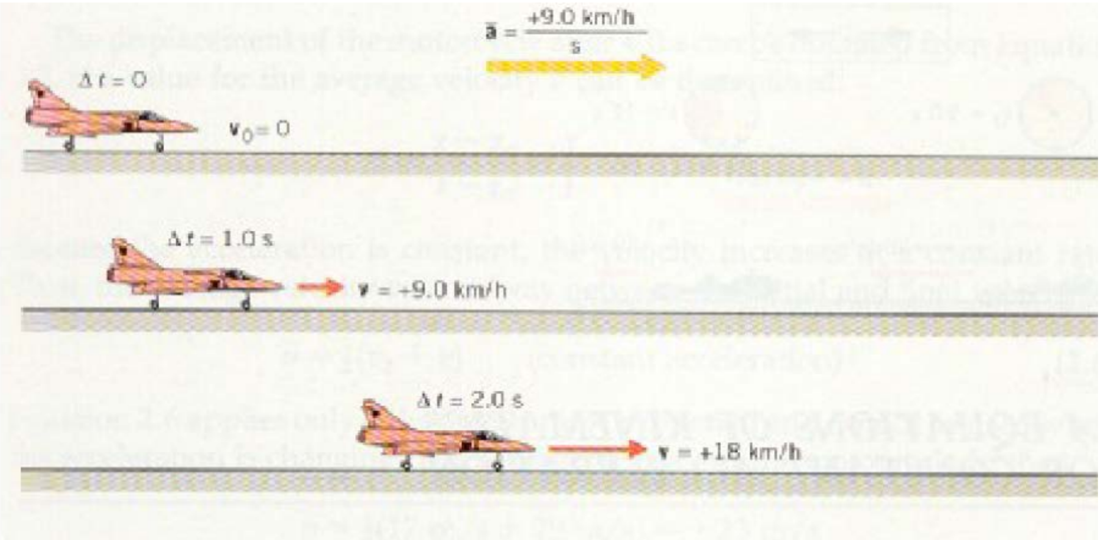
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (2.7)$$

The ***instantaneous acceleration*** is defined as the limiting value of the ratio of the average velocity to the time interval as the time approaches zero.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2.8)$$

The unit of the acceleration is (m/s^2)

لنفترض طائرة تبدأ الحركة من السكون أي v_o=0 عند زمن t_o=0 كما في الشكل أدنـــاه. وبعد فترة زمنية قدرها 29s تصل الطائرة إلى سرعة 260k/h فإن العجلـــة المتوســـطة للطائرة هي 9km/h/s



يوضح الشكل أعلاه تأثير العجلة على زيادة سرعة الطائرة للأربع ثوان الأولى من انطلاقها حيث تكون السرعة بعد زمن قدره ثانية يساوي 9km/h وبعد زمن ثانيتين تصل السرعة إلى 18km/h و هكذا ....

Example 2.4

The coordinate of a particle moving along the x-axis depends on time according to the expression

$x = 5t^2 - 2t^3$

where x is in meters and t is in seconds.

1. Find the velocity and acceleration of the particle as a function of time.
2. Find the displacement during the first 2 seconds.
3. Find the velocity and acceleration of the particle after 2 seconds

Solution

(a) The velocity and acceleration can be obtained as follow

$$v = \frac{dx}{dt} = 10t - 6t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 10 - 12t$$

(b) using the equation $x = 5t^2 - 2t^3$ substitute for t=2s

$x = 4\text{m}$

(c) using the result in part (a)

$v = -4$ m/s

$a = -14$ m/s^2

Example 2.5

A man swims the length of a 50m pool in 20s and makes the return trip to the starting position in 22s. Determine his average velocity in (a) the first half of the swim, (b) the second half of the swim, and (c) the round trip.

Solution

(a) $v_1 = \dfrac{d}{t_1} = \dfrac{50}{20} = 2.5$ m/s

(b) $v_2 = \dfrac{d}{t_2} = \dfrac{-50}{20} = -2.27$ m/s

(c) Since the displacement is zero for the round trip, $v_{ave} = 0$

Motion in One Dimension

2.4 One-dimensional motion with *constant acceleration*

سندرس الآن الحركة في بعد واحد وذلك فقط عندما تكـون العجلـة ثابتـة ***constant acceleration***. وفـي هـذه الحالـة تكـون العجلـة اللحظيـة ***Instantaneous acceleration*** تساوى متوسط العجلة ***Average acceleration***. ونتيجة لذلك فـإن السرعة إما أن تتزايد أو تتناقص بمعدلات متساوية خلال الحركة.

ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالي:-

Instantaneous acceleration = Average acceleration

$$a = a_{\text{ave}} = \frac{v - v_o}{t - t_o} \qquad (2.9)$$

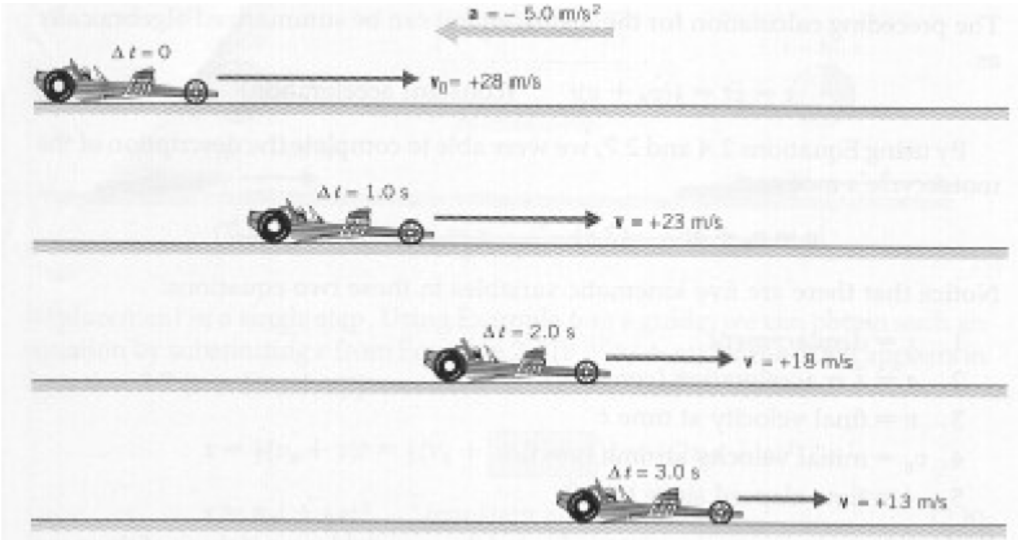
Let $t_o = 0$ then the acceleration

$$a = \frac{v - v_o}{t} \qquad (2.10)$$

or

$$v = v_o + at \qquad (2.11)$$

من المعادلة (2.11) يمكن إيجاد السرعة v عند أي زمن t إذا عرفنا السرعة الابتدائية v_o والعجلة الثابتة a التي يتحرك بها الجسم. وإذا كانت العجلة تساوي صفراً فإن السرعة لا تعتمد على الزمن، وهذا يعني أن السرعة النهائية تساوي السرعة الابتدائية. لاحظ أيضاً أن كل حد من حدود المعادلة السابقة له بعد سرعة (m/s).



يوضح الشكل أعلاه تأثير عجلة ثابتة مقدارها $-5 m/s^2$ في تقليل السرعة بمقدار 5m/s كل ثانية.

Since the velocity varies linearly (خطــي) with time we can express the average velocity as

$$v_{ave} = \frac{v + v_o}{2} \qquad (2.12)$$

To find the displacement Δx (x-x_o) as a function of time

$$\Delta x = v_{ave}\,\Delta t = \left(\frac{v + v_o}{2}\right) t \qquad (2.13)$$

or

$$x = x_o + \frac{1}{2}\,(v + v_o)\,t \qquad (2.14)$$

Also we can obtain the following equations

$$x = x_o + v_o\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad (2.15)$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x\text{-}x_o) \qquad (2.16)$$

من المعادلة (2.15) نلاحظ أن المسافة المقطوعة $(x\text{-}x_o)$ تساوي المسافة المقطوعة نتيجة السرعة الابتدائية وهو الحد $v_o t$ بالإضافة إلى المسافة نتيجة للعجلة الثابتة، وهذا يظهر في الحد الأخير من المعادلة $1/2at^2$، وإن كل حد من حدود المعادلة له بعد مسافة (m).

لاحظ أيضاً أنه إذا كانت العجلة تساوي صفراً فإن المسافة المقطوعة تساوي السرعة في الزمن

$$x - x_o = v_o t \qquad (2.17)$$

إذا كانت السرعة الابتدائية تساوي صفراً تكون المسافة المقطوعة تساوي

$$x - x_o = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad (2.18)$$

Example 2.8

A body moving with uniform acceleration has a velocity of 12cm/s when its *x* coordinate is 3cm. If its *x* coordinate 2s later is -5cm, what is the magnitude of its acceleration?

Solution

$$x = x_o + v_o\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$-5 = 3 + 12\times 2 + 0.5\, a\, (2)^2$$

$$a = -16 \text{ cm/s}^2$$

2.5 Application of one-dimensional motion with constant acceleration

2.5.1 Free Fall

من التطبيقات الهامة على العجلة الثابتة constant acceleration السقوط الحـــر Free fall تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية g حيث أن عجلة الجاذبية الأرضية ثابتة نســبياً على ارتفاعات محدودة من سطح الأرض واتجاهها دائما في اتجاه مركز الأرض، وبالتالي يمكن استخدام المعادلات الأربع السابقة مع تغيير الرمز x بالرمز y وكذلك التعويض عن العجلة a بعجلة الجاذبية الأرضية بإشارة سالبة $-g$ وذلك لأن عجلة الجاذبة الأرضية دائماً في اتجاه مركز الأرض وهذا يعبر عنه من خلال المحور y السالب كما في الشكل 2.2.

$$v = v_o - g\,t \qquad (2.19)$$

$$y = y_o + \frac{1}{2}(v+v_o)t \qquad (2.20)$$

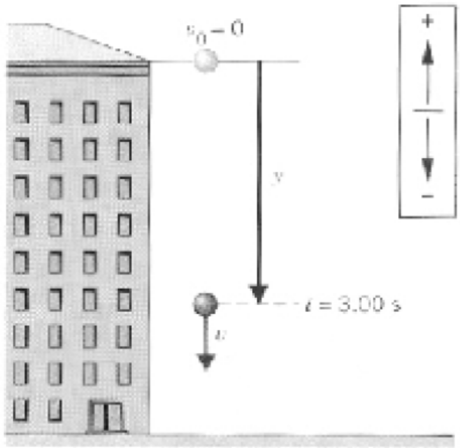
$$y = y_o + v_o\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad (2.21)$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g\,(y-y_o) \qquad (2.22)$$

Figure 2.2

Example 2.10

A stone is dropped from rest from the top of a building, as shown in Figure 2.4. After 3s of free fall, what is the displacement y of the stone?



Solution

From equation (2.21)

$$y = y_o + v_o\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$y = 0 + 0 - \frac{1}{2}\,(9.8) \times (3)^2 = -44.1\text{m}$$

Example 2.11

A stone is thrown upwards from the edge of a cliff 18m high as shown in Figure 2.5. It just misses the cliff on the way down and hits the ground below with a speed of 18.8m/s.

(a) With what velocity was it released?

(b) What is its maximum distance from the ground during its flight?

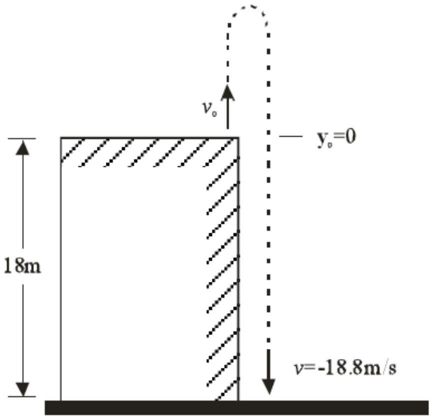


Figure 2.5

Solution

Let $y_o = 0$ at the top of the cliff.

(a) From equation

$$v^2 = v_o^2 - 2g\,(y-y_o)$$

$$(18.8)^2 = v_o^2 - 2\times9.8\times18$$

$$v_o^2 = 0.8 \text{ m/s}$$

(b) The maximum height reached by the stone is h

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{18}{2\times9.8} = 18 \text{ m}$$