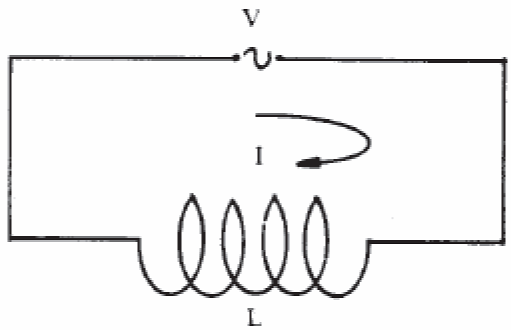
الفصل الخامس

يمثل الشكل (٨ـ٨) قوة دافعة كهربية مترددة V ، حسب المعادلة (٨ـ١)، متصلة بملف حثه الذاتي L ومقاومته الأومية مهملة . فإذا كان التيار المار في الدائرة عند أي لحظة هو I أمبير فإن الفيض المغناطيسي المتردد الناتج عن مرور هذا التيار ينتج قوة دافعة كهربية تأثيرية عكسية، المعادلة (٢٦ ـ ٦)، مقدارها:



شكل (٨ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف حثي L فقط .

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

وبتطبيق قاعدة كيرشوف الثانية على الدائرة (٨ـ٨) يجب أن يكون $V + \varepsilon = 0$

$$\therefore V - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٢٢)$$

وبالتعويض عن V من المعادلة (٨ـ١) يمكن الحصول على:

$$dI = (V_m/L)\sin\omega t\, dt$$

وبمكاملة الطرفين يمكن الحصول على:

$$\therefore I = \frac{V_m}{L}\int \sin \omega t\, dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t + C$$

ويعتبر ثابت التكامل C مساويا للصفر وذلك لأنه يمثل جزء التيار الذي يظهر في حالة الزوال (transient condition).

$$\therefore I = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t = -\frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right) = \frac{V_m}{\omega L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore I = I_m \sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨–٢٣})$$

$$I_m = V_m/\omega L = V_m/X_L \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨–٢٤})$$

$$X_L = \omega L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨–٢٥})$$

يستنتج من المعادلات (١–٨)، (٢٣–٨) و(٢٤–٨) ما يلي:

١ – تمثل X_L معاوقة الملف للتيار المتردد وهي تختلف عن المقاومة الأومية رغم أن وحداتها الأوم ويسمى بالرد الحثي (inductive reactance) أو المفاعلة الحثية.

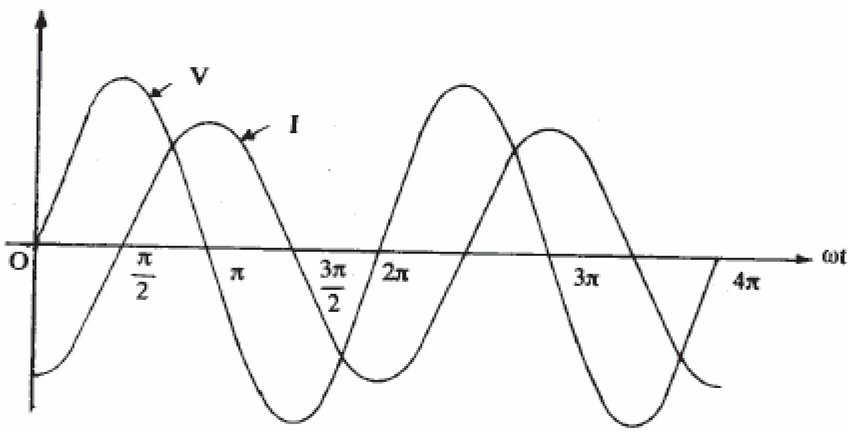
٢ – يتضح من المعادلتين (١–٨) و(٢٣–٨) ومن الشكل (٩–٨) أن منحنى التيار غير متفق في الطور مع منحنى فرق الجهد وإنما يتأخر عنه بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ أي أن كل نقطة لـ (ωt) على منحنى الجهد تناظرها ($\omega t - \pi/2$) على منحنى التيار ويقال في هذه الحالة إن التيار متأخر عن الجهد بزاوية مقدارها $\pi/2$.

٣ – يوضح رسم مخطط ضابط الطور بين I_m و V_m ، شكل (٩–٨)، أن هناك زاوية بين متجهي الجهد والتيار مقدارها $\pi/2$ وأن التيار متأخر عن الجهد بمقدار هذه الزاوية.

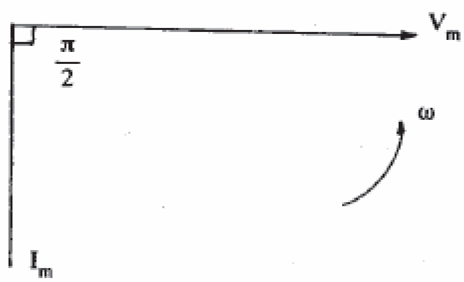
٤ – إذا أعطي التيار بالمعادلة:

$$I = I_m \sin \omega t \quad \ldots\ldots \quad (\text{٨–٢٦})$$

واستعملت المعادلة (٢٢–٨) لحساب الجهد فإنه يمكن الحصول على:



ا ـ



ب ـ

شكل (٩ـ٨): ا ـ العلاقة بين الجهد V و ωt وكذلك العلاقة بين التيار I و ωt حسب المعادلتين (١ـ٨) و(٢٣ـ٨).
ب ـ مخطط ضابط الطور بين الجهد والتيار للدائرة (٨ـ٨).

$$V = L\frac{dI}{dt} = \omega L\, I_m \cos \omega t = \omega L\, I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\therefore\ V = V_m \sin(\omega t + \pi/2) \qquad \ldots\ldots \qquad (٢٧ـ٨)$$

ويقال في هذه الحالة إن الجهد يتقدم التيار بزاوية مقدارها π/2.

٥ ـ يمكن الحصول على القدرة اللحظية P كما يلي:

$$P = VI = V_m \sin \omega t\,.\, I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$P = -\frac{V_m I_m}{2}\sin 2\omega t = -\frac{1}{2}\omega L\, I_m^2 \sin 2\omega t$$

$$\therefore P = -V_{rms}\, I_{rms} \sin 2\omega t \quad \ldots\ldots \quad (\text{٨-٢٨})$$

يتضح من هذه المعادلة أن منحنى القدرة هو أيضا منحنى جيبي تردده ضعف تردد الجهد والتيار واتساعه عبارة عن $\frac{1}{2}V_m I_m$ ولذلك فإن القيمة المتوسطة لمنحنى القدرة تساوي الصفر.

أما الطاقة المختزنة في المجال المغناطيسي للملف الحثي للفترة الزمنية t فيمكن حسابها كالتالي:

$$U = \int_0^t P dt = -\frac{1}{2}V_m I_m \int_0^t \sin 2\omega t\, dt$$

$$U = -\frac{1}{2}V_m I_m \left[-\frac{1}{2\omega}\cos 2\omega t\right]_0^t = \frac{1}{4\omega}V_m I_m(\cos 2\omega t - 1)$$

$$U = \frac{-1}{2\omega}V_m I_m \sin^2 \omega t$$

$$\therefore U = -\frac{1}{2}L\, I_m^2 \sin^2 \omega t = -\frac{1}{2}L\, I^2 \quad \ldots \quad (\text{٨-٢٩})$$

وردت الإشارة السالبة في معادلتي القدرة والطاقة بسبب ورودها في المعادلة (٨-٢٣) للدلالة على تأخر التيار على الجهد.

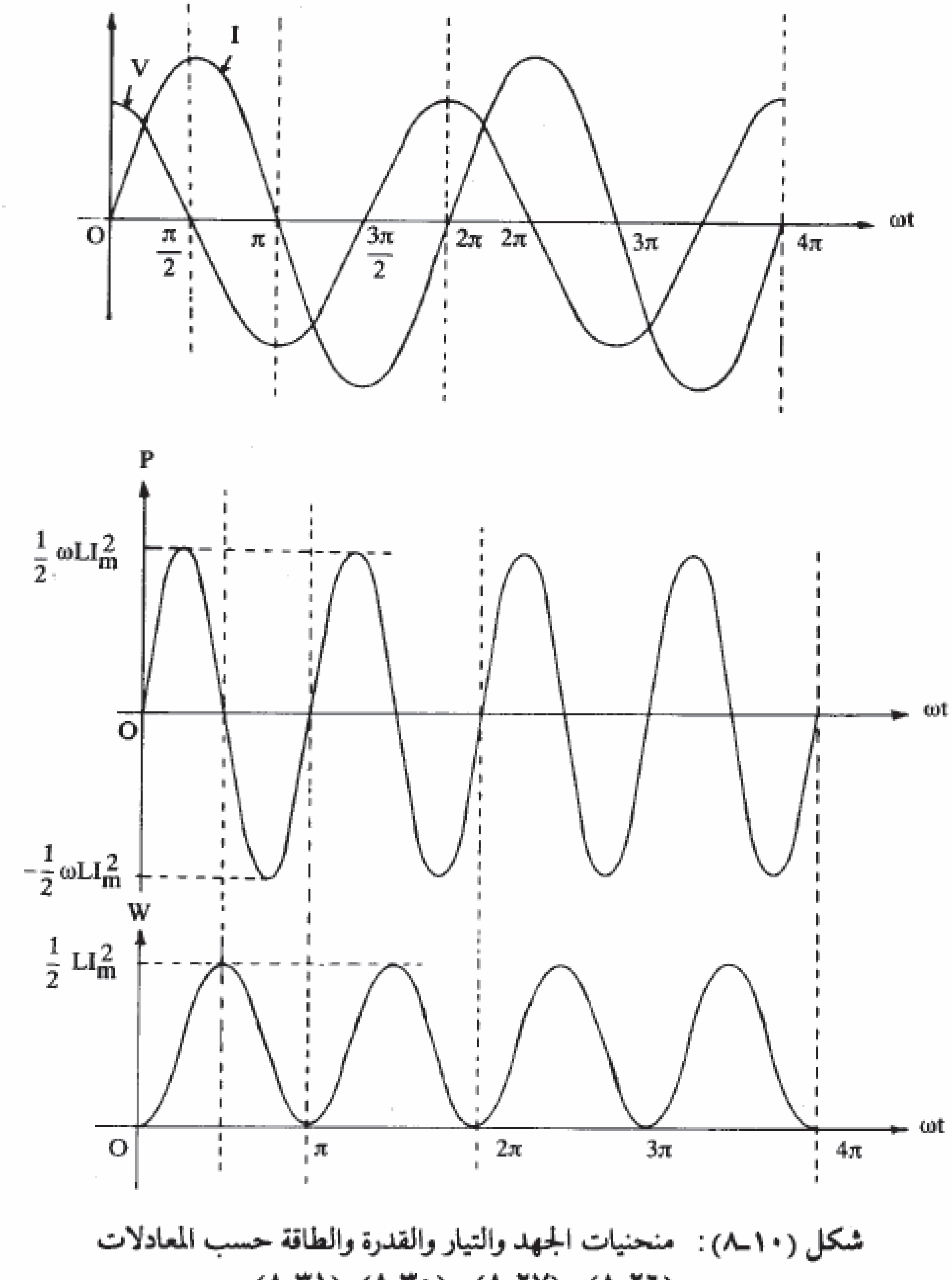
إذا حسبت القدرة والطاقة باستخدام المعادلتين (٨-٢٦) و(٨-٢٧) فيمكن الحصول على:

$$P = \frac{1}{2}\omega L\, I_m^2 \sin 2\omega t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{٨-٣٠})$$

$$U = \frac{1}{2}L\, I_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}L\, I^2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{٨-٣١})$$

وهما تمثلان المعادلتين (٨ـ٢٨) و(٨ـ٢٩) نفسيهما بدون الإشارة السالبة.

يمثل الشكل (٨ـ١٠) منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨ـ٢٦)، (٨ـ٢٧)، (٨ـ٣٠) و(٨ـ٣١).



شكل (٨ـ١٠): منحنيات الجهد والتيار والقدرة والطاقة حسب المعادلات (٨ـ٢٦)، (٨ـ٢٧)، (٨ـ٣٠) و(٨ـ٣١).

ويستنتج من ذلك أنه إذا كانت القدرة P موجبة فسريان الطاقة يكون متجها إلى الملف من المصدر وتزداد بذلك طاقة التخزين المغناطيسية، أما إذا كانت القدرة سالبة فإن الطاقة ستعود من المجال المغناطيسي في الملف إلى المصدر الكهربي. إذا كان الملف نقيا، أي مقاومته الأومية مهملة، فإن الطاقة لا تتبدد (consume) خلال تبادل الطاقة بين المصدر الكهربي والمجال المغناطيسي.

يتم هذا التبادل خلال نصف الدورة للتيار الكهربي أي بين $\omega t = 0$ و $\omega t = \pi$ وتتكرر العملية نفسها خلال النصف الثاني السالب أي بين $\omega t = \pi$ و $\omega t = 2\pi$ وبذلك تصل الطاقة إلى نهايتها العظمى مرتين بقيمة قدرها $\frac{1}{2} LI_m^2$ خلال كل دورة عندما تكون $\omega t = \pi/2$ و $\omega t = \frac{3}{2}\pi$. وهكذا تستمر العملية.

مـثـال (٨ـ٣)

سلطت قوة دافعة كهربية مترددة قيمتها $V = 150 \sin 1000\, t$ على ملف حثه $L = 0.02$ H في الدائرة المبينة في شكل (٨ـ٢٣).

أ ـ احسب شدة التيار I وكذلك القدرة اللحظية P والمتوسطة P_{av}

ب ـ إذا فرض أن الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي (stored energy in magnetic field) تساوي الصفر عند $t = 0$. احسب قيمة هذه الطاقة بعد زمن قدره t ثانية.

الحـــل

من العلاقة (٨ـ١٣) يكون:

$$I = \frac{V}{X_L} = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t = -7.5 \cos (1000t)\ \text{A}$$

$$P = V.I = 150 \sin 1000\, t \times [-7.5 \cos (1000t)]$$

$$= -1125 \times \frac{1}{2} \sin 2000\, t$$

$$= -562.5 \sin 2000\, t$$

أما بالنسبة للقيمة المتوسطة فواضح أن قيمتها تساوي الصفر.

ب ـ تحسب الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي بالطريقة التالية:

$$U = \int_0^t p\, dt = -\int_0^t 562.5 \sin 2000\, t$$

$$= 562.5 \left[\frac{\cos 2000\, t}{2000} \right]_0^t$$

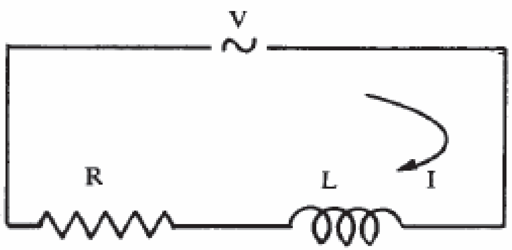
$$= 0.28\, (\cos 2000\, t - 1) \quad J$$

$$= -0.28 \times 2 \sin^2 1000\, t \quad J$$

$$\therefore U = -0.56 \sin^2 1000\, t \quad J$$

(٨ـ٥ـ١) مقاومة وملف متصلان على التوالي **Resistance and inductance in series**

يمثل الشكل (١١ـ٨) قوة دافعة مترددة V يتصل بها على التوالي ملف حثه الذاتي L ومقاومة أومية R (هذه المقاومة قد تكون المقاومة الأومية للملف أو تكون مقاومة مستقلة إذا كان الملف مقاومته مهملة).



شكل (١١ـ٨): دائرة تيار متردد تحتوي على ملف L ومقاومة R على التوالي.

وهناك ثلاث طرق لدراسة هذه الدائرة والدوائر المماثلة التي ستأتي فيما بعد وهي:

أولا: طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة وإيجاد حلها.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور (مخطط المتجهات).

ثالثا: طريقة الحساب باستخدام الأعداد المركبة، وسوف يخصص البند (٨ـ٨) لهذه الدراسة.

أولا : طريقة كتابة المعادلة التفاضلية للدائرة

تكتب معادلة الدائرة بالصورة التالية :

$$V = L\frac{dI}{dt} + IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٢)$$

فإذا فرض أن جهد المصدر V تمثله المعادلة (١ـ٨) فإن التيار المار في هذه الدائرة سوف يكون متخلفا عن الجهد بزاوية مقدارها α حيث :

$$I = I_m \sin(\omega t - \alpha) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٣)$$

تسمى α بزاوية الطور وتتراوح قيمتها بين الصفر و$\frac{\pi}{2}$ ، كما هو معروف من دراسة البندين (٨ـ٢) و(٨ـ٤) فإن قيمتها تساوي الصفر في حالة المقاومة فقط و$\frac{\pi}{2}$ في حالة الملف فقط .

بالتعويض عن قيمتي V و I من المعادلتين (١ـ٨) و(٣٣ـ٨) في المعادلة (٣٢ـ٨) يمكن الحصول على :

$$V_m \sin\omega t = I_m R \sin(\omega t - \alpha) + L\, I_m\, \omega \cos(\omega t - \alpha)$$

$$V_m \sin\omega t = I_m R\,\{\sin\omega t \cos\alpha - \cos\omega t \,.\, \sin\alpha\} + L I_m\, \omega\,\{\cos\omega t \cos\alpha + \sin\omega t \sin\alpha\}$$

أو:

$$\sin\omega t\,\{I_m R \cos\alpha + L\, I_m\, \omega \sin\alpha - V_m\} + \cos\omega t\,\{L\, I_m\, \omega \cos\alpha - I_m R \sin\alpha\} = 0$$

وهذه المعادلة صحيحة لجميع قيم (ωt).

فعندما تكون $\omega t = 0$ يكون

$$\cos\omega t = 1 \,,\, \sin\omega t = 0$$

عندما تكون $\omega t = \frac{\pi}{2}$ يكون

$$\cos\omega t = 0 \,,\, \sin\omega t = 1$$

وبتطبيق هذين الشرطين يمكن الحصول على :

$$L\,\omega \cos\alpha = R \sin\alpha \quad \cdots\cdots \quad (٨\text{ـ}٣٤)$$

$$V_m = I_m R \cos\alpha + L\, I_m\, \omega \sin\alpha \qquad .. \quad (٨\text{ـ}٣٥)$$

فمن المعادلة (٨ـ٣٤) يمكن الحصول على زاوية الطور أي أن :

$$\tan\alpha = \frac{\omega L}{R} \qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \quad ... \quad (٨\text{ـ}٣٦)$$

ويمكن الحصول من المعادلة (٨ـ٣٦) على :

$$\sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \& \quad \cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٨ـ٣٥) يمكن الحصول على :

$$V_m = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad ...... \quad (٨\text{ـ}٣٧)$$

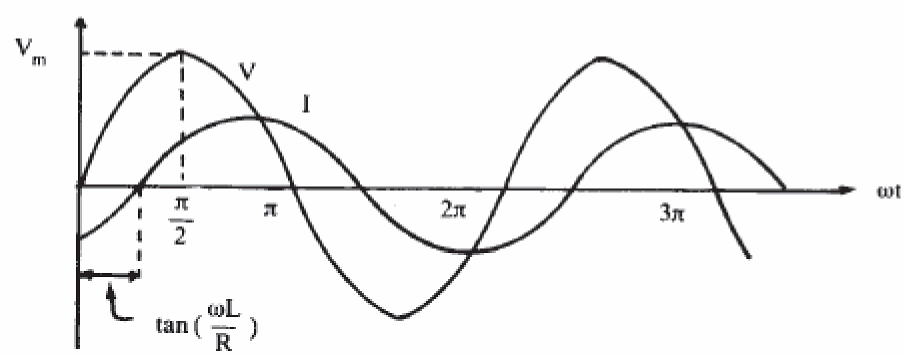
$$V_m = I_m Z$$

حيث :

$$Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad .... \quad (٨\text{ـ}٣٨)$$

حيث يعرف المقدار Z بالممانعة الحثية (inductive impedance) وهي تقاس بالأوم أيضا، وتمثل نوعا من أنواع المقاومة في الدائرة .

ويبين الشكل (٨ـ١٢) العلاقة بين الجهد V والتيار I وزاوية الطور α .



شكل (٨ـ١٢): العلاقة بين V ، ωt و I ، ωt حسب المعادلتين (٨ـ١) و(٨ـ٣٣) ويوضح الشكل قيمة α بين V و I.

ثانيا: طريقة رسم مخطط ضابط الطور

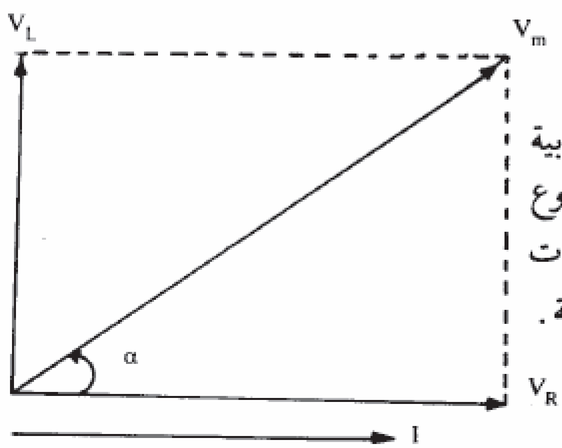
يمكن استخدام مخطط ضابط الطور لحساب الممانعة الحثية Z وزاوية الطور α كما يلي:

لكي يمر التيار الكهربي في الدائرة الموضحة بالشكل (١١ـ٨) يجب أن يكون للقوة الدافعة الكهربية V_m مركبتان هما:

ا ـ جهد المقاومة V_R ومقداره I_mR وهو لازم لتمرير التيار في المقاومة R وكما هو معروف من دراسة البند (٨ـ٢) أن هذا الجهد متفق في الطور مع التيار.

ب ـ جهد الملف الحثي V_L ومقداره $I_m\omega L$ وهو لازم لتمرير التيار في الملف ذي الحث الذاتي L وهذا الجهد متقدم على التيار بزاوية مقدارها $\pi/2$ ، البند (٨ـ٤).

وبذلك يمكن رسم مخطط ضابط الطور كما في شكل (١٣ـ٨) حيث أخذ التيار I_m كخط إسناد لأنه مشترك بين R و L.



شكل (١٣ـ٨): مخطط ضابط الطور للدائرة (١١ـ٨) يوضح اتجاه V_R و V_L والمحصلة V_m وعلاقتها بـ I_m وزاوية الطور α .

وتكون بذلك القوة الدافعة الكهربية V_m اللازمة لتمرير التيار I_m هي مجموع الجهدين V_R و V_L نظرا لأن الكميات الداخلة في الحساب كلها كميات متجهة.

$$\therefore \vec{V}_m = \vec{V}_R + \vec{V}_L$$

أو

$$V_m = (V_R^2 + V_L^2)^{1/2}$$

$$V_m = [I_m^2 R^2 + I_m^2 (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$V_m = I_m (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} = I_m Z$$

$$\therefore Z = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$$

وهي المعادلة (٣٨ـ٨) نفسها. يمكن الحصول على زاوية الطور α من الشكل (١٣ـ٨)، وواضح أنها موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر $(\omega L = 0)$ و $\frac{\pi}{2}$ $(R = 0)$ ، حيث:

$$\tan\alpha = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_m \omega L}{I_m R} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

وهي المعادلة (٨ـ٣٦) نفسها.

وبهذا يتضح صحة وسهولة فكرة مخطط ضابط الطور في دوائر التيار المتردد.

لإيجاد متوسط القدرة خلال دورة كاملة في هذه الدائرة نتبع ما يلي:

$$P = IV = I_m \sin(\omega t - \alpha)\, V_m \sin\omega t$$

$$P = I_m V_m \sin(\omega t - \alpha) \sin\omega t$$

$$p = \frac{1}{2} I_m V_m \{\cos\alpha - \cos(2\omega t - \alpha)\}$$

$$\therefore\ P = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha - I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha).\ .\quad (٨ـ٣٩)$$

أي أن قيمة القدرة اللحظية تتكون من حدين أحدهما $I_{rms} V_{rms} \cos\alpha$ وهو ثابت المقدار ويمثل القدرة الفعّالة في الدائرة، والحد الثاني $I_{rms} V_{rms} \cos(2\omega t - \alpha)$ وهو كمية مترددة فقيمتها المتوسطة خلال دورة كاملة تساوي صفرا. وبذلك يكون متوسط قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة، وهي عبارة عن القدرة الفعالة في الدائرة، هي:

$$P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos\alpha \quad ......\quad (٨ـ٤٠)$$

وهذا القانون عام لجميع دوائر التيار المتردد، ويسمى المقدار $\cos\alpha$ **بمعامل القدرة** (power factor) إذ أنـه يمثـل المعامل الذي تتوقف عليه قيمة القدرة التي تمتص في الدائرة. فإذا كانت الدائرة تحتوي على مقاومة فقط فإن $\alpha = 0$ وتكون $\cos\alpha = 1$ ومـنـه $P = I_{rms} V_{rms}$ وهي المعادلة (٨ـ١٦)، وإذا اشتملت الدائرة على مقاومة وحث ذاتي فإن قيمة α تقع بين الصفر، $\pi/2$ ، كما أن معامل القدرة يتراوح بين الوحدة والصفر، وكلما ازدادت قيمـة الحث الـذاتي بالنسبـة للمقـاومة قلت قيمة معامل القدرة حتى يصبح صفرا: وعندها تكون $(\alpha = \frac{\pi}{2})$ وذلك عندما تحتوي الدائرة حثا ذاتيا فقط.