الفصل الثالث

(٥ـ٥ـ٢) المجال المغناطيسي لموصل دائري

Magnetic field of circular conductor

يمثـل الشكـل (١٢ـ٥) حلقة دائرية من سلك نصف قطرها a ويمر بها تيار كهربي I. ولحساب الحث المغناطيسي B عند النقطة P نتبع ما يلي:

ا ـ باستعمال قانون بيوت وسافارت

تقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة طول كل عنصر dl ، وتوضع النقطة P على محور الحلقة المحمول على محور x ، بحيث تكون x المسافة بين مركز الحلقة و P ، r المسافة بين dl و P ويتضح من الشكل (١٢ـ٥) ما يلي:

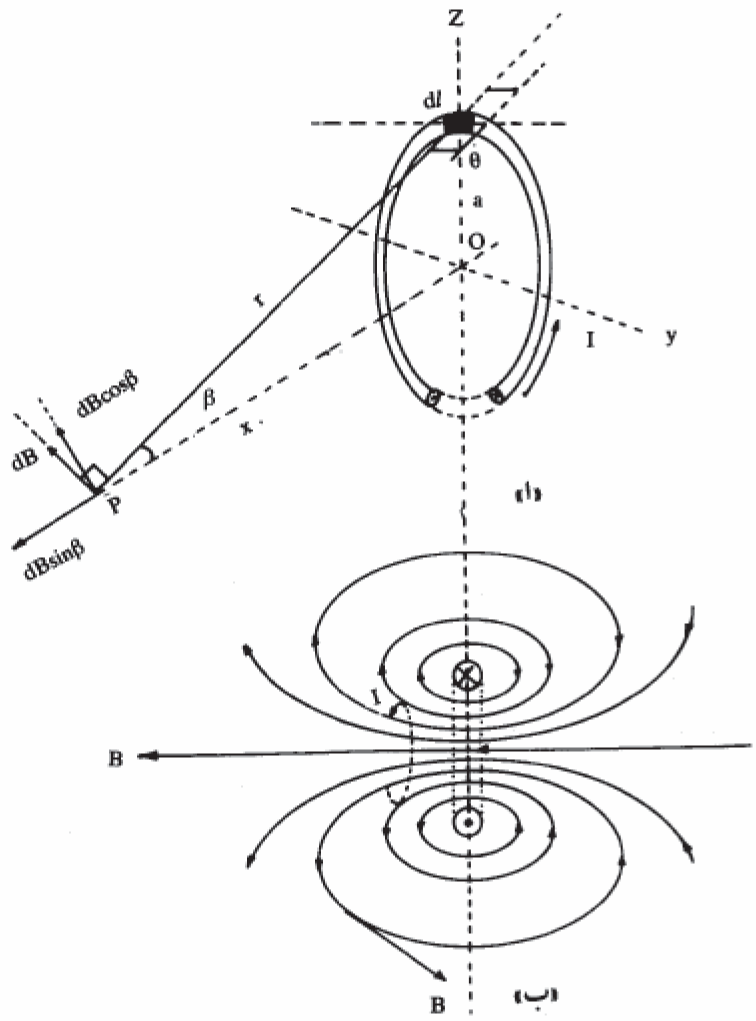
تقع الحلقة في المستوى yz بينما يقع الخطان r و x في المستوى xz العمودي على محور العنصر الـطولي dl وكذلك المستوى yz فتكون الزاوية θ المحصورة بين محور dl والمسافة r تساوي $90°$.

وطبقـا للرموز المستخدمة في الشكل فإن الحث المغناطيسي dB عند النقطة P تحدده المعادلة (٣ـ٥) بعد وضع $\theta = 90^\circ$ بحيث يكون :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥ـ٣٣)$$

ويكون اتجاه المجال المغناطيسي عند النقطة P عموديا على r وفي المستوى xz. وبتحليل dB إلى مركبتـين متعـامـدتـين إحداهما رأسية على امتداد المحور z وقيمتها $dB \cos\beta$ والأخرى أفقية على امتداد المحور x وقيمتها $dB \sin\beta$ فإن المركبات الرأسية العمودية على محور الملف والناتجة عن جميع عناصر الملف يلغي بعضها بعضا لأن لكل عنصر نظيرا مضادا يقابله في الطرف الآخر من الملف أي أن $\int dB \cos\beta = 0$.

وبذلك فإن كثافة الفيض المغناطيسي الناتج عن مرور التيار في الملف كله تكون على استقامة المحور x وتساوي :



شكل (١٢-٥): ١ ـ موصل دائري يحمل تيارا قدره I فينشأ عنه مجال مغناطيسي حثه B المطلوب حسابه عند النقطة P.
ب ـ توضيح خطوط القوى المغناطيسية للموصل نفسه .

$$B = \int dB \sin\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin\beta \int_0^{2\pi a} dl$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \sin\beta$$

ويكتب من الشكل (١٢ـ٥) ما يلي:

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad , \quad \sin\beta = \frac{a}{r}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{ـ}٣٤)$$

وبوضع $x = 0$ في المعادلة (٣٤ـ٥) نُحصل على قيمة الحث المغناطيسي في مركز الملف:

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{a} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{ـ}٣٥)$$

ويكون اتجاه B واقع على محور x.

يلاحظ من المعادلة (٣٤ـ٥) أن الحث المغناطيسي عند النقطة P يقل كلما بعدت النقطة عن مركز الموصل الدائري، وينعدم عندما تكون $x = \infty$.

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بالمنحنى المبين في شكل (١٣ـ٥) والذي يمثل العلاقة بين x و B ويتضح من هذا المنحنى أن معدل تغير المجال مع المسافة يكاد يكون خطيا. أي يمثله خط مستقيم، في المنطقة $x = a/2$ وفيها يكون:

$$\therefore dB/dx = \text{constant} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{ـ}٣٦)$$

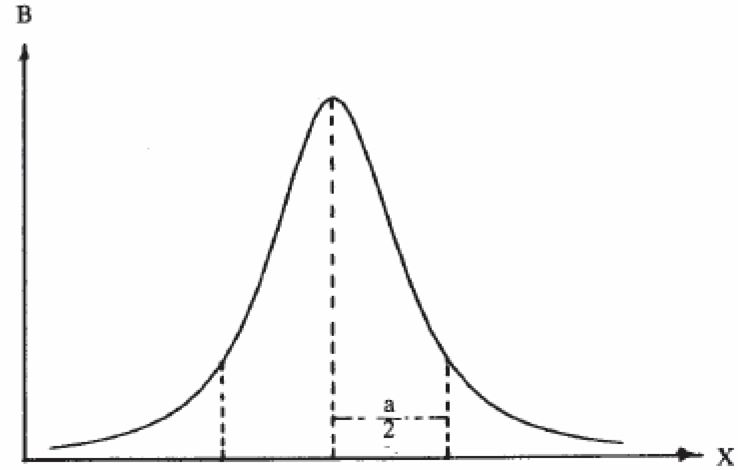
$$\therefore \frac{d^2B}{dx^2} = 0$$

وبتفاضل المعادلة (٣٤ـ٥) مرتين يحصل على $x = \frac{a}{2}$.

وإذا كان الموصل الدائري مكونا من عدد N من اللفات لها نصف القطر نفسه متلاصق بعضها ببعض فإن المعادلتين (٣٤ـ٥) و(٣٥ـ٥) تصبحان:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \cdots\cdots \quad (٥\text{ـ}٣٧)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{a} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٥\text{ـ}٣٨)$$



شكل (١٣-٥): العلاقة بين الحث المغناطيسي B وبعد النقطة P ، على المحور x ، عن مركز الحلقة الدائرية في الشكل (١٢-٥).

ب ـ باستعمال الزاوية المجسمة

يقسم السطح S المحاط بالحلقة C إلى حلقات صغيرة مساحة كل حلقة dS فإذا أخذت حلقة نصف قطرها R كما في الشكل (١٤-٥) وسمكها dR .

فحسب المعادلة (٤٧-٢) ملحق ٢ ، فإن الزاوية المجسمة المقابلة لهذا السطح dS عند النقطة P هي :

$$d\Omega = -\frac{\vec{r}\,.\,dS}{r^3}$$

وحيث إن $d\Omega$ واقعة على محور x فإن :

$$d\Omega = -\frac{xdS}{r^3}$$

ويُحصل من الشكل (١٤-٥) على :

$$dS = 2\pi RdR \quad , \quad r^2 = R^2 + x^2$$

$$\therefore d\Omega = -\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} 2\pi R dR$$

$$\therefore \Omega = -2\pi x \int_0^x \frac{RdR}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

وحسب المعادلة (٢٤) البند (٣ـ٨) من الملحق ٣، يُحصل على:

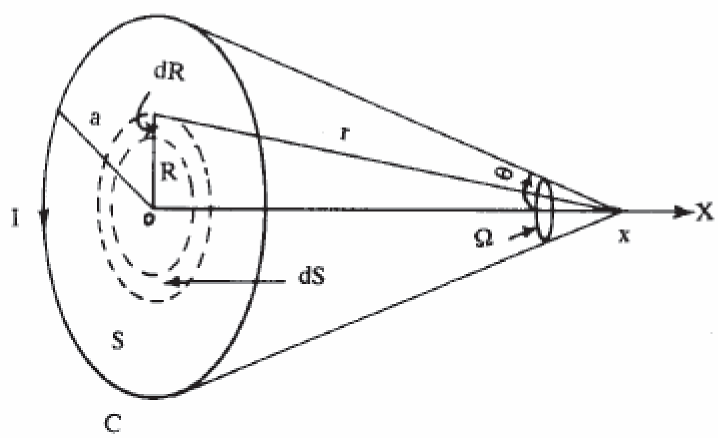
$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right) = 2\pi(1-\cos\theta) \quad \cdot\cdot \quad (٥ـ٣٩)$$

وباستخدام المعادلة (٥ـ٢٨) وتطبيقها على محور x فقط يُحصل على:

$$B_x = B = \frac{-\mu_0}{4\pi} NI \frac{\partial\Omega}{\partial x} \quad \cdots\cdots \quad (٥ـ٤٠)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{NIa^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

وهي المعادلة (٥ـ٣٧) نفسها.



شكل (٥ـ١٤): حساب B بمعرفة الزاوية المجسمة Ω لحلقة دائرية

مثال:

ملف دائري عدد لفاته 200 لفة ومتوسط نصف قطره 20cm ويمر به تيار كهربي قيمته 3.5A احسب :

ا ـ شدة المجال المغناطيسي والحث المغناطيسي والعزم المغناطيسي في مركز الملف.

ب ـ الحث المغناطيسي على بعد 8cm من مركز الملف.

الحــــل

$$H=\frac{NI}{2a}=\frac{200\times3.5}{2\times20\times10^{-2}}=1.75\times10^{3}\ A/m$$

$$B=\mu_0 H=4\pi\times10^{-7}\times1.75\times10^{3}=2.2\times10^{-3}\ Wb/m^2$$

$$P_m=N\pi a^2 I=200\pi(20\times10^{-2})\times3.5=88\ Am^2$$

$$B=\frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}\times200\times3.5\times(20\times10^{-2})^2}{2\times\{(20\times10^{-2})^2+(8\times10^{-2})^2\}^{3/2}}$$

$$\therefore B=1.78\times10^{-3}\ Wb/m^2$$