محاضرات ر215 (الفصل الثاني)

لطلبة كلية العلوم /قسم الرياضيات

المتغيرات العشوائيه

م.م خوله عبد الرزاق سوادي

المتغيرات العشوائية

مفهوم المتغيرات العشوائية المتقطعة

مفهوم المتغيرات العشوائية المستمرة و توزيعها الاحتمالي

مفهوم المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي[1]

مفهوم المتغيرات العشوائية

مفهوم المتغيرات العشوائية المتقطعة

التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المتقطعة

شروط دالة الكثافة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية المتقطعة

مفهوم المتغيرات العشوائية

هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغير العشوائي بحرف لاتيني كبير. ونميز بين م ع المتقطعة وم العشوائبة المتصلة أو المستمرة.

مثال ١: في تجربة إلقاء مكعب نرد يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه الكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة ل X هي: 1,2,3,4,5,6. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/6. ونكتب مثلا :

$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ \ P(X = 2) = f(2) = 1/6\ ,\ldots$

لاحظ أن القيم الممكنة ل X (1,2,3,4,5,6) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي

$$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$$ .1

مثال ٢. في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين يمكن أن نعين المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. في هذه الحالة القيم الممكنة ل X هي ٠، ١، ٢. لا حظ أنه يمكن تعيين متغيرات عشوائية أخرى انطلاقا من نفس التجربة، مثلا Y عدد مرات الحصول على صورة، وهي متغيرة تأخذ القيم ٠، ١، ٢، ثم المتغيرة Z بحث Z = X - Y ...

القيم الممكنة ل X هي ٠، ٢، -٢. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

$P(Z = 0) = P(X - Y = 0) = P(X = 0 \text{ and } Y = 0 \text{ or } X = 1 \text{ and } Y = 1 \text{ or } X = 2 \text{ et } Y = 2) \Rightarrow$

$P(Z = 0) = 0 + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = \mathbf{0.5}$

المتغيرات العشوائية المتقطعة

و تسمى أيضا متغيرات عشوائيه منفصلة، وهي التي تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

مثال: داخل المجال المغلق [2, 5] المتغيرة X المعرفة في المثال الأول تأخذ ٤ قيم ممكنة.

التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المتقطعة

هي مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير. نرمز للمتغيربحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغير بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : f(x) . وتسمى الدالة f(x) دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال١: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

مثال ٢. التوزيع الاحتمالي ل X، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

X	0	1	2	
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	1

شروط دالة الكثافة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : f(x) وتسمى الدالة f(x) دالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_{x} f(x) = 1$

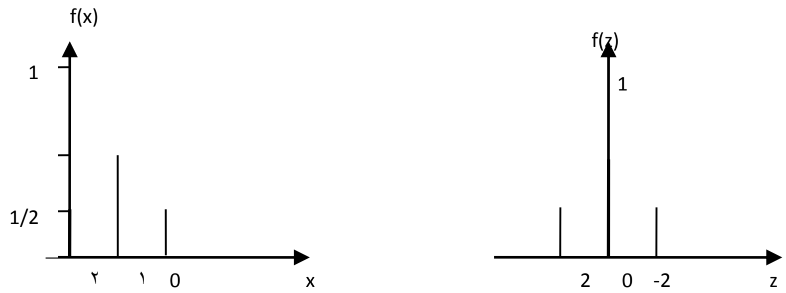
مثال: - نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = \ldots f(6) = 1/6 \geq 0$,

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \ldots + 1/6 = 6(1/6) = 1$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

تمثل المتغيرات العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل X وZ المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



رسم **1** التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع F(x) للمتغيرات العشوائية المتقطعة

تعرف دالة التوزيع - وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" – كما يلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

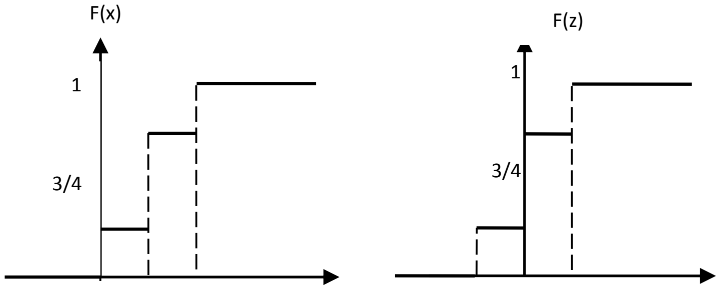
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال:- أوجد قيم F(x) وF(z) للأمثلة السابقة ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4



F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

رسم 2 التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي ١.

مفهوم المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

تعريف المتغيرات العشوائية المستمرة

التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المستمرة

خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

دالة التوزيع للمتغيرات العشوائية المستمرة

قاعدة لايبنيتز

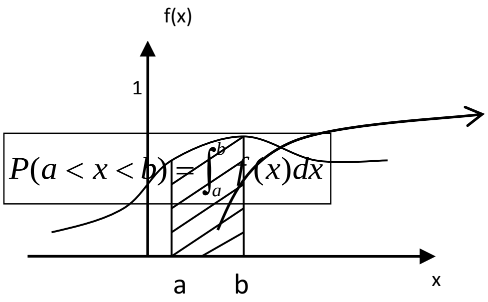
تعريف المتغيرات العشوائية المستمرة

هي متغير عشوائي تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرة المستمرة تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرات العشوائيه المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر.P(X=x) →0 لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.



رسم3 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرات العشوائيه المتقطعة.

خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمرة تكتب كما يلي :

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور المتغير العشوائي، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت c التي تحقق الشـــرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من ١ إلى ٢.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من ١ إلى ٢.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 \Rightarrow C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 \Rightarrow C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

$$P(1 < x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

<u>دالة التوزيع F(x) للمتغيرات العشوائية المستمرة</u>

تعرف دالة التوزيع للمتغيرات المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرات المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرات المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية:
بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :

$$\boxed{P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)}$$

مثال:-

أوجد دالة التوزيع للمتغير المذكورفي المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$* x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$* x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/27 & 0 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} \qquad P(1 < x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27}$$

قاعدة لايبنيز

تفيد هذه القاعدة الرياضية العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة:

$$\boxed{\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(u)du}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$$

مثال: - أوجد دالة الكثافة للمتغير X إذا كانت دالة التوزيع كما يلي:-

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$* x < 0 : f(x) = F'(x) = (0)' = 0$$

$$* x \ge 0 : F(x) = 1 - e^{-2x} \Rightarrow f(x) = \left(1 - e^{-2x}\right)' = 2e^{-2x}$$

عليه فان دالة الكثافة هي

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

خلاصة المبحث الأول و الثاني

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغيرعشــــوائي من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغير و الاحتمالات المقابلة لها.

يتم هذا التحديد إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تســــمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغير إلى نقطة ما:

$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{u\leq x} f(u)$ في حالة المتغيرات المتقطعة و

$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة المتغيرات المستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرات مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.