الفصل الثاني

الدوال التحليليه (Analytic function)

الدوال :- Functions

إذا كان لكل عدد من قيم الاعداد المعقدة التي يمكن أن يأخذها المتغير Z قيمه واحده أو أكثر مناظره يأخذها المتغير W فإنه يقال أن W داله للمتغير المعقد Z تكتب

$$W = f(Z) \quad \text{------} \quad (1)$$

ومن المهمات توضيح بأن هناك أربعة أنواع من الدوال هي على التوالي :-

١- الدوال الحقيقيه لمتغيرات حقيقيه

Real function of Real Variables

٢- الدوال الحقيقيه لمتغيرات معقده

Real function of complex variables

٣- الدوال المعقده لمتغيرات حقيقية

Complex function of Real Variables

٤- الدوال المعقده لمتغيرات معقده

Complex function of Complex Variables

وسوف نستخدم دائماً الحرفين Z ، W للدلاله على المتغيرات المعقده وعليه فأن المعادله (١) تمثل الدوال المعقده لمتغيرات معقده . وتكون الداله وحيده القيمه single value function اذا كانت لكل قيمه تأخذها Z هناك قيمه واحده تأخذها W ، والا فهي داله متعدده القيمه multiple value function وأذا لم يذكر ان الداله متعدده القيم فأننا نفرض أنها داله وحيده القيمه والدوال متعدده القيم يمكن أعتبارها أنها مجموعه من الدوال وحيده القيمه .

نعود الآن الى المعادله (١)

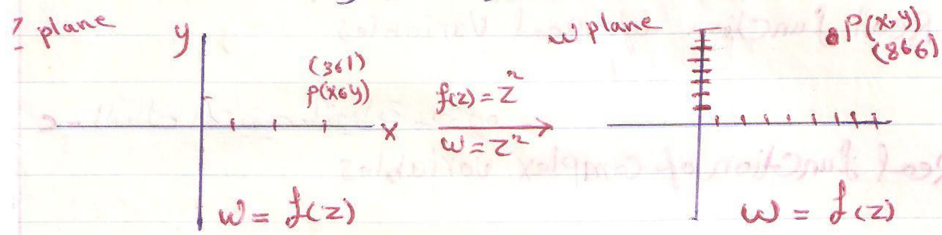
$$W = f(Z)$$

اذا كانت $Z = x + iy$ ، $w = u + iv$

$$\therefore\ u + iv = f(x + iy)$$

حيث كلاً من قيم الاعداد الحقيقيه u ، v تعتمد على قيم المتغيرات الحقيقيه x و y لذلك يسمى x ، y بالمتغيرات المستقله . بينما يسمى كلاً من u ، v بالمتغيرات المعتمده

مثال/ اذا كانت $w = f(Z)$. كانت $f(Z) = Z^2$ أوجد قيم المتغيرات المعتمده في النقطه $(3 ، 1)$ في المستوي المعقد xy .



let $Z = x + iy$ ، $w = u + iv$

$$u + iv = f(x + iy) = (x + iy)^2$$
$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$
$$u(x, y) = x^2 - y^2 \Longrightarrow u(3 ، 1) = 8$$
$$v(x, y) = 2xy \Longrightarrow v(3 ، 1) = 6$$

هذا الحل يوضح كيف يمكن لداله لمتغير معقد ان تكتب بدلاله زوج من الدوال ذات القيم الحقيقيه u و v لمتغيرات حقيقيه y و x أي ان

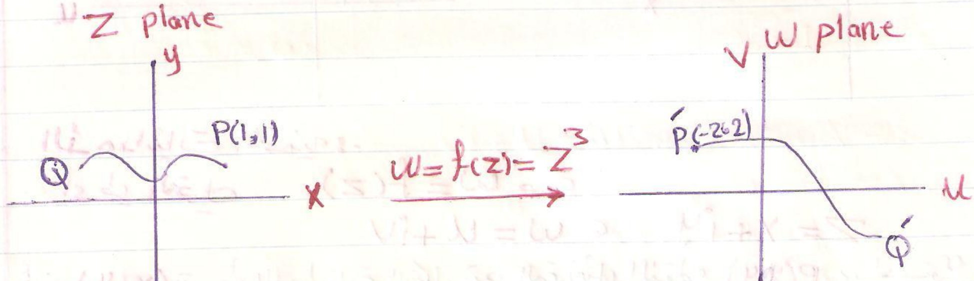
$$w = f(Z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

مثال/ اذا كانت $w=Z^3$ أوجد النقطة الخيالية في المستوي المعقد uv للنقطة $(1,1)$ في المستوي المعقد xy .

$$Z = x+iy \quad , \quad w = u+iv$$
$$w = f(z) = Z^3$$

$$\begin{aligned} u+iv &= (x+iy)^3 \\ &= x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3 \\ &= (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3) \end{aligned}$$

$$u = x^3-3xy^2 \Rightarrow u(1,1) = -2$$
$$v = 3x^2y-y^3 \Rightarrow v(1,1) = 2$$



وبصورة عامة تحت هذا النوع من التحويل فأن مجموعة من النقاط كالتي موضحة في المنحني PQ في الشكل أعلاه يمكن ان نرسم النقاط الخيالية لمجموعة نقاط المنحني PQ في وتمثل المنحني $\acute{P}\acute{Q}$ في المستوي uv وان مواضع النقاط الخيالية تعتمد على الدالة $f(z)$ التي تسمى احياناً الدالة المصورة أو المخططة أو دالة الرسم

مثال / اذا كانت $w = z^2$ أوجد مركبات w ثم مثل النقطه $(1,2)$ في المستوي z وفي المستوي w

$$w = f(z) = z^2$$

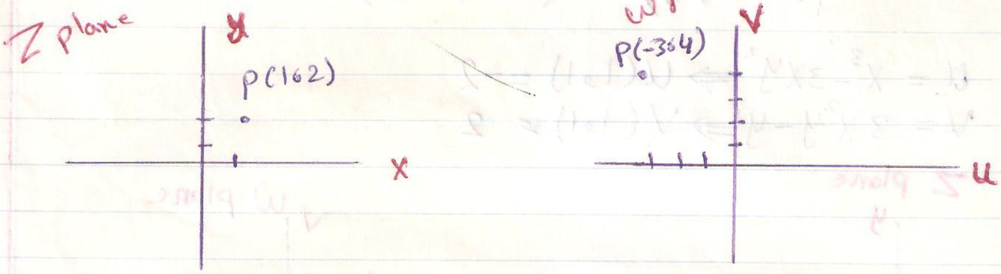
$$u + iv = (x+iy)^2$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$u = x^2 - y^2 = -3$$

$$v = 2xy = 4$$



الأحداثيات المنحنيه :-

اعطي التحويل $w = f(z)$ حيث

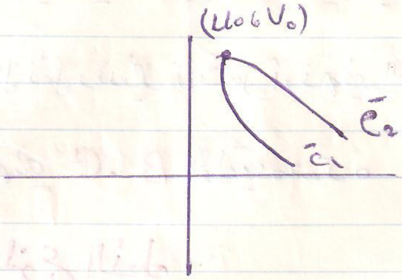
$$z = x + iy \quad , \quad w = u + iv$$

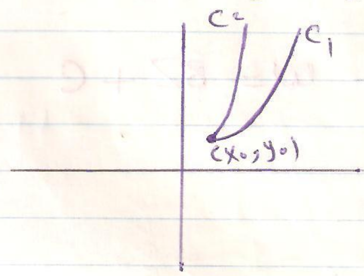
أن (x,y) تسمى بالاحداثيات الديكارتيه التي تمثل النقطه $P(x,y)$ في المستوي z كما تسمى (u,v) بالاحداثيات المنحنيه للنقطه $P(x,y)$ واذا كانت المنحنيات

$$u(x,y) = C_1 \quad , \quad v(x,y) = C_2$$

حيث C_1, C_2 ثوابت تسمى بالاحداثيات المنحنيه وكل زوج من هذه المنحنيات يتقاطع في نقطه واحده. الآن لنفرض تحت هذا التحويل رسمت النقطه (x_0, y_0) الواقعه في المستوي xy الى النقطه (u_0, v_0) الواقعه في المستوي uv بينما رسم المنحنيات C_1, C_2 المتقاطعات عند النقطه (x_0, y_0) الى المنحنيين $(\bar{C}_1, \bar{C}_2)$ على الترتيب المتقاطعين في النقطه (u_0, v_0) . اذا كان التحويل بحيث ان الزاويه عند (x_0, y_0) بين C_1, C_2 تساوي الزاويه عند (u_0, v_0) بين $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ في كل من المقدار وطريقه القياس . أن التحويل يقال أنه تطابق «متشاكل» عند (x_0, y_0) ويكون الرسم التخطيطي الذي يحتفظ بالمقدار ولكن ليس بطريقه

القياس تبقى له تساوي الزوايا





الدوال الأولية لمتغيرات معقدة

أن النظريات الأساسية للأعداد العقدية «الفصل الأول» يمكن تعريف الدوال الأولية مثل $\sin x$ ، $\cos x$ ---- بدلالة القيم العقدية وذلك بالتعويض عن المتغير الحقيقي x في هذه الدوال بواسطة متغيرات معقدة ، وكل دالة لمتغيرات معقدة مثل $z=x+iy$ تسمى دالة معقدة يمكن أن تكتب بدلالة دالتين حقيقيتين w حيث $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

وعليه فأن الدوال الأولية لمتغيرات حقيقية يمكن أن يصبح دوال أولية لمتغيرات معقدة وكما يلي :

١- الدوال المتسلسلة

يمكن تعريف هذه الدوال

$$w=f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n \quad \text{------} \quad (A)$$

حيث $a_0\neq 0$ ، $a_1,\dots,a_n$ ثوابت معقدة

n عدد صحيح موجب يمثل درجة المتسلسلة والتحويل

$$w=az+b$$

يسمى التحويل الخطي والدالة w دالة خطية حيث a ، b أعداد معقدة .

مناقشة الدوال الخطية $w=az+b$

هناك ثلاث أنواع من الدوال الخطية التي يتم بها تحويل نقاط المستوي z الى المستوي المعقد w وهي

1- $w=z+c$ تحويل نقل

2- $W = BZ$ تحويل تدوير (تكبير أو تصغير الحجم)

3- $W = BZ + C$ تحويل نقل وتدوير (تكبير أو تصغير الحجم)

حيث B، C ثوابت معقدة.

النوع الأول

التحويل بواسطة الدالة $W = Z + C$ (تحويل نقل)

$$W = Z + C \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$\because$ C عدد معقد $\therefore C = C_1 + i C_2$

$Z = x + iy$ ، $W = u + iv$

من المعادلة (1)

$$u + iv = (x + C_1) + i(y + C_2)$$

$$u = x + C_1$$

$$v = y + C_2$$

وهذا يعني أن النقطة $(x، y)$ في المستوي Z هي النقطة $(x + C_1، y + C_2)$ في المستوي W أي أن تحت هذا التحويل فإن الشكل الهندسي في المستوي W يكون مماثل للشكل الهندسي في المستوي Z.

مثال/ أفرض أن المستطيل (R) في المستوي Z محدد بالمستقيمات $(x=0)$، $(y=0)$ و $(y=1)$، $(x=2)$ حدد المجال $(\bar{R})$ في المستوي W المرسوم بأستعمال التحويل

$$W = Z + 1 - 2i$$