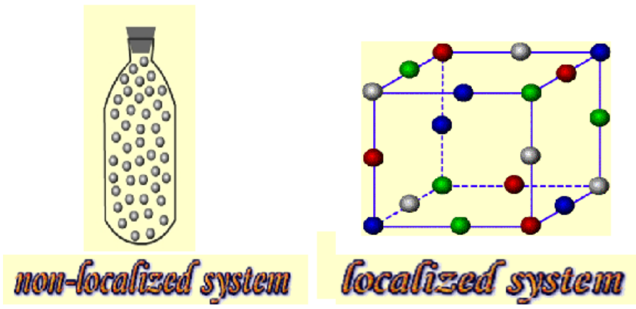
الفصل الثالث

الجسيمات غير المتمايزة Indistinguishable Particles

□ مقدمة: لماذا تكون الجسيمات غير متمايزة؟ السبب هو تأثير الميكانيك الكمي حيث ان تبادل الجسيمات الكمية لا يمكن ان يلاحظ. الدوال الموجية للجسيمات تجمع لتشكل دالة موجية الكلية Total wave function وان هذه الجسيمات ستكون غير مقيدة Non-localized.



لعدد من الجسيمات المتماثلة يمكن كتابة الدالة الموجية الكلية على شكل مزج خطي وفق الشكل التالي

$$\Psi(1,2,3,\cdots) = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3)\cdots$$

مضاف لها التغيرات او التبادلات الممكنة بين الجسيمات ستأخذ الدالة الموجية الكلية الحالات التالية

$$\Psi(1,2,3,\cdots) = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3)\cdots$$
$$\Psi(2,1,3,\cdots) = \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_c(3)\cdots$$
$$\Psi(1,3,2,\cdots) = \psi_a(1)\psi_b(3)\psi_c(2)\cdots$$
$$\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

بما ان جميع الجسيمات متماثلة فان جميع التوزيعات هي حلول لمعادلة شرويدنكر. عندما نعتمد الجمع الخطي تأخذ الدالة الموجية الشكل التالي

$$\begin{aligned}\Psi = {} & \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3)\cdots \\ & \mp \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_c(3)\cdots \\ & \mp \psi_a(1)\psi_b(3)\psi_c(2)\cdots \mp \cdots\end{aligned}$$

فان هنالك معنيين فيزيائيين للحلول:

اولا- عند اعتماد الاشارة الموجبة فقط فان هذه الدالة ستكون متناظرة Symmetric اي انه اي تغير في مواقع الجسيمات لا يؤدي الى دالة موجية جديدة.

ثانيا- عند اعتماد الاشارة السالبة فان هذه الدالة ستكون غير متناظرة Anti-symmetric اي انه اي تغير في مواقع الجسيمات يؤدي الى دالة موجية جديدة.

مثال: انظام مكون من ثلاث جسيمات فقط

$$\Psi(1,2,3) = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3)$$

$$\Psi(2,1,3) = \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_c(3)$$

$$\Psi(1,3,2) = \psi_a(1)\psi_b(3)\psi_c(2)$$

الجمع الخطي يكون

$$\begin{aligned}\Psi(1,2,3) & \\ & = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3) \\ & + \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_c(3) \\ & + \psi_a(1)\psi_b(3)\psi_c(2)\end{aligned}$$

اي تغير بمواقع اي من الجسيمات لا يؤدي لتغير في الدالة الموجية

$$\Psi(1,2,3) = \Psi(2,1,3) = \Psi(3,2,1)$$

عند اعتماد الإشارة السالبة ايضا فان الدالة للجسيمات الثلاث تكون

$$\Psi(1,2,3) = \psi_a(1)\psi_b(2)\psi_c(3) - \psi_a(2)\psi_b(1)\psi_c(3) - \psi_a(3)\psi_b(2)\psi_c(1) - \psi_a(1)\psi_b(3)\psi_c(2) + \psi_a(2)\psi_b(3)\psi_c(1) + \psi_a(3)\psi_b(1)\psi_c(2)$$

اذا ابدلنا 1 بدل 2 فان الدالة ستكون بالشكل التالي

$$\Psi(2,1,3) = -\Psi(1,2,3)$$

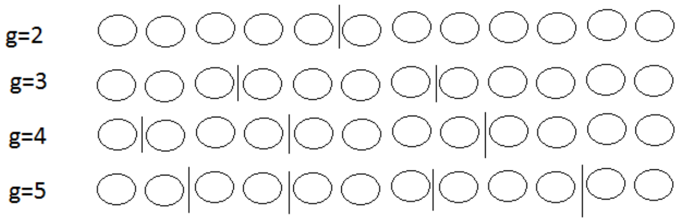
الدالة الغير متناظرة مثلة بهذا الشكل لكي تحقق مبد باولي فاذا افترضنا ان جسيمين متماثلين في نفس الحالة فان الدالة الغير متناظرة ستساوي صفر وبذلك تتحقق فكرة باولي للاستبعاد.

☐ هنالك نوعان من الجسيمات الكمية في الطبيعة:

اولا عندما تكون الدوال الموجية التي تصف مجموعة من الجسيمات متناظرة اي ان الاجسام لها برم على شكل عدد صحيح (مثال ذلك الفوتونات و جسيمات الفا و..) فان الحالة تعرف بالبوزونات Bosons. ثانيا عندما تكون الدوال الموجية التي تصف مجموعة من الجسيمات غير متناظرة اي ان الاجسام لها برم على شكل عدد غير صحيح (مثال ذلك الالكترونات والبروتونات والنيترونات و..) فان الحالة تعرف الفريميونات Fermions.

☐ توزيع بوز اينشتاين للبوزونات Bose-Einstein Distribution for Bosons

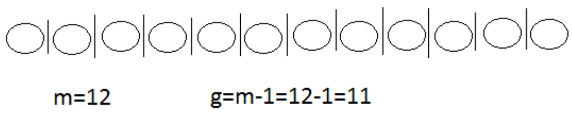
لا يوجد عدد محدد لإشغال كل مستوي من الحالات الكمية. اي ربما يكون هنالك عدد كبير من الجسيمات المتماثلة متواجدة في نفس مستوي الطاقة كما هو الحال في الليزرات. عدد طرق الاختيار تساوي واحد لان جميع الجسيمات غير متمايزة. عندما يراد وضع m_i من الجسيمات الغير متمايزة في حالة g_i. لذا نتصور ان m_i من الجسيمات المتماثلة سترتب على شكل مجاميع ضمن $g_i - 1$ من الحواجز لنحصل على انحلالية مساوية الى g_i.



الانحلالية ستساوي عدد الجسيمات المتماثلة مطروح منها واحد

$$m_i = g_i - 1$$

كما في المخطط التالي

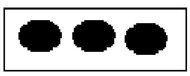


لذا فان عدد طرق الاختيار m_i من الجسيمات المتماثلة لتملئ الحالات المنحلة تكون

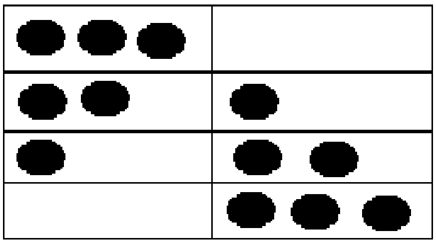
$$\Omega = \frac{(m_i + g_i - 1)!}{m_i!\,(g_i - 1)!}$$

مثال: اذا كان هنالك ثلاث جسيمات متماثلة

m=3 g=1 Ω =(3+1-1)!/3!(1-1)!=1

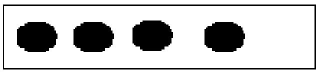


m=3 g= 2 Ω =(3+2-1)!/3!(2-1)!=4

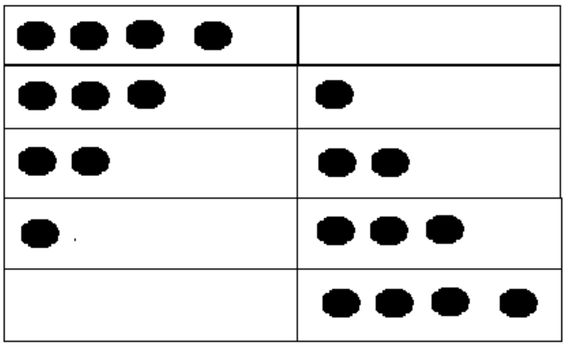


مثال: اذا كان هنالك اربعة جسيمات متماثلة

m=4g=1 Ω = (4+1-1)!/4!(1-1)!=1



m=4g= 2 Ω = (4+2-1)!/4!(2-1)!=5



اذاً العلاقة التي تمثل عدد طرق التوزيع هي

$$\Omega = \frac{(m_i + g_i - 1)!}{m_i!\,(g_i - 1)!}$$

مع ملاحظة ان عدد الجسيمات والطاقة الكلية هما كما يلي

$$\sum_i m_i = N$$

$$\sum_i \epsilon_j m_i = E$$

عند اخذ لوغاريتم طرفي معادلة طرق التوزيع يكون

$$\ln \Omega = \sum_i \{\ln(m_i + g_i - 1)! - \ln m_i! - \ln(g_i - 1)!\}$$

$$\ln \Omega \approx \sum_i \{(m_i + g_i - 1)\ln(m_i + g_i - 1) - (m_i + g_i - 1) - m_i \ln m_i + m_i - (g_i - 1)\ln(g_i - 1) - (g_i - 1)\}$$

عندما تكون كل من m_i, g_i اكبر من الواحد فان

$$m_i + g_i \mp 1 \approx m_i + g_i$$

وبذلك تصبح العلاقة السابقة بعد مفاضلتها على النحو التالي

$$d(\ln \Omega) = \sum_i \{dm_i \ln(m_i + g_i) + dm_i - dm_i \ln m_i - dm_i\} = 0$$

$$d(\ln \Omega) = \sum_i \left(\ln \frac{m_i + g_i}{m_i}\right) dm_i = 0$$

اذا كان

$$\ln \frac{m_i + g_i}{m_i} = 0$$

فان

$$\frac{m_i + g_i}{m_i} = 1 \to g_i = 0$$

وهذا غير ممكن. اذا يجب ان تكون وفق الحالة التالية

$$\ln\left(\frac{m_i + g_i}{m_i}\right) \neq 0$$

لذا نستخدم مضاريب لاكرانج في بنا معادلة جديدة بحيث ان

$$\alpha \sum\nolimits_i dm_i = 0$$

$$-\beta \sum\nolimits_i \epsilon_j dm_i = 0$$

لذا تكون المعادل على النحو التالي

$$\sum\nolimits_i \left(\ln \frac{m_i + g_i}{m_i}\right) dm_{i+}\alpha \sum\nolimits_i dm_i - \beta \sum\nolimits_i \epsilon_i dm_i = 0$$

$$\sum\nolimits_i \left\{\ln\left(\frac{m_i + g_i}{m_i}\right) + \alpha - \beta\epsilon_i\right\} dm_i = 0$$

$$\ln\left(\frac{m_i + g_i}{m_i}\right) + \alpha - \beta\epsilon_i = 0$$

$$\frac{m_i + g_i}{m_i} = e^{-\alpha + \beta\epsilon_i}$$

والذي يؤدي الى معادلة توزيع بوز اينشتاين Bose-Einstein Distribution التي تخص الجسيمات المتماثلة ذات البرم الصحيح.

$$m_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha + \beta\epsilon_i} - 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

حيث ان $\alpha = \mu/kT$ وان μ فتمثل الجهد الكيميائي Chemical potential والذي يعرف بـ$\mu = \partial E/\partial N$.

☐ تمرين: ما هو تأثير تغير درجة الحرارة والجهد الكيميائي على نسبة الاشغال؟

☐ تمرين: اثبت انه عندما تكون $m_i \ll g_i$ فان:

$$\Omega \approx \prod_i \frac{g_i^{m_i}}{m_i!}$$