الفصل الاول

احصائية ماكسويل بولتزمان Maxwell Boltzmann Statistics

O مقدمة: يعتمد قانون التوزيع الاحصائي ولأي نظام او حالة على كيفية تعريف ذلك النظام اي العوامل الخاص به وكذلك المؤثرة عليه.

اولا- micro canonical ensemble

يمثل نظام معزول بطاقة ثابتة E وعدد جسيمات N.

ثانيا- Canonical ensemble

النظام يكون في اشبه بالحمام الحراري وبدرجة حرارة ثابتة وعدد جسيمات N.

ثالثا- Grand canonical ensemble

لا يوجد شيء ثابت.

تصنف الجسيمات الى جسيمات متمايزة Distinguishable particles مثل الذرات والجزيئات والارقام والحروف والكائنات الحية واخرى غير متمايزة Indistinguishable particles مثل الالكترونات والبروتونات والنيوترونات والفوتونات. بصورة عامة التمايز يعتمد على وجود الفوارق بين الجسيمات فمثلا الجسيمات المتماثلة الصغيرة وخلال التصادم لا يمكن ان تكون متمايزة لا نها غير متمركزة في مكان محدد اي غير مقيدة Non-localized لان التقيد يعطي صفة التمايز وكما هو الحال في المادة الصلبة المغناطيسية Paramagnetic solid.

معامل ذو الحدين The binomial coefficient

$$^{N}C_{m}=\frac{N!}{m!(N-m)!}$$

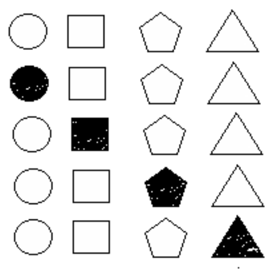
يمثل عدد الطرقِ التي يمكن أن نختار بها m جسيم متمايز من مجموعة تضم N من الأجسام المُتمايّزة.

مثال:

اذا افترضنا N من الأجسام المُتمايّزة. واننا نريد ان نضع m من اللاصقات حمراء على مجموعة منها (كان نريد وضع m من الجسيمات في مكان محدد) والعدد المتبقي $N-m$ نضع له لاصقات خضراء (كان نريد وضع $N-m$ من الجسيمات في مكان محدد اخر). ولتَخصيص جسمَ إلى مجموعة معينة وَضعت لاصقة حمراء أَو خضراء عليه.

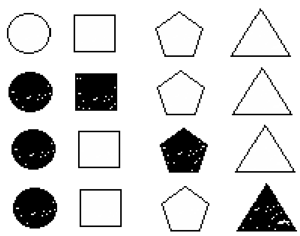
الخطوة الاولى: سنضع اول علامة حمراء على اي جسيم من الجسيمات البالغ عددها N لذا سيكون هنالك N من الاختيارات على اعتبار ان كل جسيم يختلف عن الاخر. مع ملاحظة انه سيتبقى N-1 من الجسيمات بعد هذا الاختيار.

مثال لنظام مكون من اربعة جسيمات



الخطوة الثانية: سنضع علامة حمراء على احد الجسيمات المتبقية والبالغ عددها N-1 اي سيكون هنالك N-1 من الاختيارات.

في المثال السابق ولنفترض اننا قد اخترنا اولا الدائرة فان الاحتمالات المتبقية ستكون



الخطوة الثالثة: سيكون الاختيارات هو N-2.

نستمر حتى تنتهي العلامات الحمراء في الخطوة m حيث يكون عدد الطرق في الاختيارات هو N-m-1.

لكل خطوة هناك اختيار لذى يكون الاختيار الكلي في حالة العلامات الحمراء هو

N(N-1)(N-2)(N-3).....(N-m-1)

اما الاحتمال لكل اختيار ووفق العلاقة $P = \frac{W}{\Omega}$ حيث سيمثل W عدد الجسيمات المراد الاختيار منها اما Ω فستمثل عدد الخطوات:

في الخطوة الاولى: $P(1) = \frac{N}{1}$

في الخطوة الثانية: $P(2) = \frac{N-1}{2}$

في الخطوة الثالثة : $P(3) = \frac{N-2}{3}$

وفي الخطوة m: $P(m) = \frac{N-(m+1)}{m}$

لذا عدد الطرق او الاحتمالات الكلي لاختيار m من الجسيمات المتمايزة يكون

$$P(1)P(2)......P(m) = \frac{N}{1}\frac{N-1}{2}\frac{N-2}{3}...\frac{N-(m+1)}{m}$$

$$P(1)P(2)......P(m) = \frac{N(N-1)(N-2)....N-(m+1)}{1\times 2\times 3....m}$$

$$P(1)P(2)......P(m) = \frac{N(N-1)(N-2)....N-(m+1)}{m!}$$

$$^{N}C_{m} = \frac{N(N-1)(N-2)....(N-(m+1))(N-m)!}{m!(N-m)!}$$

$$^{N}C_{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

مثال: اذا كان لدينا ثلاث جسيمات متمايزة مثل A,B,C ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$^{3}C_{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ أي ان اما A او B او C

$^{3}C_{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ أي ان اما AB او AC او CB

$$^{3}C_{3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}=1$$ أي ان ABC

مثال: اذا كان لدينا خمسة جسيمات متمايزة مثل A,B,C,D,E ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$$^{5}C_{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}=5$$ أي ان اما A او B او C او D او E.

$$^{5}C_{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

$$^{5}C_{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=10$$

$$^{5}C_{4}=\frac{5!}{4!(5-4)!}=5$$

مثال: اذا كان لدينا ستة جسيمات متمايزة مثل A,B,C,D,E,F ونريد ان نختار جسيم ثم جسيمين ثم ثلاث جسيمات فان طرق الاختيار ستكون:

$$^{6}C_{1}=\frac{6!}{1!(6-1)!}=6$$

$$^{6}C_{2}=\frac{6!}{2!(6-2)!}=15$$

$$^6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

$$^6C_4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

$$^6C_5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = 6$$

لنظام معزول له حجم V ومكون من عدد من مستويات الطاقة وكل مستو يحوي عدد من الجسيمات. اذا افترضنا ان هنالك مستو j والذي له طاقة $\in_j$ ويحوي عدد من الجسيمات n_j فان عدد جسيمات N الكلي في هذا النظام والطاقة الكلية له E ثابتتان بحيث ان:

$$N = \sum_j n_j$$

$$E = \sum_j n_j \in_j$$

السؤال في حالة الاتزان الحراري كيف سيكون توزيع الجسيمات على مستويات الطاقة $\in_1, \in_2, \in_3, \ldots \in_j$ ؟ او ماهي نسبة الاشغال لكل مستو طاقة؟ او متى تكون n_j لمستو الطاقة $\in_j$ اعظم ما يمكن؟ وعلى ماذا سيعتمد هذه التوزيع؟

o حساب اعظم قيمة لـn_j

لا يجاد اعظم احتمال للإشغال n_j عند حالة الاتزان الحراري لجسيمات متمايزة يجب ان نجد اعظم توريع للجسيمات Ω. فعند توزيع جسيمات عددها N على مستويات

الطاقة, فان عدد الطرق لاختيار n_1 من الجسيمات المتمايزة لإشغال المستو الاول سيكون

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

وبعد اشغال المستو بـn_1 من الجسيمات فسيبقى $(N-n_1)$ من الجسيمات المتمايزة, لذا سيكون عدد الطرق لاختيار n_2 من الجسيمات المتمايزة المتبقية لإشغال المستو الثاني سيكون

$$\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$$

اما عدد الطرق لإشغال j من المستويات يكون

$$=\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}\times\frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_1-n_2)!}$$

$$\times\frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!\,(N-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{\left(N-n_1-n_2-n_3\cdots n_{j-}\right.}{n_j!\left(n_3N-n_1-n_2-n_3\cdots\right.}$$

$$=\frac{N!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_j!}$$

$$=\frac{N!}{\prod_j n_j!}$$

اذا افترضنا ان المستو j له انحلالية g_j بحيث اي جسيم من n_j يمكن ان يشغل اي واحد من هذه المستويات المنحلة. لذا فان عدد الطرق لتوزيع n_j من الجسيمات على هذه المستوي المنحلة j يكون

$$= g_j^{n_j}$$

اما عند اخذ انحلالية جميع المستويات بنظر الاعتبار فيكون

$$= \prod_j g_j^{n_j}$$

اما الحالة الكلية بعد تضمين انحلالية المستويات فان طرق التوزيع ستكون

$$\Omega = N! \prod_j \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$$

مثال:

اذا كان لدينا ثلاث جسيمات متمايزة A,B,C ونريد اولا ان نملئ مستويين غير منحلين الاول بجسيمين والثاني بجسيم واحد وثم اذا افترضنا ان كل منهما ثنائي الانحلال, فما هي طرق التوزيع؟

الحل:

$$\Omega = N! \prod_j \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$$

اولا بدون انحلالية يكون

$$\Omega = N! \prod_j \frac{1}{n_j!}$$

عدد طرق التوزيع للمستو الاول هي

$$\Omega_1 = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

عدد طرق التوزيع للمستو الثاني هي

$$\Omega_2 = \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_2)!} = \frac{1!}{1!\,1!} = 1$$

ثانيا بوجود الانحلالية يكون

$$\Omega = N! \prod_j \frac{g_j^{n_j}}{n_j!} = N! \prod_j \frac{2_j^{n_j}}{n_j!}$$

عدد طرق التوزيع للمستو الاول هي

$$\Omega_1 = \frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} 2^{n_1} = \frac{3!}{2!\,1!} 2^2 = 12$$

عدد طرق التوزيع للمستو الثاني هي

$$\Omega_2 = \frac{(N-n_1)!}{n_2!\,(N-n_2)!}\,2^{n_2} = \frac{1!}{1!\,1!}\,2^1 = 2$$

مثال: ستة جسيمات متمايزة ومستويان للطاقة الاول انحلاليته اثنان والاخر انحلاليته خمسة. نريد ان نحسب عدد الحالات الكبيرة والدقيقة لهذا النظام؟

هنالك سبعة حالات كبيرة هي

$(6,0), (5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5), (0,6)$, اما الحالات الدقيقة فان لكل حالة من هذه الحالات الكبيرة هنالك حالات دقيقة.

الحالة الكبيرة $(6,0)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(6,0) = \frac{6!}{6!}\,2^6 =$$

الحالة الكبيرة $(5,1)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(5,1) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!}\,g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{5!\,1!}\,2^5 5^1 =$$

الحالة الكبيرة $(4,2)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(4,2) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{4!\,2!} 2^4 5^2 =$$

الحالة الكبيرة $(3,3)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(3,3) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{3!\,3!} 2^3 5^3 =$$

الحالة الكبيرة $(2,4)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(2,4) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{2!\,4!} 2^2 5^4 =$$

الحالة الكبيرة $(1,5)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(1,5) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{1!\,5!} 2^1 5^5 =$$

الحالة الكبيرة $(0,6)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(0,6) = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} = \frac{6!}{0!\,6!} 2^0 5^6 =$$

- **اعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\Omega}$:**

تكون اعظم قيمة لعدد طرق التوزيع عندما يكون كل من الطاقة الكلية وعدد الجسيمات ثابت. فلحجم ثابت فان مستويات الطاقة لا تتغير. لا يجاد اعظم قيمة لـΩ فان :

$$\sum n_j = N$$

و

$$\sum_j n_j \in_j = E$$

عند اعظم قيمة يجب ان

$$d\Omega = 0 \rightarrow d(ln\Omega) = \frac{1}{\Omega} d\Omega = 0$$

لذا سنختار $\ln \Omega$ بدل من Ω لإيجاد اعظم قيمة لطرق التوزيع. بما ان عدد طرق التوزيع هي:

$$\Omega = N! \prod_j \frac{g_j^{n_j}}{n_j!}$$

فباستخدام تقريب ستيرلنك Stirling's approximation الذي ياخذ الشكل التالي:

$$\ln N! = N \ln N - N$$

وذلك عندما تكون N كبيرة فان

$$\ln \Omega = \ln \mathrm{N}! + \sum_j n_j \ln g_j - \sum_j \ln n_j !$$

$$\ln \Omega = N \ln N - N + \sum_j \left(n_j \ln g_j - n_j \ln n_j + n_j\right)$$

$$\ln \Omega = N \ln N + \sum_j \left(n_j \ln(g_j/n_j)\right)$$

هذه النتيجة عندما نفترض ان n_j كبيرة مع ملاحظة ان هذا الافتراض ليس دائما صحيح.
الان اشتقاق المعادلة السابقة يؤدي الى

$$d(\ln \Omega) = \sum_j \left(\ln(g_j/n_j) dn_j - dn_j\right) = 0$$

مع ملاحظة ان

$$\sum_j dn_j = 0 \; (for\ fixed\ N)$$

$$\sum_j \in_j dn_j = 0 \; (for\ fixed\ E)$$

لذا فان المعادلة ستؤول الى الشكل التالي

$$d(\ln \Omega) = \sum_j \left(\ln(g_j/n_j) dn_j\right) = 0$$

$$\ln(g_j/n_j) = 0$$

اذا لكي تكون اعظم ما يمكن يجب تتحقق الحالة التالية

$$\frac{g_j}{n_j} = 1, \qquad g_j = n_j$$

اي ان عدد الجسيمات المتمايزة التي تملئ اي مستو يجب ان تساوي انحلاليته.

الان نعيد تركيب المعادلة وذلك باستخدام مضاريب لاكرانج

$$\alpha \sum_j dn_j = 0$$

$$\beta \sum_j \in_j dn_j = 0$$

لذا تكون المعادلة بالشكل التالي

$$d(\ln \Omega) = \sum_j \left(\ln\left(\frac{g_j}{n_j}\right) dn_j + \alpha dn_j - \beta \epsilon_j dn_j \right) = 0$$

$$\sum_j \left(\ln\left(\frac{g_j}{n_j}\right) + \alpha - \beta \epsilon_j \right) dn_j = 0$$

الحد داخل القوس سيساوي للصفر

$$\ln\left(\frac{g_j}{n_j}\right) + \alpha - \beta\epsilon_j = 0$$

وعند حل المعادلة لإيجاد n_j يكون

$$n_j = g_j e^{\alpha} e^{-\beta\epsilon_j}$$

عند اخذ المجموع على الطرفي المعادلة

$$\sum_j n_j = \sum_j g_j e^{\alpha} e^{-\beta\epsilon_j}$$

$$\mathrm{N} = e^{\alpha} \sum_j g_j e^{-\beta\epsilon_j}$$

$$e^{\alpha} = \frac{N}{\sum_j g_j e^{-\beta\epsilon_j}} = \frac{N}{Z}$$

ذحيث تعرف Z بدالة التجزئة Partition function. وبذلك تصبح المعادلة بالشكل التالي

$$n_j = \frac{N g_j}{Z} e^{-\beta\epsilon_j}$$

وتعرف هذه المعادلة بدالة توزيع ماكسويل بولتزمان Maxwell-Boltzmann Distribution.

سؤال: ما هو تأثير درجة الحرارة على عدد الجسيمات في مستويات الطاقة؟ ما هو تأثير طاقة المستويات على نسبة الاشغال؟ ما هو تأثير الانحلالية؟

سؤال: اثبت ان $\beta = \frac{1}{KT}$

مثال: اذا افترضنا وجود مستويين طاقة احدهما اكبر من الاخر. اثبت ان عدد الاشغال في المستو ذي الطاقة الاقل يمتلك اكبر نسبة اشغال؟ ملاحظة $(T > 0)$

الحل: عدد الجسيمات في المستوي الاول والثاني كما يلي

$$n_1 = \frac{Ng_1}{Z} e^{-\beta\epsilon_1} \rightarrow \epsilon_1 = \beta \ln \frac{Ng_1}{Zn_1}$$

$$n_2 = \frac{Ng_2}{Z} e^{-\beta\epsilon_2} \rightarrow \epsilon_2 = \beta \ln \frac{Ng_2}{Zn_2}$$

بمان $\epsilon_2 > \epsilon_1$ اذا

$$\beta \ln \frac{Ng_2}{Zn_2} > \beta \ln \frac{Ng_1}{Zn_1}$$

$$n_1 > n_2 \left(\frac{g_1}{g_2}\right) \rightarrow n_1 > n_2 \; if \; g_1 = g_2$$

تمرين: اثبت ان في درجة الصفر المطلق فان جميع الجسيمات المتمايزة ستكون في الحالة الارضية؟

مثال: اذا افترضنا مستويين للطاقة (n_2, n_1) لهما انحلالية متساوية. اثبت ان عند الحدود الكلاسيكية فان $n_2/n_1 = 2.72$.

الحل: من معادلة التوزيع لماكسويل بولتزمان

$$n_1 = \frac{Ng_1}{Z} e^{-\beta\epsilon_1} \to \epsilon_1 = \beta \ln \frac{Ng_1}{Zn_1}$$

$$n_2 = \frac{Ng_2}{Z} e^{-\beta\epsilon_2} \to \epsilon_2 = \beta \ln \frac{Ng_2}{Zn_2}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{Ng_2}{Z} e^{-\beta\epsilon_2}}{\frac{Ng_1}{Z} e^{-\beta\epsilon_1}} = e^{\beta(\epsilon_1 - \epsilon_2)} = e^{\beta\Delta\in}$$

عند الحدود الكلاسيكية فان $\Delta\in \sim kT$ اي ان

$$\frac{n_2}{n_1} = e = 2.72$$

مثال: هل يمكن عكس نسبة الجسيمات في الليزرات؟ افترض ان الانحلالية متساوية.

الحل: في الليزرات تكون جميع الجسيمات تقريبا في الحالة الارضية, اي ان $n_1 \gg n_2$, فهل يمكن قبل النسبة دون عملية الضخ؟

من معادلة التوزيع لماكسويل بولتزمان

$$n_1 = \frac{Ng_1}{Z} e^{-\beta\epsilon_1}$$

$$n_2 = \frac{Ng_2}{Z} e^{-\beta\epsilon_2}$$

واذا افترضنا ان $n_1 < n_2$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{Ng_2}{Z} e^{-\beta\epsilon_2}}{\frac{Ng_1}{Z} e^{-\beta\epsilon_1}} = \frac{e^{-\beta\epsilon_2}}{e^{-\beta\epsilon_1}} > 1$$

$$e^{-\beta\epsilon_2} > e^{-\beta\epsilon_1} \to -\frac{\epsilon_2}{kT} > -\frac{\epsilon_1}{kT}$$

بما ان $k > 0$ وان $\epsilon_2 > \epsilon_1$ فان المعادلة تصح فقط عندما $T < 0$ وهذا غير ممكن. اذا لا يمكن قلب النسبة بدون مؤثر خارجي.

تمرين: ماهي الشروط التي تحدد صحة المتراجحة التالية اذا كانت انحلالية جميع المستويات متساوية.

$$\frac{n_1}{n_2} > \frac{n_2}{n_3} > \frac{n_3}{n_4} > \cdots > \frac{n_k}{n_{k+1}} > \cdots$$

تمرين: متى تكون العلاقة التالية صحيحة, اذا كانت انحلالية جميع المستويات متساوية.

$$n_1 > n_2 + n_3$$

n_j ليست دائما كبيرة

اذا كان العدد الكلي للمستويات صغير ودرجة الحرارة كبيرة فان كل مستوي سيمتلك عدد من الجسيمات وهكذا بالنسبة لـn_j الكبيرة, لذا يكون تطبيق تقريب سترنلك ممكن. اذا

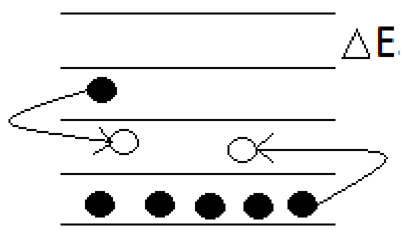
كان عدد من المستويات موجود فان المستويات السفلى ستمتلك عدد اشغال كبير n_j بينما المستويات العليا ستمتلك عدد اشغال صغير. عدد من المستويات العليا التي لها n_j صغيرة سينتج عنة $\ln n_j! \approx 0$.

حتمال الاكثر $\tilde{n}_j$

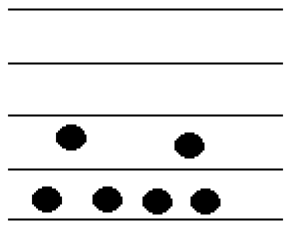
عندما يكون هنالك اكثر من توزيع Ω_1 ممكن ولنفس النظام n_1 وعلى النحو التالي حيث تكون طرق التوزيعات مختلفة ولنفس المستوي $\Omega_1', \Omega_1'', \Omega_1''', \cdots$ والتي تقابل اشغال مختلفة ولنفس المستوي $n_1', n_1'', n_1''', \cdots$. لذا يتم اخذ معدل لهذه التغيرات ليعرف الشغال الاكثر احتمال

$$\tilde{n}_j = \frac{\sum_j n_i \Omega_i(n_i)}{\sum_j \Omega_i(n_i)}$$

مثال: اذا افترضنا خمسة مستويات احادية الانحلال وكل مستوي يفصله عن المستوي المجاور له طاقة ΔE وان هنالك ستة جسيمات متمايزة التفاعل بينها ضعيف جدا.



نزول جسيم من المستوي الثالث سيحرر طاقة ΔE ستسمح لاحد جسيمات المستوي الاول بالصعود الى المستوي الثاني لينتج بذل توزيع جديد



حساب الحالات الدقيقة للحالة الاولى الكبيرة $(5,0,1,0,0)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(5,0,1,0,0) = \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!\, n_5!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} g_4^{n_4} g_5^{n_5} = \frac{6!}{5!\, 0!\, 1!\, 0!\, 0!} 1^5 1^0 1^1 1^0 1^0 = 6$$

حساب الحالات الدقيقة للحالة الثانية الكبيرة $(4,2,0,0,0)$ تكوت حالاتها الدقيقة هي

$$\Omega(4,2,0,0,0) = \frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!\, n_5!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} g_4^{n_4} g_5^{n_5} = \frac{6!}{4!\, 2!\, 0!\, 0!\, 0!} 1^4 1^2 1^0 1^0 1^0 = 15$$

الان فان كل مستو له قيمتين لعدد الاشغال لذا يجب نأخذ المعدل او وزن الحالات الدقيقة

$$\tilde{n}_j = \frac{\sum_j n_i \Omega_i(n_i)}{\sum_j \Omega_i(n_i)}$$

لذا فللمستوي الاول يكون الاشغال

$$\tilde{n}_1 = \frac{5 \times 6 + 4 \times 15}{6 + 15} = 4.29$$

وللمستوي الثاني يكون الاشغال

$$\tilde{n}_2 = \frac{0 \times 6 + 2 \times 15}{6 + 15} = 1.43$$

وللمستوي الثالث يكون الاشغال

$$\tilde{n}_3 = \frac{1 \times 6 + 0 \times 15}{6 + 15} = 0.29$$

وللمستوي الرابع يكون الاشغال

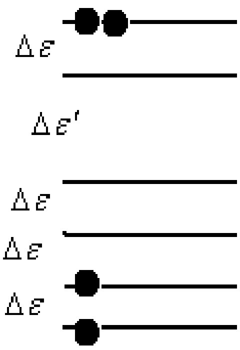
$$\tilde{n}_4 = \frac{0 \times 6 + 0 \times 15}{6 + 15} = 0$$

وللمستوي الخامس يكون الاشغال

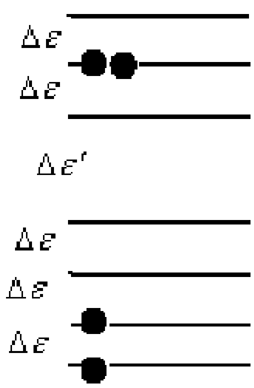
$$\tilde{n}_5 = \frac{0 \times 6 + 0 \times 15}{6 + 15} = 0$$

اما المجموع فيكون $\sum_j \tilde{n}_j = 6$

تمرين: اذا افترضنا نظام معزول يحتوي على اربعة جسيمات متمايزة موزعة كما في الشكل التالي. وان كل مستوي له انحلالية ثنائية. اذا حدث تغيرات داخلية لهذا النظام, فما هو الاشغال الاكثر احتمالاً $\overline{n_j}$ لكل من المستويات؟



تمرين: اذا افترضنا نظام معزول يحتوي على اربعة جسيمات متمايزة موزعة كما في الشكل التالي. وان المستويات الاولى لها انحلالية ثنائية , اما المستويات الثلاث الاخرى فلها انحلالية ثلاثية. اذا حدث ان امتص هذا النظام طاقة مقدارها $\Delta\varepsilon$. فما هو التوزيع المتوازن لهذه المستويات؟



الحالات الكبيرة الاخرى:

كيف ستتغير Ω عندما تكون هنالك حالات كبيرة اخرة؟ اذا افترضنا ان Ω تمثل عدد طرق التوزيع لـ$\bar{n}_j$ فهل ستتغير Ω عندما يكون هنالك توزيع اخر مثل n_j؟ بحيث ان الفرق بينهما يكون وفق المعادلة التالية

$$n_j = \bar{n}_j + \delta n_j$$

من معادلة سابقة

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - N + \sum_j (n_j \ln g_j - n_j \ln n_j + n_j)$$

حيث سنهمل الانحلالية للسهولة لتصبح بالشكل التالي

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - N - \sum_j (n_j \ln n_j - n_j)$$

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j (n_j \ln n_j)$$

بتعويض عن n_j بـ $\bar{n}_j + \delta n_j$ يكون

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j (\bar{n}_j + \delta n_j) \ln(\bar{n}_j + \delta n_j)$$

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j (\bar{n}_j + \delta n_j) \ln\left(\bar{n}_j \left(1 + \frac{\delta n_j}{\bar{n}_j}\right)\right)$$

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j (\bar{n}_j + \delta n_j) \left\{ \ln \bar{n}_j + \ln \left(1 + \frac{\delta n_j}{\bar{n}_j} \right) \right\}$$

الان نستخدم مفكوك اللوغاريتم

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j (\bar{n}_j + \delta n_j) \left\{ \ln \bar{n}_j + \frac{\delta n_j}{\bar{n}_j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta n_j}{\bar{n}_j} \right)^2 + \cdots \right\}$$

$$
\begin{aligned}
\ln \Omega(n_j) \\
&= N \ln N \\
&- \sum_j \bar{n}_j \left\{ \ln \bar{n}_j + \frac{\delta n_j}{\bar{n}_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta n_j}{\bar{n}_j}\right)^2 \right. \\
&\left. + \cdots \right\} \\
&+ \delta n_j \left\{ \ln \bar{n}_j + \frac{\delta n_j}{\bar{n}_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta n_j}{\bar{n}_j}\right)^2 + \cdots \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln \Omega(n_j) \\
&= N \ln N \\
&- \sum_j \left(\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + \delta n_j - \frac{1}{2}\frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots \right. \\
&+ \delta n_j \ln \bar{n}_j + \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} - \frac{1}{2}\frac{(\delta n_j)^3}{\bar{n}_j} \\
&\left. + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j \left(\bar{n}_j \ln \bar{n}_j + \delta n_j + \delta n_j \ln \bar{n}_j + \frac{1}{2} \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots \right)$$

$$\ln \Omega(n_j) = N \ln N - \sum_j \bar{n}_j \ln \bar{n}_j - \sum_j \delta n_j - \sum\nolimits_j \delta n_j \ln \bar{n}_j - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots$$

الحد الاول والثاني سيمثل

$$\ln \Omega(\bar{n}_j) = N \ln N - \sum_j \bar{n}_j \ln \bar{n}_j$$

وان $\sum_j \delta n_j = 0$ و كذلك $\sum_j \delta n_j \in_j = 0$ مع ملاحظة ان $\bar{n}_j =$ $\frac{N}{Z} e^{-\frac{\epsilon_j}{kT}}$ لذا تصبح المعادلة بالشكل التالي

$$\ln \Omega(n_j) = \ln \Omega(\bar{n}_j) - \sum_j \delta n_j \left(\ln \frac{N}{Z} - \frac{\epsilon_j}{kT} \right) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots$$

$$\ln \Omega(n_j) = \ln \Omega(\bar{n}_j) - \ln \frac{N}{Z} \sum\nolimits_j \delta n_j + \frac{1}{kT} \sum_j \delta n_j \epsilon_j - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots$$

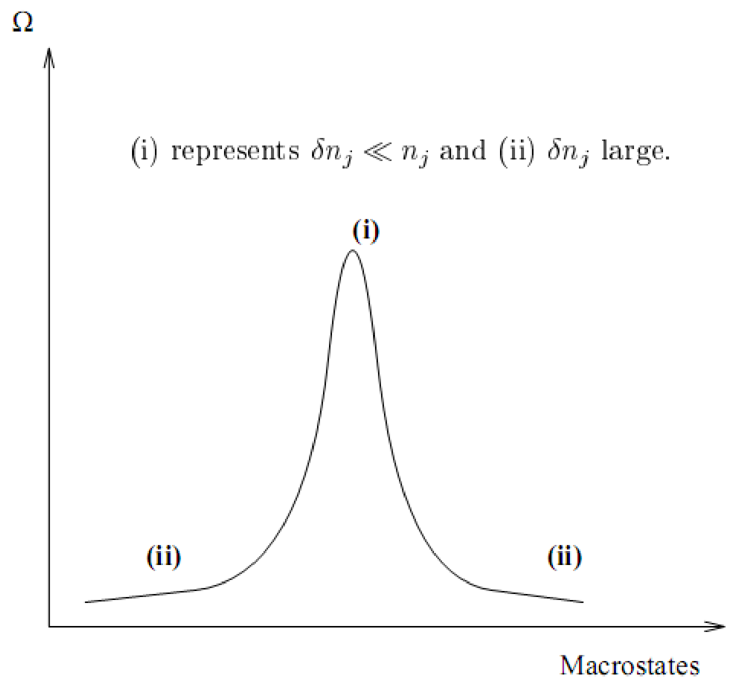
$$\ln \Omega(n_j) = \ln \Omega(\bar{n}_j) - \frac{1}{2} \sum_j \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots$$

بأخذ معكوس اللوغاريتم للطرفين نحص على

$$\Omega(n_j) = \Omega(\bar{n}_j) e^{-\frac{1}{2} \sum_j \frac{(\delta n_j)^2}{\bar{n}_j} + \cdots}$$

نلاحظ ان $\Omega(n_j) = \Omega(\bar{n}_j)$ فقط عندما $\delta n_j = 0$ او $\bar{n}_j$ كبيرة جدا.

وتكون $\Omega(n_j) = 0$ عندما تكون $\delta n_j \geq \sqrt{\bar{n}_j}$.



تمرين: الحالات الكبيرة الاخرى كيف ستتغير Ω عندما تكون هنالك حالات كبيرة اخرة؟ اذا افترضنا ان Ω تمثل عدد طرق التوزيع لـ$\bar{n}_j$ فهل ستتغير Ω عندما يكون هنالك توزيع اخر مثل n_j؟ بحيث ان الفرق بينهما يكون وفق المعادلة التالية $n_j = \bar{n}_j - \delta n_j$.