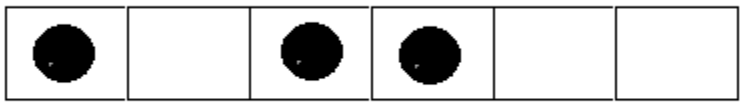
الفصل ارابع

الجسيمات غير المتمايزة Indistinguishable Particles

توزيع فيرمي ديراك للفرميونات Fermi-Dirac Distribution for Fermions

□ توزيع فيرمي ديراك للفرميونات Fermi-Dirac Distribution for Fermions

في حالة الفرميونات فان هنالك حالتين هما الصفر او الواحد للجسيم اي لا يوجد الكترون او يوجد الكترون لكل حالة كمية وحسب مبدا الاستبعاد لباولي. الان اذا اردنا ان نوزع m_i من الجسيمات الخاضعة لمبد باولي فانه يجب ان لا تكون الانحلالية g_i اقل m_i.



عدد الطرق لإشغال m_i في الصناديق ومن اصل g_i سيكون:

$$\Omega_i = \frac{g_i!}{m_i!\,(g_i - m_i)!}$$

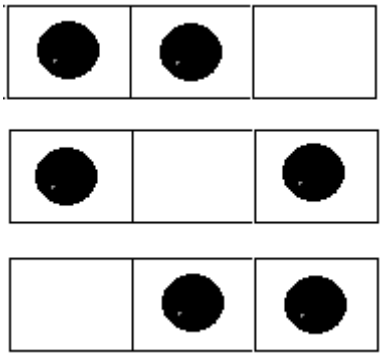
لذلك فان

$$\Omega = \prod_i \frac{g_i!}{m_i!\,(g_i - m_i)!}$$

مثال: اذا اردنا توزيع الكترونين فقط على المدار ذو الانحلالية الثلاثية $2p$ قيكون

$$\Omega = \frac{g_i!}{m_i!\,(g_i - m_i)!} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

وكما في الشكل التالي



لنظام معزول فان عدد الجسيمات والطاقة الكلية هما كما يلي

$$\sum_i m_i = N$$

$$\sum_i \epsilon_i m_i = E$$

عند اخذ لوغاريتم طرفي معادلة طرق التوزيع يكون

$$\ln \Omega = \sum_i \{g_i \ln(g_i) - m_i \ln m_i - (g_i - m_i)\ln(g_i - m_i)\}$$

حيث ان $1 \ll m_i \ll g_i$

$$\mathrm{dln}\,\Omega = \sum_i \{-dm_i \ln m_i - dm_i + dm_i \ln(g_i - m_i) + dm_i\}$$

$$\mathrm{dln}\,\Omega = \sum_i \left\{\ln\left(\frac{g_i - m_i}{m_i}\right) dm_i\right\} = 0$$

اذا كان

$$\ln\left(\frac{g_i - m_i}{m_i}\right) = 0$$

فان

$$\frac{g_i - m_i}{m_i} = 1 \rightarrow g_i = 2m_i$$

اذا الانحلالية يجب ان تكون ضعف عدد الجسيمات وهذا غير صحيح. لذا نستخدم مضاريب لاكرانج في بناء معادلة جديدة بحيث ان

$$\alpha \sum_i dm_i = 0$$

$$-\beta \sum_i \epsilon_j dm_i = 0$$

لذا تكون المعادل على النحو التالي

$$\sum_i \ln\left(\frac{g_i - m_i}{m_i}\right) dm_i + \alpha \sum_i dm_i - \beta \sum_i \epsilon_i dm_i = 0$$

$$\sum_i \left\{\ln\left(\frac{g_i - m_i}{m_i}\right) + \alpha - \beta\epsilon_i\right\} dm_i = 0$$

$$\ln\left(\frac{g_i - m_i}{m_i}\right) + \alpha - \beta\epsilon_i = 0$$

$$\frac{g_i - m_i}{m_i} = e^{-\alpha + \beta\epsilon_i}$$

$$m_i = \frac{g_i}{e^{-\alpha+\beta\epsilon_i}+1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}+1}$$

والذي يؤدي الى معادلة توزيع فيرمي ديراك Fermi-Dirac Distribution التي تخص الجسيمات المتماثلة ذات البرم الغير صحيح. حيث ان $\alpha = \mu/kT$ وان μ فتمثل الجهد الكيميائي Chemical potential والذي يعرف بـ $\mu = \partial E/\partial N$.

☐ تمرين: ما هو تأثير تغير درجة الحرارة والجهد الكيميائي على نسبة الاشغال؟

☐ تمرين: كيف ستكون معادلة طرق التوزيع عندما تكون $m_i \ll g_i$:

$$\Omega \approx ?$$