الفصل العاشر

تحويلات لابلاس

LAPLACE TRANSFORMATIONS

10.1 مقدمة :

تعتبر تحويلات لابلاس طريقة مهمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية ومسائل ذات القيم الحدودية والقيم الابتدائية التي تظهر في الكثير من التطبيقات الهندسية، حيث يتم تحويل المعادلة التفاضلية الاعتيادية الى معادلة جبرية والتي ستكون اسهل للحل. وباستعمال تحويل لابلاس نتمكن من توفير الكثير من الوقت والجهد عند حل المعادلات وذلك لتوفر جداول خاصة بتحويل لابلاس باستطاعتنا استعمالها. بالإضافة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية يمكننا استعمال طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية أيضا.

ويمكن إجمال فوائد تحويلات لابلاس كما يلي :

أولاً : حل المعادلات الجبرية بدلا من المعادلات التفاضلية.

ثانياً : إيجاد الحل مباشرة دون اللجوء إلى الحل العام ومن ثم تطبيق القيم الحدودية أو الابتدائية.

ثالثاً : يمكن الحصول على الحل للمعادلات التي تكون غير متجانسة (Non-Homogeneous) مباشرة دون حل الجزء المتجانس أولاً كما هو معتاد.

رابعاً : تمكننا من التعامل مع الحالات التي تكون فيها الدالة متقطعة الاستمرارية (Piecewise Continuous).

10.2 تعريف تحويلات لابلاس Definition of Laplace Transforms

نفرض أن الدالة $f(t)$ معرفة لجميع قيم $t > 0$ فيكون التكامل $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ إذا كان موجود [أي الدالة $f(t)$ مستمرة والغاية $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t)$ محددة]، هو دالة لـ (s) ولتكن $F(s)$.

الدالة $F(s)$ يطلق عليها تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}\{f(t)\}$ وكما يلي :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.f(t)\,dt$$

حيث ان s تمثل وسيطا حقيقيا أو مركبا. بشكل عام للحصول على تحويل لابلاس لأي دالة $f(t)$ نضرب الدالة بـ e^{-st} ونكامل من (0) إلى (∞). هذه العملية تدعى تحويل لابلاس .

10.3 تحويل لابلاس لبعض الدوال الأولية

Laplace Transforms of some Elementary Function

(1) $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}.1\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad (s > 0)$

(2) $\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty e^{-st}.t\,dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad (s > 0)$

(3) $\mathcal{L}(t^2) = \int_0^\infty e^{-st}.t^2\,dt = \left[t^2\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (2t)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-st}}{-s^3}\right)\right]_0^\infty$

$$= \left[\frac{-t^2}{s\,e^{st}} - \frac{2t}{s^2e^{st}} - \frac{2}{s^3e^{st}}\right]_0^\infty = \frac{2}{s^3} \qquad (s > 0)$$

(4) $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt;\ dt = \frac{dy}{s}$

ضع $st = y,\ dt = \frac{dy}{s}$:

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-y}\frac{y^n}{s^n}\cdot\frac{dt}{s} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad \text{if } (s > 0)$$

إذا كانت (n) عدد صحيح فإن :

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(5) $\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \qquad (s > a)$

$$(6)\ \mathscr{L}(\sin at)=\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at-a\cos at)\right]_0^\infty=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$(7)\ \mathscr{L}(\cos at)=\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos at+a\sin at)\right]_0^\infty=\frac{s}{s^2+a^2}$$

طريقة بديلة .

بالاعتماد على ما تم الحصول عليه في (5) فان : $\mathscr{L}(e^{iat})=\dfrac{1}{s-ia}$

أو : $\mathscr{L}(\cos at+i\sin at)=\dfrac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)}=\dfrac{s+ia}{s^2+a^2}$

أو : $\mathscr{L}(\cos at)+i\,\mathscr{L}(\sin at)=\dfrac{s}{s^2+a^2}+i\dfrac{a}{s^2+a^2}$

وبعد مقارنة الجزء الحقيقي والخيالي نحصل على :

$$\mathscr{L}(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}\quad ; \quad \mathscr{L}(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$(8)\ \mathscr{L}(\sinh at)=\mathscr{L}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\mathscr{L}(e^{at})-\mathscr{L}(e^{-at})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2}$$

وباتباع نفس الأسلوب في (8) نحصل على :

$$(9)\ \mathscr{L}(\cosh at)=\frac{s}{s^2-a^2}$$

إذن نتائج تحويلات لابلاس للدوال أعلاه يمكن اجمالها في الجدول التالي :

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2!}{s^3}$

t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

10.4 بعض الخواص المهمة لتحويل لابلاس :

أولاً : الخاصية الخطية Linearity Property

إذا كانت a،b ثوابت فإن :

$$\mathcal{L}[a\,f(t)+b\phi(t)]=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[\phi(t)]$$

البرهان :

$$\mathcal{L}[a\,f(t)+b\phi(t)]=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+b\phi(t)]dt=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt$$

$$=a\mathcal{L}[f(t)]+b\mathcal{L}[\phi(t)]$$

Ex. 1:

Find $\mathcal{L}[4t^3+7t-8+2e^{-5t}+10\sin 3t+5\cosh 2t]$?

الحل :

بإستخدام الصيغة الخطية نحصل على :

$$\mathcal{L}[4t^3+7t-8+2e^{-5t}+10\sin 3t+5\cosh 2t]=4\mathcal{L}[t^3]+7\mathcal{L}[t]-8\mathcal{L}[1]+$$
$$2\mathcal{L}[e^{-5t}]+10\mathcal{L}[\sin 3t]+5\mathcal{L}[\cosh 2t]$$
$$=4.\frac{3!}{s^4}+7.\frac{1}{s^2}-8.\frac{1}{s}+2.\frac{1}{s+5}+10.\frac{3}{s^2+9}+5.\frac{s}{s^2-4}$$
$$=\frac{24}{s^4}+\frac{7}{s^2}-\frac{8}{s}+\frac{2}{s+5}+\frac{30}{s^2+9}+\frac{5s}{s^2-4}$$

Ex. 2 :

Find the Laplace transforms of :

(i) $(2t^2-1)^2$ (ii) $\cos^3 t$ (iii) $\sinh^2 2t$ (iv) $\sin 3t \cos 4t$

الحل :

$$(i)\ \mathcal{L}[2t^2-1]^2=\mathcal{L}[4t^4-4t^2+1]=4\mathcal{L}[t^4]-4\mathcal{L}[t^2]+\mathcal{L}[1]$$

$$=4\cdot\frac{4!}{s^5}-4\cdot\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{s}=\frac{1}{s^5}(96-8s^2+s^4)$$

$$(ii)\ \mathcal{L}\left[\cos^3 t\right]=\mathcal{L}\left[\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right]=\frac{1}{4}\mathcal{L}\left[\cos 3t\right]+\frac{3}{4}\mathcal{L}\left[\cos t\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\frac{s^3+7s}{(s^2+9)(s^2+1)}$$

$$(iii)\ \mathcal{L}\left[\sinh^2 2t\right]=\mathcal{L}\left(\frac{\cosh 4t-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\cosh 4t)-\mathcal{L}(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-16}-\frac{1}{s}\right]=\frac{8}{s(s^2-16)}$$

$$(iv)\ \mathcal{L}[\sin 3t\ \cos 4t]=\mathcal{L}\left[\frac{\sin 7t-\sin t}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\sin 7t)-\mathcal{L}(\sin t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{7}{s^2+49}-\frac{1}{s^2+1}\right]=\frac{3s^2-21}{(s^2+1)(s^2+49)}$$

ثانياً : خاصية الإزاحة الأولى First Shifting Property

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$

البرهان :

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$\therefore F(s)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cdot f(t)\cdot dt=\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}f(t)]dt=\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$$

وتبعا لهذه الخاصية يمكن الحصول على النتائج التالية كما مبينة في الجدول :

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at}t^{n}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\sinh bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at}\cosh bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$

Ex.(3) :

Evaluate :

$$(i)\mathcal{L}\{t^{n}e^{-at}\} \quad (ii)\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 4t\} \quad (iii)\mathcal{L}\{\cosh at\cos at\}$$

$$(i)\mathcal{L}\{t^{n}\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

باستخدام خاصية الإزاحة الأولى نحصل على :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}t^{n}\}=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$$(ii)\mathcal{L}\{\sin 4t\}=\frac{4}{s^2+16}$$

باستخدام خاصية الإزاحة الأولى نحصل على :

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 4t\}=\frac{4}{(s-3)^2+16}=\frac{4}{s^2-6s+25}$$

$$(iii)\mathcal{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\cosh at\ \cos at\}=\mathcal{L}\left\{\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)\cos at\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{at}\cos at\}+\mathcal{L}\{e^{-at}\cos at\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2}+\frac{s+a}{(s+a)^2+a^2}\right]=\frac{s^3}{s^4+4a^4}$$

ثالثاً : تحويل لابلاس للمشتقات **Laplace Transforms of Derivatives**

إذا كان $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن :

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\,\mathscr{L}f(t) - f(0) = sF(s) - f(0)$$

البرهان :

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= -f(0) + sL\{f(t)\} = -f(0) + sF(s)$$

$$\therefore L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

وتبعاً لذلك يمكن الاستنتاج بأن :

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

وكذلك فإن :

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

وبصورة عامة :

$$\mathscr{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

رابعاً : تحويل لابلاس للتكاملات **Laplace Transform of Integrals**

إذا كان $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$

البرهان :

نفرض أن : $\phi(t) = \int_0^t f(u)du$

$$\therefore \phi'(t) = f(t) \text{ and } \phi(0) = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

والآن : $\mathscr{L}\{\phi'(t)\} = s\mathscr{L}\{\phi(t)\} - \phi(0)$

أو : $\mathscr{L}\{f(t)\} = s\mathscr{L}\{\phi(t)\}$ by(1)

$$F(s) = s\,\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

$$\therefore \int_0^t f(u)du = \frac{F(s)}{s}$$

خامساً : الضرب في (t) Multiplying by (t)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن $\mathcal{L}\{tf(t)\}=-\dfrac{d}{ds}F(s)$

البرهان :

عن طريق التعريف :
$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

بتفاضل الطرفين نسبة الى (s) نحصل على :

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\cdot e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt=-\int_0^\infty e^{-st}\{t\cdot f(t)\}dt=-\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}\cdots\cdots(4)$$

إذن :
$$\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s)$$

وتبعاً لذلك فإن :
$$\mathcal{L}\{t^2f(t)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

وكذلك :
$$\mathcal{L}\{t^3f(t)\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}F(s)$$

وبصورة عامة :
$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

سادساً : القسمة على (t) Dividing by (t)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)ds$

البرهان :

$$\because F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

بتكامل الطرفين نسبة الى (s) من (s الى ∞) نحصل على :

$$\int_s^\infty F(s)ds=\int_s^\infty\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\right]ds$$

يمكن تغيير التكامل في الطرف الأيمن وبالشكل :

$$\int_s^{\infty} F(s)\,ds=\int_{t=0}^{\infty}\int_{s}^{\infty} e^{-st} f(t)\,ds\,dt=\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-t}\right]_s^{\infty} f(t)\,dt=\int_0^{\infty} e^{-st}\left[\frac{f(t)}{t}\right]dt=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}$$

إذن :
$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty} F(s)ds$$

Ex.4 :

Evaluate : (i)$\mathcal{L}\{t\cdot\cos at\}$ (ii)$\mathcal{L}\{t^2\sin t\}$

الحل :

(i)$\mathcal{L}\{t\cdot\cos at\}$

لذلك :
$$\mathcal{L}\{t\cdot\cos at\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=\frac{-\left(s^2+a^2\right)-s(2s)}{\left(s^2+a^2\right)^2}=\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

$$(ii)\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore\mathcal{L}\{t^2\sin t\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right]=\frac{6s^2-2}{\left(s^2+1\right)^3}$$

Ex.5 :

Evaluate : $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}$

الحل :

لكون :
$$\mathcal{L}\{e^{-at}-e^{-bt}\}=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$$

إذن :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}=\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\left[\ln(s+a)-\ln(s+b)\right]_s^{\infty}=-\ln\frac{s+a}{s+b}=\ln\frac{s+b}{s+a}$$

10.5 تحويلات لابلاس المعكوسة Inverse Laplace Transforms

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن $f(t)$ يطلق عليها معكوس تحويل لابلاس للدالة $F(s)$ ويمكن كتابة ذلك بالشكل : $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ، فمثلا ما دام $\mathcal{L}\{3t\}=\frac{3}{s^2}$ فإن $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2}\right\}=3t$

وكذلك فإن $e^{5t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5}\right\}$.

وتبعا لهذا المفهوم يمكن كتابة تحويلات لابلاس المعكوسة للدوال ادناه وكما يلي :

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\dfrac{1}{s}$	1
$\dfrac{1}{s^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n=1,2,3,\cdots)$
$\dfrac{1}{(s-a)^n}$	$e^{at}\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sin at$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{at}\sin bt$

توجد عدة طرق متاحة لإيجاد تحويلات لابلاس المعكوسة للدوال المعطاة. أهم هذه الطرق هي طريقة تجزئة الكسور (Method of Partial Fractions)، حيث يتم تحليل للدالة الى كسور جزئية ومن ثم يتم اخذ التحويلات المعكوسة والتي تكون سهلة للحل.

Ex.6:

Find the inverse Laplace transforms of :

$$(i)\ \frac{2s-11}{s^2-4s+8} \qquad (ii)\ \frac{3s+7}{s^2+6s+9}$$

الحل :

$$(i)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{s^2-4s+8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s-2)^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-2)-7}{(s-2)^2+4}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2}\right\} - \frac{7}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+2^2}\right\}$$

$$= 2e^{2t}\cos 2t - \frac{7}{2}e^{2t}\sin 2t = \frac{e^{2t}}{2}(4\cos 2t - 7\sin 2t)$$

$$(ii)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2+6s+9}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s+3)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+3)-2}{(s+3)^2}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+3}\right\}-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}=3e^{-3t}-2e^{-3t}.t=e^{-3t}(3-2t)$$

__Ex. 7:__

Find the inverse of Laplace transforms of :

$$(i)\ \frac{3s+7}{s^2-2s-3} \qquad (ii)\ \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$$

__الحل :__

$$(i)\ \frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}$$

بعد ضرب كلا الطرفين في (s+1) (s-3) نحصل على :

$$3s+7=(A+B)s+A-3B$$

وبمساواة المعاملات $3=A+B$; $7=A-3B$ ومن ثم الحل نحصل على (B=-1) و (A=4) :

$$\therefore \frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}=4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=4e^{3t}-e^{-t}$$

الحل :

$$(ii)\ \frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

وبضرب كلا الطرفين في $(s+1)^2(s^2+1)$:

$$s=A(s^2+1)+B(s+1)(s^2+1)+(Cs+D)(s+1)^2$$

$\therefore$ المعاملات ستكون : $B=-\frac{1}{2}$; $A=0$; $C=0$; $D=\frac{1}{2}$

$$\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}\right\} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t$$

ويمكن الاستفادة أيضا من الخواص التالية لإيجاد تحويلات لابلاس المعكوسة :

(أ)

$$\because \mathscr{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\frac{d}{ds}F(s) = -t \cdot f(t)$$

وبصورة عامة : $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t)$

Ex. 8:

Find : $\mathscr{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^2}$

$$\because \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\because \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\} = -\frac{1}{2}(-1)t\,f(t) = \frac{1}{2}\ t\sin t$$

(ب)

$$\because \mathscr{L}\int_0^t f(u)du = \frac{F(s)}{s}$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$$

Ex.9 :

Find $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

$$\because \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t \sin t\,dt=[-\cos]_0^t=-\cos t+1$$

$$\therefore f(t)=1-\cos t$$

جـ) إذا كان : $\because \mathscr{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$

وعندما تكون $f(0)=0$:

$$\mathscr{L}^{-1}sF(s)=\frac{d}{dt}f(t)=\frac{d}{dt}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{sF(s)\}=\frac{d}{dt}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Ex.10 :

Find $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s+3}\right)$

$$\because \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=e^{-3t}$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+3}\right\}=\frac{d}{dt}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=\frac{d}{dt}\left(e^{-3t}\right)=-3e^{-3t}$$

د) إذا كانت لدينا دالتين : $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)\ ;\ \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t)$

فان : $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(u)g(t-u)du$

وتسمى هذه الخاصية بنظرية التوزيع (Convolution Theorem).

البرهان :

يتم إثبات النتيجة المطلوبة إذا تم برهان :

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)\cdot g(t-u)\cdot du\right]=F(s)\cdot G(s)\ \cdots\cdots(I)$$

حيث أن : $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}\ ;\ G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}$

الطرف الأيسر للمعادلة (1) :

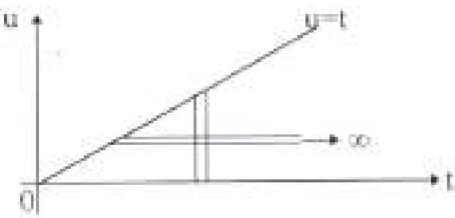
$$= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(u)\cdot g(t-u)\cdot du\,dt = \int_0^\infty\int_0^t e^{-st}\cdot f(u)\cdot g(t-u)\cdot du\,dt$$

بتبديل رتبة التكامل تبعاً للشكل (10.1)، فيصبح هذا التكامل :

$$\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}\cdot f(u)\cdot g(t-u)\cdot du\,dt = \int_0^\infty e^{-su}f(u)\int_u^\infty e^{-s(t-u)}\cdot g(t-u)\cdot du\,dt$$

بوضع $(t-u=\upsilon)$:

$$= \int_0^\infty e^{-su}f(u)\int_0^\infty e^{-s\upsilon}\cdot g(\upsilon)\cdot d\upsilon\,du = \int_0^\infty e^{-su}f(u)\cdot du\cdot G(s) = F(s)\cdot G(S)$$



شكل (10.1)

Ex.11 :

Evaluate : $\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s-a)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2}=t\ ,\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)=e^{at}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s-a)} = t * e^{at} = \int_0^t u\cdot e^{a(t-u)}\,du = e^{at}\int_0^t u\cdot e^{-au}\,du = \frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right)$$

Ex.12 :

Using the convolution theorem, find the inverse transform of :

$$\text{(i)}\ \frac{1}{s(s^2+1)} \qquad \text{(ii)}\ \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \text{(iii)}\ \frac{1}{(s+a)(s+b)}$$

الحل :

$$\text{(i)}\ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s^2+1)} = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s} * \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+1} = 1 * \sin t = \int_0^t \sin u\cdot du = 1-\cos t$$

$$\text{(ii)}\ \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+a^2)^2}=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+a^2}=\cos at\cdot\frac{1}{a}\sin at=\frac{1}{a}\int_0^t \sin au\cdot\cos a(t-u)\cdot du$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\sin at+\sin(2au-at)\right]du$$

$$=\frac{1}{2a}\left[u\cdot\sin at-\frac{1}{2a}\cdot\cos(2au-at)\right]_0^t=\frac{1}{2a}t\cdot\sin at$$

$$\text{(iii)}\ \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+b}\right)=e^{-at}\cdot e^{-bt}$$

$$=\int_0^t e^{-au}\cdot e^{-b(t-u)}du=\int_0^t e^{-[bt+(a-b)u]}du=\left[\frac{e^{-[bt+(a-b)u]}}{-(a-b)}\right]_0^t=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$$

10.6 حل المعادلات التفاضلية بإستخدام تحويلات لابلاس

Solution of Differential Equations by Laplace Transformation

يمكن حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وكذلك الجزئية باستخدام تحويلات لابلاس. وهنا سيتم تناول المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة فقط وتكون خطوات الحل كما يلي :

أولاً : إستخدم تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المعطاة.

ثانياً : إستخدم الشروط الابتدائية لتعطي بعد تبسيطها المعادلة الجبرية.

ثالثاً : حل المعادلة الجبرية بحيث تحصل على (y) بدلالة (s) وتجعل الحل ليكون بالشكل :

$$\mathcal{L}(y)=Y=F(s)$$

رابعاً : طبق تحويل لابلاس المعكوس للطرفين في الخطوة الثالثة ليعطي $y=f(t)$ وهو الحل المطلوب.

Ex.13 :

Solve the equation

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=0\ ,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$$

الحل :

المعادلة المعطاة يمكن أن توضع بالشكل الآتي : $y''-2y'+2y=0$

وبعد أخذ تحويل لابلاس لكلا الطرفين :

$$\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\left[s^2\mathcal{L}y - sy(0) - y'(0)\right] - 2\left[s\mathcal{L}y - y(0)\right] + 2\mathcal{L}y = 0$$

وبعد التعويض بالشروط الابتدائية :

$$s^2\mathcal{L}y - s - 1 - 2s\mathcal{L}y + 2 + 2\mathcal{L}y = 0$$

$$\left(s^2 - 2s - 2\right)\mathcal{L}y = s - 1$$

$$\mathcal{L}y = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

وبعد أخذ معكوس لابلاس لكلا الطرفين :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}(y)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} = y = e^t \cos t$$

Ex.14 :

Solve by Laplace transformation method the following :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 3\cos 3t - 11\sin 3t$$

given that $y(0) = 0$ and $y'(0) = 6$?

<u>الحل :</u>

بعد أخذ تحويل لابلاس لكلا الطرفين نحصل على :

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(\cos 3t) - 11\mathcal{L}(\sin 3t)$$

$$\left[s\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0)\right] + \left[s\mathcal{L}(y) - y(0)\right] - 2\mathcal{L}(y) = 3 \cdot \frac{s}{s^2+9} - 11 \cdot \frac{3}{s^2+9}$$

بعد التعويض للشروط الابتدائية نحصل على :

$$s^2\mathcal{L}(y) - 6 + s\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}(y) = \frac{3s-33}{s^2+9} \quad \left(s^2 + s - 2\right)\mathcal{L}(y) = \frac{3s-33}{s^2+9} + 6$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{6s^2 + 3s + 21}{s^2+9} = \frac{3\left(2s^2 + s + 7\right)}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+s-2\right)} = \frac{3\left(2s^2+s+7\right)}{\left(s^2+9\right)(s+2)(s-1)}$$

وبدلالة الكسر الجزئي :
$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s^2+9}$$

ومن ثم أخذ معكوس لابلاس لكلا الطرفين : $\because y = e^t - e^{-2t} + \sin 3t$

Ex.15:

Solve the integral equation :

$$y+\int_0^t y\,dt = 1-e^{-t}$$

الحل :

$$\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}\left\{\int_0^t y\,dt\right\}=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(e^{-t}) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\because \mathcal{L}\left\{\int_0^t y\,dt\right\}=\frac{\mathcal{L}(y)}{s}$$

ومن ثم المعادلة (1) تختزل الى :

$$\mathcal{L}(y)+\frac{\mathcal{L}(y)}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{\mathcal{L}(y)}{s}(s+1)=\frac{(s+1)-s}{s\,(s+1)}=\frac{1}{s\,(s+1)} \;\therefore\; \mathcal{L}(y)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$y=t\,e^{-t}$$

10.7 المعادلات التفاضلية الخطية الآنية

Simultaneous Linear Differential Equations

يمكن استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلة التفاضلية الخطية الآنية أيضا، حيث يتم تحويلها الى نظام من المعادلات الجبرية الخطية، وبحل هذا النظام ومن ثم أخذ تحويل لابلاس المعكوس ليعطي الحل المطلوب.

Ex.16 :

Solve the following set of simultaneous equations using Laplace transforms :

$$\frac{dx}{dt}+2x-3y=t \quad ; \quad \frac{dy}{dt}-3x+2y=e^{2t}\,,\, t>0$$

where $x=y=0$ at $t=0$?

الحل :

بأخذ تحويلات لابلاس، فيكون لدينا :

$$s\,\mathcal{L}x - x(0) + 2\,\mathcal{L}x - 3\,\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2}$$

$$s\,\mathcal{L}y - y(0) - 3\,\mathcal{L}x + 2\,\mathcal{L}y = \frac{1}{s-2}$$

وبوضع الشروط الابتدائية، وبعد التبسيط نحصل على :

$$(s-2)\,\mathcal{L}x - 3\,\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$-3\,\mathcal{L}x + (s+2)\,\mathcal{L}y = \frac{1}{s-2} \qquad \cdots\cdots(2)$$

وبحل المعادلتين (1)، (2) آنيا نحصل على :

$$\mathcal{L}x = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & -3 \\ \frac{1}{s-2} & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -3 \\ -3 & s+2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad \mathcal{L}y = \frac{\begin{vmatrix} s+2 & \frac{1}{s^2} \\ -3 & \frac{1}{s-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -3 \\ -3 & s+2 \end{vmatrix}}$$

إذن :

$$\mathcal{L}x = \frac{4(s+1)}{(s+5)(s-2)s^2} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{16}{175}\cdot\frac{1}{s+5} - \frac{13}{25}\cdot\frac{1}{s} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}y = \frac{s^2+3s+6}{(s-2)(s+5)s^2} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{16}{175}\cdot\frac{1}{s+5} - \frac{12}{25}\cdot\frac{1}{s} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2}$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعكوس نحصل على :

$$x = \frac{3}{7}\cdot e^{2t} + \frac{16}{175}\cdot e^{-5t} - \frac{13}{25} - \frac{2}{5}\cdot t$$

$$y = \frac{4}{7}\cdot e^{2t} - \frac{16}{175}\cdot e^{-5t} - \frac{12}{125} - \frac{3}{5}\cdot t$$

Ex.17 :

A mechanical system with two degrees of freedom satisfies the equations :

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} = 4 \; ; \; 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} = 0$$

Use Laplace transforms to determine (x) and (y) at any instant, given that $(x, y, \frac{dx}{dy}, \frac{dy}{dt} = 0)$ at $(t = 0)$?

الحل :

نأخذ تحويلات لابلاس للمعادلتين فيكون لدينا :

$$2\{s^2 \mathcal{L}x - sx(0) - x'(0)\} + 3\{s \mathcal{L}y - y(0)\} = \frac{4}{s} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$2\{s^2 \mathcal{L}y - sy(0) - y'(0)\} - 3\{s \mathcal{L}x - x(0)\} = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

وبتعويض الشروط الابتدائية $(x(0) = 0 = y(0) = x'(0) = y'(0))$ نحصل على :

$$2s^2 \mathcal{L}x + 3s \mathcal{L}y = \frac{4}{s}$$

$$2s^2 \mathcal{L}y - 3s \mathcal{L}x = 0$$

أو :

$$2s \mathcal{L}x + 3 \mathcal{L}y = \frac{4}{s^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$3 \mathcal{L}x - 2s \mathcal{L}y = 0 \quad \cdots\cdots(4)$$

وبحل المعادلتين (3) و (4) يكون لدينا :

$$\mathcal{L}x = \frac{8}{s(4s^2 + 9)} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{32}{9} \cdot \frac{s}{4s^2 + 9}$$

$$\mathcal{L}y = \frac{12}{s(4s^2 + 9)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4s^2 + 9}$$

وبأخذ تحويلات لابلاس المعكوس نحصل على :

$$x = \frac{8}{9} \cdot (1 - \cos \frac{3}{2} t) \quad ; \quad y = \frac{8}{9} \cdot (\frac{3}{2} t - \sin \frac{3}{2} t)$$

10.8 تحويلات لابلاس للدوال الدورية

Laplace Transforms of Periodic Functions

نظرية :

إذا كانت $f(t)$ دالة دورية ولها دورة $(T>0)$ فإن :

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt}{1 - e^{-sT}}$$

البرهان :

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

$$= \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + \int_T^{2T} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt +$$

$$\int_{2T}^{3T} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + \cdots \infty \cdots\cdots (1)$$

وبوضع $(t = u+T)$ في التكامل الثاني نحصل على :

$$\int_T^{2T} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + \int_0^T e^{-s(u+T)} \cdot f(u+T) \cdot du$$

$$= e^{-sT} \cdot \int_0^T e^{-su} \cdot f(u) \cdot du$$

وبوضع $(t = u+2T)$ في التكامل الثالث نحصل على :

$$\int_{2T}^{3T} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^T e^{-s(u+2T)} \cdot f(u+2T) \cdot du$$

$$= e^{-2sT} \cdot \int_0^T e^{-su} \cdot f(u) \cdot du$$

وبصورة مشابهة :

$$\int_{3T}^{4T} e^{-st} f(t) dt = e^{-3sT} \int_0^T e^{-su} f(u) du$$

وهكذا، لذلك فانه يمكن كتابة (1) بالشكل التالي :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + e^{-sT} \cdot \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt +$$

$$e^{-2sT} \cdot \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt + \cdots\cdots$$

$$\left[\because \int_0^T e^{-su} \cdot f(u) \cdot du = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt \; ; \cdots\cdots \right]$$

$$= \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \cdots \infty \right] \cdot dt$$

$$= \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot \left[1/(1 - e^{-sT}) \right] \cdot dt$$

$$= \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt/(1 - e^{-sT})$$

Ex.18 :

Find the Laplace transform of :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{when } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{when } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

and f(t) is periodic with period (2π)?

الحل :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{2\pi} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt/(1 - e^{-2\pi s})$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[\int_0^{\pi} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt + 0 \right] = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[\frac{e^{-st}}{1 + s^2} (-s \cdot \sin t - \cos t) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{(1 + s^2)(1 - e^{-2\pi s})} \left[e^{-\pi s} (\cos \pi - 1) \right] = (1 + e^{-\pi s})/(1 + s^2)(1 - e^{-2\pi s})$$

10.9 دالة وحدة الخطوة Unit Step Function :

تعريف :

تعرف دالة وحدة الخطوة $u(t-a)$ بأنها :

$$u(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ 1 & (t\geq a)\end{cases}$$

وعندما تكون (a=0) فإن :

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geq 0)\end{cases}$$

نظرية (1) : $\mathscr{L}\{u(t-a)\}=e^{-as}/s$

البرهان :

$$L\{u(t-a)\}=\int_0^a e^{-st}(0)\cdot dt+\int_a^\infty e^{-st}(1)\cdot dt$$

$$=[e^{-st}/-s]_a^\infty=e^{-as}/s$$

نظرية (2) : نظرية الازاحة الثانية Second Shifting Theorem

إذا كانت $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن :

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

البرهان :

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\}=\int_0^a e^{-st}(0)\cdot dt+\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\cdot dt$$

$$=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\cdot dt=\int_0^\infty e^{-s(a+u)}f(u)\cdot du$$

حيث أن : $t-a=u$

$$=e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\cdot du=e^{-as}F(s)$$

__Ex.19 :__

Express the following functions in terms of units step function :

$$(i)\ f(t)=\begin{cases}8 & (t<2)\\ 6 & (t>2)\end{cases}\quad ;\quad (ii)\ E(t)=\begin{cases}E & (0<t<2)\\ 6 & (t>0)\end{cases}$$

$$(iii)\ f(t)=\begin{cases}t-1 & \text{when}\ (1<t<2)\\ 3-t & \text{when}\ (2<t<3)\end{cases}$$

الحل :

$$(i)\ f(t)=\begin{cases}8 & (t<2)\\ 6 & (t>2)\end{cases}=8+\begin{cases}0 & (t<2)\\ -2 & (t>2)\end{cases}$$

$$=8-2\begin{cases}0 & (t<2)\\ 1 & (t>2)\end{cases}=8-2u(t-2)$$

$$(ii)\ E(t)=\begin{cases}E & (0<t<2)\\ 0 & (t>a)\end{cases}=E\{u(t)-u(t-a)\}$$

$$(iii)\ f(t)=\begin{cases}t-1 & (1<t<2)\\ 3-t & (2<t<3)\end{cases}$$

$$=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]+(3-t)[u(t-2)-u(t-3)]$$

$$=(t-1)\cdot u(t-1)-2(t-2)\cdot u(t-2)+(t-3)\cdot u(t-3)$$

Ex.20 :

Find the Laplace transform of $t^2u(t-3)$?

الحل :

$$t^2u(t-3)=[(t-3)^2-9+6t]\cdot u(t-3)]=[(t-3)^2+6(t-3)+9]\cdot u(t-3)$$

$$\mathscr{L}\{t^2u(t-3)\}=\mathscr{L}[(t-3)^2+6(t-3)-9]\cdot u(t-3)]$$

$$=e^{-3s}\left\{\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right\}=e^{-3s}(2+6s+9s^2)/s^3$$

Ex.21:

Find the inverse Laplace transform of :

$$(i)\ \frac{e^{-2s}}{s-3} \qquad\qquad (ii)\ (s\cdot e^{-s/2}+\pi e^{-s})/(s^2+\pi^2)$$

الحل :

من معرفتنا السابقة :

$$\because \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

$$\therefore \mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)\cdot u(t-a)$$

لأن :

$) \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s-3}\right\} = e^{3(t-2)} \cdot u(t-2)$

$i) \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s \cdot e^{-s/2} + \pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}\right\}$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s/2}\frac{s}{s^2+\pi^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-s} \cdot \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right\} = \cos\pi\left(t-\frac{1}{2}\right) \cdot u\left(t-\frac{1}{2}\right) + \sin\pi(t-1) \cdot u(t-1)$$

$$= \sin\pi t \cdot u\left(t-\frac{1}{2}\right) - \sin\pi t \cdot u(t-1) = \left\{u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u(t-1)\right\}\sin\pi t$$

Ex.22:

Solve $\frac{Ldi}{dt} + Ri = E(t)$

Where : $E(t) = \begin{cases} E & (0 < t < a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$

Given that $(i=0)$ when $(t=0)$?

<u>الحل :</u>

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية بالشكل التالي :

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = E\{u(t) - u(t-a)\}$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين :

$$L \cdot \{s \cdot \mathscr{L}i - i(0)\} + R \cdot \mathscr{L}i = E\left\{\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}\right\}$$

$$(Ls+R) \cdot \mathscr{L}i = E\left\{\frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}\right\}$$

$$\therefore \mathscr{L}i = \frac{E}{s(Ls+R)} - \frac{E \cdot e^{-as}}{s(Ls+R)}$$

$$= \frac{E}{R}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}} - e^{-as} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)\right]$$

وبأخذ تحويل لابلاس المعكوس نحصل على :

$$\therefore i = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-Rt/L} - \left(1 - e^{-R(t-a)/L}\right)\cdot u(t-a)\right]$$

تمارين الفصل العاشر

Q$_1$) Find the Laplace transforms of the following functions :

(1) $e^{at} t^n$

(2) $(2t^2 - 1)^2$

(3) $\sin(at + b)$

(4) $\cos 3t \cos 2t$

(5) $\sin^3 t$

(6) $\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$

(7) $\dfrac{\sinh t}{t}$

(8) $\cosh at \ \cos at$

(9) $\sin 3t + 3t\cos 3t$

(10) $4t^3 + 5t\cos(4t + 7)$

(11) $t^2 \cosh t$

(12) $e^t \sin t \cos t$

Q$_2$) Find the inverse Laplace transform of :

(1) $\dfrac{3s - 8}{4s^2 + 25}$

(2) $\dfrac{3s - 12}{(s^2 + 8)(s - 1)}$

(3) $\dfrac{1}{(s-2)^3} + \dfrac{1}{(s-2)^2}$

(4) $\dfrac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$

(5) $\dfrac{2s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{(s^2 + 1)(s^2 + s + 1)}$

(6) $\dfrac{s}{(s^2 + 9)^2}$

(7) $\dfrac{5s^2 - 15s + 7}{(s + 1)(s - 2)^3}$

(8) $\dfrac{2s + 1}{s^2 + 4s + 13}$

(9) $\dfrac{2s - 4}{(2s + 3)^3}$

(10) $\log\left(1 + \dfrac{9}{s^2}\right)$

(11) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)$

(12) $\cot^{-1}\dfrac{s}{w}$

(13) $\dfrac{s^2 - 6s + 7}{(s^2 - 4s + 5)^2}$

(14) $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s - 1}{s + 1}\right)$

(15) $\dfrac{54}{s^3(s - 1)}$

Q$_3$) Solve by Laplace transformation method the following differential equations ?

(1) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$ given that $y(0) = -3$ and $y'(0) = 5$

(2) $x'' - x' - 2x = 20 \cdot \sin 2t$ when $x(0) = -1,\ x'(0) = 2$

(3) $y'' - 2y' + t - 12t = 0$ when $y(0) = 4$ and $y'(0) = 1$

(4) $y'' + 2y' + y = t \cdot e^{-t}$ given that $y(0) = 1$ and $y'(0) = 2$

(5) $y'' + y' - 2y = 3 \cdot \cos 3t - 11 \cdot \sin 3t$

(6) $x'' + 8x' + 32x = 32 \cdot \sin 4t$ when $x(0) = x'(0) = 0$

(7) $y'' + 4y' - 4y = 0$ with $y(0) = 2$ and $y'(0) = -3$

(8) $y'' + 4y' = \cos 2t$ given that $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(9) $y'' + 9y' = 0$ with $y(0) = 2,\ y'(0) = -3$

(10) $y'' - 2y' + y = 12t$ with $y(0) = 4,\ y'(0) = 1$

(11) $y'' - 7y' + 10y = 0$ with $y(0) = 3,\ y'(0) = -7$

(12) $y''' + 8y = 32t^3 - 16t$ if $y(0) = 3,\ y'(0) = y''(0) = 0$

(13) $y'' - 4y' + 13y = \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 3t$ if $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

(14) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-t}$ given that
$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

Q_4) Small body is attached as shown at the lower end of small spring. If the mathematical model for free vibration is described by the initial value problem :

$$my'' + cy' + ky = 0$$

where (m=mass=2), (c=damping constant=4) and (k) is the spring modulus =10

(i) Find out relation between displacement y and time t at initial conditions $y(0) = 2$ and $y'(0) = -4$.

(ii) Determine the small body velocity at (t = 0.5 sec).

Q_5) A voltage $E\,e^{-at}$ is applied at time (t=0) to a circuit of inductance (L) and resistance (R) then the current (i) is given by the equation

$$L\frac{di}{dt} + Ri = Ee^{at};\ i(0) = 0$$

show (by the Laplace transform method) that the current at time (t) is :

$$\frac{E}{R - aL}\left(e^{at} - e^{-(R/L)t}\right) \text{ if } i(0) = 0$$

Q₆) Solve the integral equation :

(i) $y' + 3y + 2\int_0^t y \cdot dt = t$ with $y(0) = 0$

(ii) $y' + 4y + 5\int_0^t y \cdot dt = e^{-t}$ with $y(0) = 0$

Q₇) An alternating voltage (E) sin wt is applied at (t=0) to a circuit of inductance (L) and resistance (R). If the initial current be zero, show that the current at time (t) is :

$$E\left\{e^{-Rt/L}\sin\gamma + \sin(wt - \gamma)\right\} \Big/ \sqrt{(R^2 + L^2w^2)} \text{ where } \tan\gamma = \frac{Lw}{R}$$

Q₈) Solve by Laplace transforms the following system of equations :

(1) $\frac{dx}{dt} - 2x + 3y = 0$; $\frac{dy}{dt} + 2x - y = 0$

Given that $x(0) = 8$ and $y(0) = 3$

(2) $\frac{dx}{dt} + x + y = 0$; $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = \cos t$

if $x(0) = y(0) = 2$

(3) Currents (x) and (y) in the compled circuits are given by :

$L \cdot \frac{dx}{dt} + Rx + R(x - y) = E$; $L \cdot \frac{dy}{dt} + Ry - R(x - y) = 0$

Find x and y in terms of (t), given that $(x = 0 = y)$ when $(t = 0)$

Q_9) Find the Laplace transforms of the following functions :

(1) $f(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t < 2 \\ t & 2 < t < 4 \end{cases}$ where $f(t+4) = f(t)$

(2) $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < c \\ 2c - t & c < t < 2c \end{cases}$

Triangle wave function of period $(2c)$.

(3) $f(t) = \sin(\pi t / a)$ for $0 < t < a$

(Rectified sin wave of period (a))

(4) $f(t) = t/T$ for $0 < t < T$

(saw – tooth wave of period (T))

Q_{10}) Express the following functions in terms of unit step functions :

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ 2 & a < t < 2a \\ 3 & 2a < t < 3a \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 2 \\ 4t & t > 2 \end{cases}$

Q_{11}) Express :

$$f(t) = \begin{cases} e^{t} & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

In terms of unit step function and hence find its Laplace transform

Q_{12}) Find the inverse Laplace transform of :

(i) $\dfrac{e^{-as}}{s^2}$ **(ii)** $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$ **(iii)** $\dfrac{s \cdot e^{-2s}}{s^2 - w^2}$