مبرهنة / في $(\mathbb{Z}, +, .)$ اذا كان $a \neq 0$ فأن $a^2 > 0$

البرهان / بما ان $a \neq 0$ فهناك احتمالان

$-a > 0 \leftarrow a < 0$

$a > 0 \leftarrow a > 0$

اذا كان $-a > 0 \Leftarrow (-a)(-a) = a^2 > 0$

اذا كان $a > 0 \Leftarrow a \cdot a = a^2 > 0$

تعريف / يقال للتطبيق المتباينة للحلقة $(A, +, .)$ انها حلقة مرتبة اذا وجدت علاقة ترتيب كلي على A بحيث تحقق الشروط التالية

1- لكل $a, b, c \in \mathbb{Z}$ يكون

$$a \leq b \longrightarrow a + c \leq b + c$$

2- لكل $a, b \in \mathbb{Z}$ يكون

$$a \leq b \longrightarrow a.c \leq b.c \wedge c.a \leq c.b \quad \text{if } c > 0$$

مبرهنة / $(\mathbb{Z}, +, ., \leq)$ حلقة مرتبة

البرهان / ∵ $\leq$ علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{Z}$

وانه $(\mathbb{Z}, +, .)$ حلقة

وتحقق الشروط اعلاه

1- $a < b \xrightarrow{\text{هذا يعني}} b - a > 0$

$$(b - a) + c - c > 0$$

$$(b + c) - (a + c) > 0 \Rightarrow b + c > a + c$$

$$a<b \to b-a>0$$
$$(b-a).c>0$$
$$bc-ac>0$$
$$bc>ac$$

c.

ومنه $(\mathbb{Z}, +, ., \leq)$ حلقة مرتبة

مبرهنة / $(\mathbb{Z}, +, ., \leq)$ ساحة مرتبة

H.W

تعريف / التطبيق $F: A \to B$ حيث A, B حلقات مرتبة يقال انه غمراً لـ A في B اذا كان متباين ومحافظ للترتيب ومحافظ للجمع والضرب

مهم مبرهنة / ليكن

$E_{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ معرفة بالشكل

$$E(n) = [n, 0]$$

فان E غمراً لـ $\mathbb{N}$ في $\mathbb{Z}$. اكثر من ذلك يكون E تطبيق شامل ومتباين

البرهان / E متباين

نفرض ان $E(n) = E(m) \longleftarrow n = m$?

$$E(n) = E(m) \to [n, 0] = [m, 0]$$
$$\to (n, 0) \sim (m, 0)$$
$$\to n + 0 = m + 0 \to n = m$$

ⓒ E يحفظ الجمع ، هذا يعني

$$E(n +_{\mathbb{N}} m) = E(n) +_{\mathbb{Z}} E(m) \ ?$$

$$E(n +_{\mathbb{N}} m) = [n+m, 0]$$
$$= [n, 0] +_{\mathbb{Z}} [m, 0]$$
$$= E(n) +_{\mathbb{Z}} E(m)$$

③ الضرب E يحفظ الضرب

$$E(m \cdot_{\mathbb{N}} n) = E(m) \cdot_{\mathbb{Z}} E(n) \,?$$
$$E(m) \cdot_{\mathbb{Z}} E(n) = [m, 0] \cdot_{\mathbb{Z}} [n, 0]$$
$$= [mn + 0, 0 + 0]$$ تعريف ضرب $\mathbb{Z}$
$$= [mn, 0]$$
$$= E(m \cdot_{\mathbb{N}} n)$$

④ E يحفظ الترتيب

$$E(n) \leq_{\mathbb{Z}} E(m) \to n \leq_{\mathbb{N}} m \;?$$

$$E(n) \leq E(m) \to E(n) < E(m) \vee E(n) = E(m)$$
$$\to E(m) - E(n) > 0 \quad \vee \quad n = m$$
$$\to [m, 0] - [n, 0] > 0 \quad \vee n = m$$
$$\to [m, 0] + [0, n] > 0 \quad \vee n = m$$
$$\to [m, n] > 0 \quad \vee n = m$$
$$\to m > n \quad \vee n = m$$
$$\to n \leq m$$

$(a,b) \sim (c,d)$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb$

٣- انشاء مجموعة الاعداد النسبية:

تعريف/ لتكن $A=\{(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \;/\; b\neq 0\}$

مبرهنة/ لتكن $\sim$ علاقة معرفة على A كالاتي

$\forall (a,b),(c,d)\in A : (a,b)\sim_Q (c,d) \longleftrightarrow ad = cb$

فان $\sim_Q$ علاقة تكافؤ على A

البرهان/

١- $\sim_Q$ علاقة انعكاسية

يجب ان نثبت ان $(a,b)\sim_Q (a,b)$

لان $(a,b)\sim_Q (a,b) \longleftarrow ab = ba$

٢- $\sim_Q$ متناظرة

نفرض $(a,b)\sim_Q (c,d)$

م.ح $(c,d)\sim_Q (a,b)$

البرهان/

$(a,b)\sim_Q (c,d) \Rightarrow ad = cb$

$cb = ad$

$\therefore (c,d)\sim_Q (a,b)$

٣- $\sim_Q$ متعدية

نفرض انه

$(a,b)\sim_Q (c,d)$

$(c,d)\sim_Q (p,q)$

م.ح $(a,b)\sim_Q (p,q)$

تعريف / يقال للعدد الصحيح $a \in \mathbb{Z}$ بانه عدد صحيح سالب اذا كان $-a$ عدد صحيح موجب

مثال / $a = [5,6]$ عدد صحيح سالب

الحل / لان $-a = [6,5]$ موجب

ترميز :- يرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة بالرمز $\mathbb{Z}^+$

تعريف / يقال بان a اقل من b في $\mathbb{Z}$ ونكتب $a < b$ اذا كان $b - a$ موجب

$2 < 3$ $3 - 2 = 1$ موجب

مثال اذا كان $a = [3,2]$ ، $b = [6,1]$

هل ان $a < b$ او $b < a$

الحل /

$$b - a = [6,1] - [3,2]$$
$$= [6,1] + [2,3]$$
$$= [8,4] \quad \text{موجب}$$

$8 > 4$ لان

$\therefore a < b$

ملاحظة :- اذا كانت $a, b \in \mathbb{Z}$ فان

① $a \leq b$ يعني $a = b$ أو $a < b$

② $a \geq b$ يعني $a = b$ أو $a > b$

③ $a \leq c \leq b$ يعني $a \leq c$ ، $c \leq b$

ج

مبرهنة:

① $\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$

② $\mathbb{Z}^+ = \{-a \in \mathbb{Z} \mid a < 0\}$ H.w $0-a=a$

③ $\mathbb{Z}^+ = \{[n+1, 0] \mid n \in \mathbb{N}\}$

البرهان:

① لتكن $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}$

م. ج

ⓐ $\mathbb{Z}^+ \subseteq A$

ⓑ $A \subseteq \mathbb{Z}^+$

ⓐ ليكن $a \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow a \in \mathbb{Z}$

وان $a - 0 = a$ موجب

وعليه $a \in \mathbb{Z}$ و $a > 0$

ومنه $a \in A$

$\mathbb{Z}^+ \subseteq A$

ⓑ $\cancel{\mathbb{Z}^+ \subseteq A}$

لنفرض ان $a \in A$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}, \ a > 0$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}, \ a - 0 = a$ موجب

$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}^+$

$A \subseteq \mathbb{Z}^+$

H.w ②

③ لنفرض ان
$A = \{ [n+1, 0] \mid n \in \mathbb{N} \}$

ⓐ $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ ⓑ $\mathbb{Z}^+ \subseteq A$

ⓐ ليكن $x \in A \Leftarrow x = [m+1, 0]$
$m \in \mathbb{N}$
ولكن $m+1 > 0 \Leftarrow m^+ > 0$
[مبرهنة ③ (ب)]

عليه x موجب
$x \in \mathbb{Z}^+$
$A \subseteq \mathbb{Z}^+$

ⓑ ليكن $x \in \mathbb{Z}^+ \Leftarrow x \in \mathbb{Z}$
$x > 0$
ومنه $x = [m, n]$ وان $m > n \ge 0$
$\Leftarrow n < m$
عندما $n = 0 \Leftarrow m > 0$
مبرهنة سابقة $m \geq 0^+$
$1 \leq m$
عليه يوجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث
$1 + p = m$
$x = [p+1, 0] \rightarrow x \in A$

اذا كان $n > 0$
$\Leftarrow m > n > 0$
$m > n, n > 0$

عندما $n > 0$

1 - $n \geq 0^+$ ← يوجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث ان
$n = p+1$
بما ان $m > n$ ← $m \geq n^+$ ⇐ يوجد $q \in \mathbb{N}$
بحيث $q + n^+ = m$

$x = [q + n + 1, p+1]$
$= [q + p+1 + 1, p+1]$
$= [q+1, 0] \in A$
$\mathbb{Z}^+ \subseteq A$

مبرهنة :- اذا كان $a, b \in \mathbb{Z}^+$ فان
① $a + b \in \mathbb{Z}^+$
② $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

البرهان :- ليكن موجب $a = [m, n]$
موجب $b = [x, y]$
م.ن موجب $a+b$
∵ a موجب ⇐ $m > n$
∵ b موجب ⇐ $x > y$ } ⇐ *

$a+b = [m, n] + [x, y]$
$= [m + x, n + y]$
من معادلة * $m + x > n + y$
عليه $a+b$ موجب

② $a = [n+1, 0]$, $n \in \mathbb{N}$
$b = [r+1, 0]$, $r \in \mathbb{N}$
$a \cdot b = [n+1, 0] \cdot [r+1, 0]$

عندما $n > 0$

1 = $n \geq 0^+$ ← يوجد $p \in \mathbb{N}$ بحيث ان

$n = p + 1$

عندما $m > n$ ← $m \geq n^+$ ⇐ يوجد $q \in \mathbb{N}$

بحيث $q + n^+ = m$

$x = [q + n + 1, p + 1]$

$= [q + p + 1 + 1, p + 1]$

$= [q + 1, 0] \in A$

$\mathbb{Z}^+ \subseteq A$

مبرهنة :- اذا كان $a, b \in \mathbb{Z}^+$ فان

① $a + b \in \mathbb{Z}^+$

② $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

البرهان :- ليكن موجب $a = [m, n]$

موجب $b = [x, y]$

م . ج موجب $a + b$

∵ a موجب ⇐ $m > n$

∵ b موجب ⇐ $x > y$ ⇐ *

$a + b = [m, n] + [x, y]$

$= [m + x, n + y]$

$m + x > n + y$ من معادلة *

عليه $a + b$ موجب

② $a = [n + 1, 0]$, $n \in \mathbb{N}$

$b = [r + 1, 0]$, $r \in \mathbb{N}$

$a \cdot b = [n + 1, 0] \cdot [r + 1, 0]$

$= [(n+1)(r+1), 0]$
$= [(n+1)r + n + 1, 0]$
$= [m+1, 0]$, $m = (n+1)r + n \in \mathbb{N}$
و.هـ.م

٣- خاصية الترتيب الثلاثية

لأي عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ يكون واحد فقط مما يأتي
$a > 0$ أو $a = 0$ أو $a < 0$

البرهان / $a = [m, n]$
① $m > n \Leftarrow a > 0$
② $m = n \Leftarrow a = 0$
③ $m < n \Leftarrow -a > 0 \Leftarrow a < 0$

مبرهنة: ان العلاقة $\leq$ على $\mathbb{Z}$ علاقة ترتيب كلي
البرهان:
① انعكاسية؟
لنفرض $a \in \mathbb{Z}$ فان $a \leq a$ لان $a = a$

② ضد متناظرة؟
لنفرض ان $a, b \in \mathbb{Z}$
$a \leq b$, $b \leq a$
م.ن $a = b$
$a \leq b \longrightarrow a < b$ أو $a = b$
$b \leq a \longrightarrow b < a$ او $a = b$

لا صانع أو مقامه نعطي

⇐ $a<b$ و $b<a$ او $a=b$

⇐ $b-a>0$ ، $b-a<0$ أو $a=b$

$a=b$

③ $\leqslant$ متعدي

لتكن $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

$$a\leqslant b \wedge b\leqslant c \xrightarrow{\text{م.ح}} a\leqslant c$$

① $a\leqslant b$ ⇐ $a<b$ أو $a=b$

$b\leqslant c$ ⇐ $b<c$ أو $b=c$

هناك اربع احتمالات

① $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$

② $a=b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

③ $a<b \wedge b=c \Rightarrow a<c$

④ $a<b \wedge b<c \Rightarrow b-a>0 \wedge c-b>0 \Rightarrow$

$$\underbrace{(\cancel{b}-a)}_{\text{موجب}}+\underbrace{(c-\cancel{b})}_{\text{موجب}}>0$$

$c-a>0$

$c>a$

م.ه.م.

عليه $(\mathbb{Z},\leqslant)$ مرتب جزئيا

لنفرض $a,b\in\mathbb{Z}$

يجب ان نثبت $a\leqslant b$ او $b\leqslant a$

$m, n, k \in \mathbb{N}$

$$(m*n)*k = (mn+1)*k$$
$$= (mn+1) \cdot k + 1$$
$$= mnk + k + 1 \quad \text{—} ①$$

$$m*(n*k) = m*(nk+1)$$
$$= m(nk+1)+1$$
$$= mnk + m + 1 \quad \text{—} ②$$

$$② \neq ①$$

∴ * ليست تجميعية

مثال: عرفت العملية الثنائية * على N كالآتي

$$a*b = b \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

نلاحظ ان

$$a*b = b \quad \text{—} ①$$
$$b*a = a \quad \text{—} ②$$

* ليست ابدالية

$$(a*b)*c = b*c = c \quad \text{—} ①$$
$$a*(b*c) = a*c = c \quad \text{—} ②$$

النظام الرياضي: ~~[illegible]~~

هو عبارة عن مجموعة غير خالية مع واحدة
أو أكثر من العمليات الثنائية المعرفة على المجموعة
فإذا كانت * عملية ثنائية على X فإن الثنائي
(X,*) يسمى نظام رياضي ذو عملية واحدة
أما اذا كانت *، # عمليتين ثنائيتين على X فالنظام
(X,*,#) نظام رياضي وهكذا

م/ جمع وضرب الأعداد الصحيحة

جمع الأعداد الصحيحة ليكن $a=[m,n]$, $b=[p,q]$
عددين صحيحين نعرف جمع a مع b كالاتي

$$a +_z b = [m,n] + [p,q]$$
$$= [m+p,\ n+q]$$

مبرهنة: برهان ان العملية $+_z$ على $\mathbb{Z}$ هي عملية ثنائية.

الشرط الأول للعملية الثنائية

① $\forall a = [m,n] , b = [p,q] \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow a +_z b \in \mathbb{Z}$?

البرهان
proof $a +_z b = [m,n] +_z [p,q]$
$= [m+p,\ n+q] \in \mathbb{Z}$

لأن $m+p, n+q \in \mathbb{N}$

نفرض $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ $\Rightarrow$ $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$

الشرط الثاني

② $[m,n] = [m',n']$, $[p,q] = [p',q']$

$[m,n] +_z [p+q] = [m',n'] +_z [p',q']$ م.ح

اثبات

$[m+p,\ n+q] = [m'+p',\ n'+q']$

$(m+p,\ n+q) \sim_{\mathbb{N}} (m'+p',\ n'+q')$

$m+p+n'+q' = m'+p'+n+q$ م.ح نريد ان نثبت ان

بما أن

$(m,n) \sim (m',n')$

$(p+q) \sim (p',q')$

$m+n' = m'+n$ $\leftarrow$

$p+q' = p'+q$

بجمع المعادلتين

$m+p+n'+q' = m'+p'+n+q$

مبرهنة: ليكن $a=[m,n]$, $b=[p,q]$ عناصر في $\mathbb{Z}$ نفرض

$$[m,n]\cdot_z[p,q]$$
$$=[mp+nq\ ,\ np+mq]$$

فأن $\cdot_z$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$ H.W

مثال: جد ناتج ما يلي

$$[5,4]+_z[3,4]=[8,8]=[0,0]=0$$
$$[2,3]\cdot_z[8,2]=[22,28]=[0,6]=-6$$

مبرهنة: النظام $(\mathbb{Z},+_z,\cdot_z)$ حلقة ابدالية

زمرة ابدالية وشبه زمرة ... توزيع

المحايد

$\boxed{1}$ $(\mathbb{Z},+_z)$ زمرة ابدالية

ⓐ $\forall a,b\in\mathbb{Z}\rightarrow a+_zb\in\mathbb{Z}$ حسب مبرهنة سابقة

ⓑ if $a=a'$, $b=b'$ in $\mathbb{Z}\Rightarrow a+_zb=a'+b'$,

حسب مبرهنة سابقة

شروط العملية الثنائية

ⓒ التجميعية $\forall a=[m,n]$, $b=[p,q]$, $c=[e,f]$

$$(a+_zb)+_zc=a+_z(b+_zc)$$

برهن الطرف الأول

$$[m+p,n+q]+_z[e,f]$$
$$[(m+p)+e\ ,\ (n+q)+F]$$
$$[m+(p+e),n+(q+F)]$$

الطرف الأيسر يساوي

$$a+_z(b+_zc)$$
$$[m,n]+_z[p+e,f+q]$$
$$=[m+(p+e),n+(p+q)]$$

مرهنة :- ليكن $a=[m,n]$, $b=[p,q]$
عناصر في $\mathbb{Z}$ نفرض

$[m,n]\cdot_z[p,q]$
$=[mp+nq\ ,\ np+mq]$
فأن $\cdot_z$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$ H.W

مثال :- جد ناتج مايلي

$[5,4]+_z[3,4]=[8,8]=[0,0]=0$
$[2,3]\cdot_z[8,2]=[22,28]=[0,6]=-6$

مبرهنة :- النظام $(\mathbb{Z},+_z,\cdot_z)$ حلقة ابدالية
الزمرة الابدالية وشبه زمرة وتوزيع (ج)
المحايد

$\boxed{1}$ $(\mathbb{Z},+_z)$ زمرة ابدالية
ⓐ $\forall a,b\in\mathbb{Z}\rightarrow a+_zb\in\mathbb{Z}$ حسب مبرهنة سابقة
ⓑ if $a=a'$, $b=b'$ in $\mathbb{Z}\Rightarrow a+_zb=a'+b'$
حسب مبرهنة سابقة
مشروط العملية الثنائية

ⓒ التجميع $\forall a=[m,n],b=[p,q],c=[e,f]$

$(a+_zb)+_zc=a+_z(b+_zc)$
نبرهن الطرف الايسر

$[m+p,n+q]+_z[e,f]$
$[(m+p)+e,(n+q)+f]$
$[m+(p+e),n+(q+f)]$
الطرف الايمن نثبت

$a+_z(b+_zc)$
$[m,n]+_z[p+e,f+q]$
$=[m+(p+e),n+(p+q)]$

ⓓ $\exists e = [e_1, e_2] \in \mathbb{Z} \ni$

$$[e_1, e_2] +_Z [m, n] = [m, n] +_Z [e_1, e_2] = [m, n]$$

ⓔ $\forall a = [m, n] \ \exists a' = [x, y]$

$$\ni a +_Z a' = a' +_Z a = [0, 0]$$

$$[m, n] +_Z [x, y] = [0, 0]$$

$$[m + x, n + y] = [0, 0]$$

$$(m + x, n + y) \sim (0, 0)$$

$$m + x = n + y$$

$$x = n, \ y = m$$

$$\therefore \ a = [n, m]$$

هذا يعني $[m, n]$

$$a +_Z a' = [m + n, m + n] = [0, 0]$$

الآن اصبحت $(\mathbb{Z}, +_Z)$ زمرة

سنثبت ان $+_Z$ ابدالية على $\mathbb{Z}$

$$[m, n] +_Z [p, q] \overset{?}{=} [p, q] +_Z [m, n]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$[m + p, n + q] \qquad\qquad [p + m, q + n]$$

$$[p + m, q + n]$$

$\therefore$ $(\mathbb{Z}, +_Z)$ زمرة ابدالية

$\boxed{2}$ $(\mathbb{Z}, \cdot_Z)$ شبه زمرة

حسب برهان سابقة $\cdot_Z$ عملية ثنائية على $\mathbb{Z}$

يجب ان نثبت تجميعية $\cdot_Z$

$$\{[m,n] \cdot_{\mathbb{Z}} [p,q]\} \cdot_{\mathbb{Z}} [e,f]$$
$$= [mp+nq\,,\, np+qm] \cdot_{\mathbb{Z}} [e,f]$$
$$= [emp+enq+npf+qmf\,,\, enp+eqm+fmp+fnq] \quad \text{—} ①$$

$$[m,n] \cdot_{\mathbb{Z}} \{[p,q] \cdot_{\mathbb{Z}} [e,f]\}$$
$$[m,n] \cdot_{\mathbb{Z}} [pe+qf\,,\, eq+fp]$$
$$[mpe+mqf+neq+nfp\,,\, meq+mfp+npe+nqf] \quad \text{—} ②$$

وعليه $(\mathbb{Z}, \cdot_{\mathbb{Z}})$ شبه زمرة لأن ① = ②

برهن ان $\cdot_{\mathbb{Z}}$ يتوزع على $+_{\mathbb{Z}}$ H.W

يوجد محايد ضربي ليكن $[x,y]$ المحايد الضربي

$$[x,y] \cdot_{\mathbb{Z}} [m,n] = [m,n] \cdot_{\mathbb{Z}} [x,y] = [m,n]$$

$$[xm+yn\,,\, my+xn] = [m,n]$$
$$(xm+yn\,,\, my+xn) \sim (m,n)$$
$$xm+yn+n = m+my+xn$$
$$mx+(y+1)n = m(y+1)+nx$$
$$x=1\,,\, y=0$$
$$\Rightarrow [x,y] = [1,0]$$

الترتيب على $\mathbb{Z}$

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ بحيث ان $a=[m,n]$
فيقال بأن a عدد صحيح موجب اذا كان $m>n$

مثال: العدد الصحيح $[5,1]$ موجب
لأن $5>1$

الزمرة :- النظام الرياضي $(G,*)$ يدعى زمرة
إذا تحققت الشروط التالية

شروط العملية الثنائية

① $\forall a,b \in G \rightarrow a*b \in G$

② if $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ in $G \rightarrow$
$a_1 * a_2 = b_1 * b_2$

③ $\forall a,b,c \in G \rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

④ $\exists e \in G \ni e*a = a \quad \forall a \in G$ — e يدعى محايد G

⑤ $\forall a \in G \quad \exists a' \in G$ (a^{-1} يرمز)
$\ni a' * a = e$

مثال :- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة

مثال :- عرف العملية $*$ على $\mathbb{Z}$ كالآتي

$\forall m,n \in \mathbb{Z} : m*n = m+n+8$

هل أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة ؟

① $\forall m,n \in \mathbb{Z}$
$m*n = m+n+8 \in \mathbb{Z}$

② if $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$
$m_1 * m_2 = m_1 + m_2 + 8$
$= n_1 + n_2 + 8$
$= n_1 * n_2$

③ $\forall\ m,n,k \in \mathbb{Z}$

$$(m*n)*k = (m+n+8)*k$$
$$= m+n+8+k+8$$
$$= m+n+k+16 \quad \text{——} \ ①$$

$$m*(n*k) = m*(n+k+8)$$
$$= m+n+k+8+8$$
$$= m+n+k+16 \quad \text{——} \ ②$$

$$① = ②$$

∴ $*$ تجميعي

④ نفرض ان $e \in \mathbb{Z}$ العنصر المحايد

$$\Rightarrow e*n = n \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$
$$e+n+8 = n$$
$$e+8 = 0$$
$$e = -8 \in \mathbb{Z}$$

⑤ نفرض ان a' نظير a

$$a'*a = -8$$
$$a'+a+8 = -8$$
$$a'+a = -16$$
$$a' = -16-a \in \mathbb{Z}$$

الزمرة الابدالية :- يقال للزمرة $(G,*)$ بأنها زمرة ابدالية اذا تحققت الشرط التالي

$$\forall a,b \in G : a*b = b*a$$

مثال :- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة ابدالية

$c * c^{-1} = e$
$c * e = c$

مبرهنة: اذا كانت $(G,*)$ زمرة فأن للمعادلتين $x * a = b$ و $a * y = b$ حلين وحيدين هما

$$x = b * a^{-1}$$
$$y = a^{-1} * b$$

البرهان: قبل برهان هذه المبرهنة نحتاج الى برهان كون ان

اذا كانت $a * c = b * c \rightarrow a = b$

$c * a = c * b \rightarrow a = b$

(هذا القانون يدعى بقانون الاختصار)

نفرض ان $a * c = b * c$

نضرب المعادلة في c^{-1}

$$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$$
$$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$$
$$a * e = b * e$$
$$a = b$$

بنفس الطريقة نبرهن القانون الثاني

برهان المبرهنة

أولاً نثبت ان $x = b * a^{-1}$ حل للمعادلة

$$x * a = b$$
$$(b * a^{-1}) * a \Rightarrow b * (a^{-1} * a)$$
$$= b * e = b$$

بنفس الطريقة نثبت ان $y = a^{-1} * b$ حل للمعادلة

$$a * y = b$$

ليكن x^* حل اخر $x * a = b$

$$\Rightarrow x^* * a = b$$
$$\Rightarrow x * a = x^* * a$$
$$\Rightarrow x = x^*$$

الزمرة المنتهية :- هي زمرة عدد عناصرها منتهي

مثال :- تأمل المجموعة

$G = \{-1, 1, i, -i\}$ $\quad i = \sqrt{-1}$

فأن G مع عملية الضرب تشكل زمرة ابدالية

$\times$	-1	1	i	$-i$
-1	1	-1	$-i$	i
1	-1	1	i	$-i$
i	$-i$	i	-1	1
$-i$	i	$-i$	1	-1

تعريف :- شبه الزمرة

النظام الرياضي $(A, *)$ يدعى

شبه زمرة اذا $*$ تجميعية

مثال :- $(IN, \cdot)$ ، $(IN, +)$

اشباه زمر لكنها ليست زمرة

تعريف :- يقال للنظام الجبري $(A, \#, *)$ بانه

نظام عددي اذا كان

① $*$، $\#$ عملية تبديلية وتجميعية

② $*$ تتوزع على $\#$

مثال :- $(IN, +, \cdot)$ نظام عددي

تعريف :- النظام الرياضي $(A, \#, *)$ يدعى حلقة.

اذا كان

1. $(A, *)$ زمرة ابدالية

2. $(A, \#)$ شبه زمرة

توضيح $m-n = p-q$

$m+q = p+n$

③ توزيع × على #

الأحد م/ إنشاء الأعداد الصحيحة

تعريف/ عرف لتكن $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ نعرف العلاقة

$\sim_n$ على A كالآتي

إذا كان $(m,n),(p,q)\in A$

$$(m,n)\sim_n (p,q) \longleftrightarrow m+q = p+n$$

مبرهنة: العلاقة $\sim_n$ على $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ علاقة تكافؤ

① $\sim_n$ انعكاسية

م.ح $(m,n)\sim_n(m,n)$

$\forall m,n\in\mathbb{N}$

$m+n = m+n \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$

عليه $(m,n)\sim_n(m,n)$

② $\sim_n$ متناظرة $\quad (a,b)\in R \rightarrow (b,a)\in R$

$(a,b)\sim_n(x,y)$

م.ح $(x,y)\sim_n(a,b)$

$a+y = x+b$

$x+b = a+y$

$\rightarrow (x,y)\sim_n(a,b)$

③ $\sim_n$ متعدية $\quad (a,b)\in R,\ (b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R$

$(a,b)\sim_n(c,d)$

$(c,d)\sim_n(x,y)$

م.ث $(a,b) \sim_{R} (x,y)$

البرهان:-

$a+d=c+b$ ---- ①

$c+y=x+d$ ---- ②

نضيف a لمعادلة ②

$c+y+a=x+d+a$ ---- ③

$a+y+c=x+d+a$ ---- ③

نضيف x لمعادلة ①

$a+d+x=c+b+x$

$=x+b+c$ ---- ④

$a+y+\cancel{c}=x+b+\cancel{c}$

$a+y=x+b$

و.هـ.م

تعريف يدعى صف التكافؤ العنصر (m,n) بالنسبة للعلاقة R بالعدد الصحيح ويرمز له $[m,n]$ حيث

$[m,n]=\{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (m,n)\sim_{R}(p,q)\}$

مثال:- $0-0=p-q$

$[0,0]=\{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (0,0)\sim_{R}(p,q)\}$

$=\{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid q=p\}$

$=\{(0,0),(1,1),(2,2)\ldots\ldots\}$

$[1,2)=\{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (1,2)\sim_{R}(p,q)\}$

$m-n$

$1-2$ $=\{(p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid q+1=p+2\}=q=p+1$

$=-1$ $=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$

ضرب الأعداد الطبيعية

اذا كانت $m,n \in IN$ فإن

① $m0 = 0$

② $mn^+ = mn + m$

مثال :- جد ناتج ما يلي

① $50 \to 0$ حسب خاصية واحد

② $21 \to 2.1 = 20^+ = 20+2 = 0+2 = 2$

③ $2.3 \to 2.3 = 22^+$

$= 2.2+2 = 2.1^+ + 2 = (21+2)+2$

$= (20^+ + 2) + 2 = (20+2)+2+2$

$= (0+2)+2+2 = 2+2+2 = 6$

مبرهنة اذا كانت $m, n, K \in IN$

فإن

① $0m = 0$ بالاستقراء الرياضي

② $m1 = m = 1m$

③ $m(n+K) = mn + mK$

ii $(n+K)m = nm + Km$

④ $mn = nm$

⑤ $(mn)K = m(nK)$

البرهان ③ ii $(n+K).m = nm + Km$

ليكن

$X = \{ m \in IN \mid (n+K).m = nm + Km \}$

$0 \in X$

$(n+K).0 = n0 + K0$

$0 = 0+0 = 0$

ليكن let $l \in X$

$$(n+k).l = nl + kl$$

يجب أن نثبت $l^+ \in X$

من خاصية ⓐ $(n+k).l^+ = (n+k)l + (n+k)$

$$= (nl + kl) + (n+k)$$

$$= (nl + n) + (kl + k)$$

$$= nl^+ + kl^+$$

$nl + n$

م/ الترتيب على $\mathbb{N}$

تعريف :- ليكن $m, n \in \mathbb{N}$ يقال بأن $m \leq n$ (ونقرأ m اقل او يساوي n) او m يسبق n اذا وفقط اذا $m = n$ $m \in n \vee$

ملاحظة :- ⓐ اذا كان $m \leq n$ وان $n \neq m$ فنكتب $m < n$

ⓑ اذا كان $n \leq m$ و $n \leq k$ فنكتب $k \leq n \leq m$

وكذلك $m < k < n$ فأن ذلك يعني $m < k \wedge k < n$

$n \neq m \quad n \in m \quad n \leq m$

مثال $n < 1$ لا تحقق $1 \in 2$ ، $1 \neq 2$

ⓒ برهن ان $m \leq m^+$ لكل $m \in \mathbb{N}$

$\leq \rightarrow \in \wedge =$

$< \rightarrow \in \wedge \neq$

بما ان $m \in m^+$ لكل $m \in \mathbb{N}$

عليه $m \leq m^+$

مبرهنة :- العلاقة $\leq$ اعلاه هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{N}$

① $\preccurlyeq$ انعكاسية

بما ان لكل $m \in \mathbb{N}$ يكون $m = m$

عليه $m \preccurlyeq m$

② ضد متناظرة

$(a,b) \in \mathbb{N} \wedge (b,a) \in \mathbb{N} \Rightarrow a = b$

ليكن $a, b \in \mathbb{N}$, $a \preccurlyeq b$, $b \preccurlyeq a$

م.ث $a = b$

$$a \preccurlyeq b \Rightarrow a = b \vee a \in b$$
$$b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b \vee b \in a$$
$$\Rightarrow a = b \vee (a \in b \wedge b \in a)$$
$$\Rightarrow a = b \vee (a \subseteq b \wedge b \subseteq a)$$
$$\Rightarrow a = b \vee a = b$$
$$\Rightarrow a = b$$

③ $\preccurlyeq$ متعدية

$(a,b) \in \mathbb{N} \wedge (b,c) \in \mathbb{N} \Rightarrow (a,c) \in \mathbb{N}$

لنفرض $a, b, c \in \mathbb{N}$

$a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c$

م.ث $a \preccurlyeq c$

$$a \preccurlyeq b \rightarrow a = b \vee a \in b$$
$$b \preccurlyeq c \rightarrow b = c \vee b \in c$$
$$\Rightarrow (a = b \wedge b = c) \vee (a = b \wedge b \in c) \vee$$
$$(a \in b \wedge b = c) \vee (a \in b \wedge b \in c)$$
$$\Rightarrow [a = c] \vee [a \in c] \vee [a \in c] \vee [a \in c]$$
$$\Rightarrow a = c \vee a \in c$$
$$\Rightarrow a \preccurlyeq c$$

∴ $\preccurlyeq$ هو علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{N}$

تمرين: ① برهن انه لكل $m \in \mathbb{N}$ يكون $0 \leq m$

② اذا كان $m, n \in \mathbb{N}$ برهن ان

$$n < m \rightarrow n^+ \leq m$$

البرهان: ①

واضح ان 0 يحقق العلاقة اعلاه لانه

$0 \leq 0$ كون العلاقة انعكاسية

نفرض صحة العلاقة عند اجل m

اي ان $0 \leq m$

م.ح يجب ان نثبت ان $0 \leq m^+$

بما ان $m < m^+$

$$\Rightarrow 0 \leq m < m^+$$

$$\Rightarrow 0 \leq m^+$$ لأن $\leq$ متعدية

٣- العملية الثنائية

العملية ثنائية $*$ على المجموعة A نقصد دالة

$$*: A \times A \rightarrow A$$

وهذا يكافئ: $*$ عملية ثنائية على $A \neq \emptyset$

اذا تحققت الشروط التالية

① $\forall a, b \in A \rightarrow *(a,b) = a * b \in A$

② IF $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$ in $A \rightarrow a_1 * a_2 = b_1 * b_2$

مثال: الجمع الاعتيادي والضرب الاعتيادي على $\mathbb{N}$ عملية ثنائية

البرهان :- لأن $m, n \in \mathbb{N}$

① $\forall m, n \in \mathbb{N} \rightarrow m + n \in \mathbb{N}$

$m \cdot n \in \mathbb{N}$

② if (إذا) $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$ in $\mathbb{N} \rightarrow n_1 + n_2 = m_1 + m_2$, $n_1 \cdot n_2 = m_1 \cdot m_2$

العملية الثنائية تبادلية :- اذا كان $*$ عملية ثنائية على A فنقول $*$ عملية تبادلية اذا كان

$a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$

مثال :- الجمع والضرب على $\mathbb{N}$ ~~عملية~~ تبادلية

لأن $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$m + n = n + m$

$m . n = n . m$

مثال :- عملية الطرح على الاعداد الصحيحة ($\mathbb{Z}$) ليست تبادلية

مثلاً $2 - 3 = -1 \neq 3 - 2 = 1$

العملية الثنائية التجميعية :- يقال للعملية الثنائية $*$ على المجموعة A أنها تجميعية اذا كان

$\forall a, b, c \in A : a * (b * c) = (a * b) * c$

مثال :- الجمع والضرب على $\mathbb{N}$ تجميعية

$\forall m, n, k \in \mathbb{N}$

$(m + n) + k) = (m + n) + k$

$(m . n) . k = m . (n . k)$

مثال: عملية الطرح على $\mathbb{Z}$ ليست تجميعية

$1-(2-3) = 2$ ①

$(1-2)-3 = -4$ ②

① ≠ ②

تعريف: اذا كان $*$ و $\#$ عمليتين ثنائيتين على المجموعة A فيقال $\#$ تتوزع على $*$ اذا كان

$\forall a,b,c \in A$

$a \# (b * c) = (a \# b) * (a \# c)$

$(b * c) \# a = (b \# a) * (c \# a)$

مثال: الضرب يتوزع على جمع الاعداد الطبيعية مثلاً

$\forall m, n, k \in \mathbb{N}$

$m \cdot (n+k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$

$(n+k) \cdot m = (n \cdot m) + (k \cdot m)$

مثال: لتكن $*$ عملية ثنائية معرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي

$\forall m, n \in \mathbb{N} : m * n = mn + 1$

هل ان $*$ ابدالية ، تجميعية

أعط مثال على عملية ثنائية ابدالية وليست تجميعية

الحل: ليكن $m, n \in \mathbb{N}$

$m * n = mn + 1$ ① اذا عملية ثنائية تجميعية

$n * m = nm + 1$ اذا ابدالية ، تجميعية

$= mn + 1$ ②

① = ②

∴ $*$ ابدالية

الاتحاد أكبر مجموعة
التقاطع أصغر مجموعة

لاحظ ان $n \in n^+$, $n \neq n^+$
$n \subseteq n^+$

٣- بديهية اللانهاية
توجد مجموعة تابعية

تمرين :- ① عائلة كل المجموعات التابعية غير خالية
② تقاطع اي عائلة غير خالية من المجموعات التابعية تكون مجموعة تابعية

البرهان :- ① حسب بديهية اللانهاية توجد مجموعة تابعية
② لنفرض $\{A_i\}_{i \in I}$
عائلة لمجموعات تابعية
غير خالية
م.ت $\bigcap_{i \in I} A_i$ مجموعة تابعية

① $\phi \in \bigcap_{i \in I} A_i$

لأن $\phi \in A_i$ لكل $i \in I$
ليكن $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \longrightarrow$

② $x \in A_i \quad \forall i \in I$
$x^+ \in A_i \quad \forall i \in I$
$x^+ \in \bigcap_{i \in I} A_i$ لأن كل A_i مجموعة تابعية

تعريف :- تقاطع كل المجموعات التابعية يدعى مجموعة الاعداد الطبيعية ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ وكل عنصر في $\mathbb{N}$ يدعى عدد طبيعي