جمع المتتاليات

ليكن $r_1 = [<x_n>]$ ، $r_2 = [<y_n>]$

عناصر في R

$(R = FQ/\sim)$

فان ① $r_1 +_{IR} r_2 = [<x_n>] +_{IR} [<y_n>] = [<x_n + y_n>]$

② $r_1 \cdot_{IR} r_2 = [<x_n>] \cdot_{IR} [<y_n>] = [<x_n \cdot y_n>]$

مثال / اجمع واضرب المتتاليات في IR

1. $[<\frac{1}{n}>] +_{IR} [<1 - \frac{1}{n}>]$

2. $[<1>] \cdot_{IR} [<\frac{1}{n^2+1}>]$ (نقسم على n^2)

3. $[<0>] +_{IR} [<\frac{n+1}{2n+2}>]$ (نقسم على n)

موضحاً اجابتك

4. $[<\frac{2n^3+n^2+1}{n^4}>] +_{IR} [<\frac{3n^2+1}{2n^2+n+1}>]$ (نقسم على n^4) (نقسم على n^2)

الحل / ① $[<\frac{1}{n}>] \sim [<0>]$

$<\frac{1}{n}> \sim \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$

تقترب الى الصفر

$[<1 - \frac{1}{n}>] \sim [<1>]$

$[<\frac{1}{n}>] +_{IR} [<1 - \frac{1}{n}>] = [<0>] +_{IR} [<1>]$

$[<\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}>] \qquad = [<0 + 1>]$

$[<1>] \qquad = [<1>]$

2. $[<\frac{1}{n^2+1}>] \sim [<0>]$

$[<1>] \cdot_{IR} [<\frac{1}{n^2+1}>] = [<1>] \cdot_{IR} [<0>]$

$\langle 1-n\rangle + \langle n-1\rangle = 0$

متباعدات ومجموعهم متقارب

$[\langle 1 - \frac{1}{n^2+1}\rangle] = [\langle 1 - 0\rangle]$

$[\langle \frac{1}{n^2+1}\rangle] = [\langle 0\rangle]$

3. $[\langle 0\rangle] +_{\mathbb{R}} [\langle \frac{n+1}{2n+2}\rangle] = [\langle 0\rangle] +_{\mathbb{R}} [\langle \frac{1}{2}\rangle]$

$[\langle 0 + \frac{n+1}{2n+2}\rangle] = [\langle 0 + \frac{1}{2}\rangle]$

$[\langle \frac{n+1}{2n+2}\rangle] = [\langle \frac{1}{2}\rangle]$

$[\langle \frac{1}{2}\rangle] = [\langle \frac{1}{2}\rangle]$

تقسم على n^4 — تقسم على n^2

4. $[\langle \frac{2n^3+n^2+1}{n^4}\rangle] +_{\mathbb{R}} [\langle \frac{3n^2+1}{2n^2+n+1}\rangle]$

$\frac{2n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}$

$\frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$

$= [\langle 0\rangle] +_{\mathbb{R}} [\frac{3}{2}]$

$[\langle \frac{2n^3+n^2+1}{n^4} + \frac{3n^2+1}{2n^2+n+1}\rangle] = [\langle \frac{3}{2}\rangle]$

$= \frac{3+0}{2+\frac{1}{\infty}+0} = \frac{3}{2}$

$[\langle \frac{3}{2}\rangle] = [\langle \frac{3}{2}\rangle]$

مثال / جد قيمة x في Q حيث ان

$[\langle x - \frac{2n+1}{3n+5}\rangle] +_{\mathbb{R}} [\langle \frac{3n^2+1}{n^2+2n+1}\rangle] = [\langle \frac{7}{3}\rangle]$

تقسم على n — تقسم على n^2

$[\langle x - \frac{2n+1}{3n+5} + \frac{3n^2+1}{n^2+2n+1}\rangle] = [\langle \frac{7}{5}\rangle]$

$[\langle x - \frac{2}{3} + 3\rangle] = [\langle \frac{7}{3}\rangle]$

$x - \frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$

مثال / برهن ان المتتالية $\langle x_n \rangle$ حيث $x_n = e^{-n}$
$n \in \mathbb{Z}^+$

متقاربة الى 0

الحل $\langle x_n \rangle = \{ e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \ldots \}$

اعطي $\epsilon > 0$

المطلوب ايجاد n

$|x_n - a| < \epsilon$

$$|e^{-n} - 0| = |e^{-n}| < \epsilon$$
$$\Rightarrow e^{-n} < \epsilon$$
$$e^{n} > \frac{1}{\epsilon}$$

نأخذ ln للطرفين

$$n > \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

مبرهنة / في الحقل المرتب $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ المتتالية $\langle x_n \rangle$ تكون متقاربة الى نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان / نفرض ان $\langle x_n \rangle$ متقاربة الى a, b

بما ان $x_n \to a$ ، $(L(x_n) = a)$

$$\forall n > n'_\epsilon \rightarrow |x_n - a| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$$

بما ان $x_n \to b$ ، $(L(x_n) = b)$

$$\forall n > n''_\epsilon \rightarrow |x_n - b| < \epsilon'' = \frac{\epsilon}{2}$$

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b|$$
$$\leq |a - x_n| + |x_n - b|$$
$$|a - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

٢٠٠٨-١٢-١٤

جامعة بغداد كلية العلوم قسم الرياضيات

$0 \leq |a-b| \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$

$\Rightarrow |a-b| = 0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

مبرهنة / اذا كانت $\langle an \rangle$, $\langle bn \rangle$ متتاليتين في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \leq)$ بحيث انه $L(an)=a$ و $L(bn)=b$ فان

① $L(an+bn) = a+b$

② $L(an \cdot bn) = ab$

③ $L|an| = |a|$

البرهان / ① لنفرض انه $L(an)=a$

$L(bn)=b$

$L(an)=a \Rightarrow \forall \epsilon' > 0 \ \exists n'_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n'_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon'$

$L(bn)=b \Rightarrow \forall \epsilon'' > 0 \ \exists n''_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n''_\epsilon \Rightarrow |bn-b| < \epsilon''$

$L(an+bn)$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n_\epsilon \rightarrow |(an+bn)-(a+b)| < \epsilon$?

$|(an+bn)-(a+b)| = |(an-a)+(bn-b)|$

$\leq \epsilon' + \epsilon''$

take $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{2}$

$n_\epsilon = \min\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$

البرهان / ⓐ لنفرض انه $L(a_n) = a$

$L(b_n) = b$

$L(a_n) = a \Rightarrow \forall \epsilon' > 0 \ \exists n'_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n'_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon'$

$L(b_n) = b \Rightarrow \forall \epsilon'' > 0 \ \exists n''_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n''_\epsilon \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon''$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni$

$n \geq n_\epsilon \Rightarrow |(a_n b_n) - (a b)| < \epsilon$?

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab|$

$= \cancel{|b_n (a_n - a)|} = |b_n (a_n - a) + a(b_n - b)|$

$\leq |b_n| a_n - a| + |a||b_n - b|$

$\leq |b_n| \epsilon' + |a| \epsilon''$

∵ $L(b_n) = b$ مقيده

عليه $|b_n| \leq K$

$\leq K\epsilon' + |a|\epsilon''$

نأخذ
take $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2K}$, $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{2|a|}$

$\Rightarrow (a_n b_n - ab) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

حيث
where $n_\epsilon = \min \{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$

تعريف/ لتكن F_Q مجموعة كل المتتاليات الاساسية بالنسبة
عرف العلاقة ~ على F_Q كالاتي
اذا كان $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in F_Q$ فان

$$\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle \Rightarrow L(x_n - y_n) = 0$$

مبرهنة/ العلاقة اعلاه تكون علاقة تكافؤ على F_Q

البرهان/ ① ~ هي علاقة انعكاسية

$$L(x_n - x_n) = 0$$

$L(0) = 0$ متتالية

عليه $\langle x_n \rangle \sim \langle x_n \rangle$

② ~ هي علاقة متناظرة

لنفرض ان $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$

م.ج $\langle y_n \rangle \sim \langle x_n \rangle$

$$\therefore \langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle \Rightarrow L(x_n - y_n) = 0$$

$$-L(y_n - x_n) = 0$$

$$L(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \langle y_n \rangle \sim \langle x_n \rangle$$

③ ~ هي علاقة متعدية

نفرض ان $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$ و $\langle y_n \rangle \sim \langle z_n \rangle$

م.ج $\langle x_n \rangle \sim \langle z_n \rangle$

البرهان/ $L(y_n - z_n) = 0$ $\quad$ $L(x_n - y_n) = 0$

$$L(x_n - z_n) = L(x_n - y_n + y_n - z_n)$$
$$= L(x_n - y_n) + L(y_n - z_n)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

ملاحظة / ~ هي علاقة تكافؤ على FQ فإن $FQ/\sim$ تجزئة FQ وكل عنصر من عناصر التجزئة يدعى عدد حقيقي

مثال

$$0 = [\langle \tfrac{1}{n} \rangle] = \{ \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+2}, \dots \}$$

$$1 = [\langle 1 + \tfrac{1}{n} \rangle] = \{ 1 + \tfrac{1}{n}, 1 + \tfrac{1}{n+1}, \dots \}$$

$$\tfrac{1}{2} = [\langle \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n} \rangle] = \{ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n+1}, \dots \}$$

$\sqrt{2} = ?!$

لنفرض ان a لدينا المتتابعة $\langle x_n \rangle$ بحيث

$$\left(x_n + \frac{b^n}{10^n} \right)^2 \leq 2 \leq \left(x_n - \frac{b^n}{10^n} \right)^2$$

② $|x| \geq 0$

③ $|x+y| \leq |x|+|y|$

④ $|x|=0 \iff x=0$

البرهان/ $\because -|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

$|x+y| \leq |x|+|y|$

م- إنشاء الأعداد الحقيقية

تعريف/ (المتتالية) ليكن $(A, +, \cdot, \leq)$ حقلاً مرتباً تعرف المتتالية $\langle x_n \rangle$ على أنها الدالة $f: N \to A$

مثال/ اكتب عناصر المتتالية ① $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

$\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

اكتب عناصر المتتالية

② $\langle x_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$

$\langle x_n \rangle = \{1, -1, 1, -1, \dots \rangle$

تعريف/ يقال للمتتالية $\langle x_n \rangle$ في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \leq)$ بأنها متتالية مقيدة إذا وجد $a \in A$ حيث أنه $x_n \leq a \quad \forall n \in N$

مثال/ في المثال السابق المتتالية ① مقيدة بـ 1، 2، ....

وكذلك المتتالية ② مقيده

مقيد ب 100

المتتالية الاساسية (المتتالية الكوشية)

يقال للمتتالية $\langle x_n \rangle$ بأنها متتالية اساسية او كوشية اذا حققت الشرط التالي :-

شرط اساسي

$$\left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \ni \\ m,n \geq n_\epsilon \longrightarrow |x_m - x_n| < \epsilon \end{array} \right)$$

مثال / تأمل المتتالية $\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

$$\langle x_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$$

هل انه $\langle x_n \rangle$ كوشية ؟

نعم كوشية لان

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \ni n,m \geq n_\epsilon \longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$$

مثال / في Q هل ان المتتالية $\langle x_n \rangle = \langle n^2+1 \rangle$ كوشية

$$\langle x_n \rangle = \{1, 2, 5, 10, \ldots\}$$

ليست كوشية

م- المتتابعات المتقاربة.

مبرهنة / لتكن في الحقل $(A, +, \cdot, \leq)$ اي متتالية اساسية تكون مقيده

البرهان / لنفرض ان $\langle x_n \rangle$ متتالية اساسية في A

لكل $\epsilon > 0$ يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{N} - \{0\}$ بحيث ان

$$m,n \geq n_\epsilon \longrightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$$

ليكن $D = \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_\epsilon}|\}$

لیکن

لما كانت D مقيده بعنصر وقيل b

عليه $|x_n| \leqslant b \quad \forall n \leqslant n_\epsilon$

$\because$ $\langle x_n \rangle$ اساسيه

$$|x_n| = |\underbrace{x_n - x_{n\epsilon}}_{a} + \underbrace{x_{n\epsilon}}_{b}|$$

$$\leqslant |x_n - x_{n\epsilon}| + |x_{n\epsilon}|$$

$$\leqslant \epsilon + b \qquad \forall n \geqslant n_\epsilon$$

$$|x_n| \leqslant \epsilon + b \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ليكن $a = \epsilon + b$

$$|x_n| \leqslant a \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

وبالتالي $\langle x_n \rangle$ مقيده

مبرهنة/ في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \leqslant)$ اذا كان كل من $\langle a_n \rangle$ ، $\langle b_n \rangle$ متتاليات اساسيه في A فأن

① $\langle a_n + b_n \rangle$ متتاليه اساسيه في A

② $\langle a_n . b_n \rangle$ متتاليه اساسيه في A

البرهان/

① $\because$ $\langle a_n \rangle$ اساسيه

$$\forall \epsilon' > 0 , \exists n'_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni n, m \geqslant n'_\epsilon \Rightarrow$$
$$|a_n - a_m| < \epsilon'$$

$\because$ $\langle b_n \rangle$ اساسيه

$$\forall \epsilon'' > 0 \ \exists n''_\epsilon \in \mathbb{Z}^+ \ni n, m \geqslant n''_\epsilon \Rightarrow$$
$$|b_n - b_m| < \epsilon''$$

$$|a_n + b_n - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)|$$

$$\leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$$

$$\leqslant \epsilon' + \epsilon'' \qquad \forall n \geqslant n_\epsilon$$

صح انه

$n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon , n''_\epsilon\}$

خذ $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} = \epsilon''$

(c) بما ان $\langle a_n \rangle$ كوشية

$\forall \epsilon_1 > 0 , \exists n_{\epsilon_1} \in \mathbb{Z}^+ \ni n, m \geq n_{\epsilon_1}$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon_1$

بما ان $\langle b_n \rangle$ كوشية

$\forall \epsilon_2 > 0 \ \exists n_{\epsilon_2} \in \mathbb{Z}^+ \ni n, m \geq n_{\epsilon_2}$

$\Rightarrow |b_n - b_m| < \epsilon_2$

$|a_n \cdot b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_m b_n + a_m b_n - a_m b_m|$

$= |b_n(a_n - a_m) + a_m(b_n - b_m)|$

$\leq |b_n(a_n - a_m)| + |a_m(b_n - b_m)|$

$\leq |b_n||a_n - a_m| + |a_m||b_n - b_m|$

$\leq |b_n|\epsilon_1 + |a_m|\epsilon_2$

$\leq |b|\epsilon_1 + |a|\epsilon_2$

$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2|b|} , \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2|a|}$

لان $\langle a_n \rangle , \langle b_n \rangle$ متتاليه كوشيه مقيده

المتتاليات المتقاربة / في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \geq)$

يقال ان المتتالية $<x_n>$ متقاربة الى $a \in A$

اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $n_\epsilon \in \mathbb{Z}^+$ بحيث ان

$$n \geq n_\epsilon \rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

مثال/ المتتالية $<x_n>$ حيث $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+$

هل ان $<x_n>$ متقاربة في

① $[1, 2]$

② $(0, 1]$

③ R

الحل/ $<x_n> = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

$L<x_n> = 0$

① ليست متقاربة في $[1, 2]$

② ليست متقاربة في $(0, 1]$

③ متقاربة لان $0 \in R$

مثال/ برهن ان المتتالية $<x_n>$ حيث $x_n = \frac{n+1}{n}$

متقاربة الى الواحد (1) حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

n تبدأ اعتبارا 1

البرهان/

$<x_n> = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots\}$

لنعطي $\epsilon > 0$

المطلوب ايجاد n

$|x_n - a|$

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$$

نلاحظ انه $a \neq 0$ لانه لو كانت $a = 0$
ومن هنا تنتج $\Rightarrow x = [a,b] = [0,1]$
ولكنه $a,b \in \mathbb{Z}$ عليه

$y \in Q$

$\Rightarrow [a,b] \cdot_Q [b,a] = [ab, ab] = [1,1]$

ملاحظة: يرمز للنظير الضربي $x \in Q$ بالرمز $x^{-1} = \frac{1}{x}$

مثال: جد نتائج ما يأتي اذا كانت

$x = [1,2] \quad , y = [2,1]$

جد $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$

$$\frac{x}{y} = \frac{[1,2]}{[2,1]} = [1,2] \cdot_Q [1,2] = [1,4]$$

م٣ - العلاقة الكثيفة

اذا كانت $(A, +, \cdot, \leq)$
حقلاً مرتباً فيقال انه $\leq$ علاقة ترتيب كثيفة في A
اذا كان لكل $a,b \in A$ بحيث $a < b$ يوجد
$c \in A$
بحيث $a < c < b$

مثال/ $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ ساحة مرتبة ولكن $\leq$
ليست علاقة ترتيب كثيفة على $\mathbb{Z}$.
على سبيل المثال $0 < 1 < 2$
وان $1, 2 \in \mathbb{Z}$ لكن لا يوجد $c \in \mathbb{Z}$
بحيث $1 < c < 2$

مبرهنة: في اي حقل مرتب $(A, +, \cdot, \leq)$ تكون $\leq$ علاقة ترتيب كثيفة

البرهان: لتكن $a < b$ في A

$$2a = a + a < b + b = 2b$$

$$2a = a + a \leq a + b \leq b + b = 2b$$

$$2a \leq a + b \leq 2b$$

توضيح

لأن $2 = 1_A + 1_A > 0_A$

موجود $2^{-1} = \frac{1_A}{2} > 0_A$

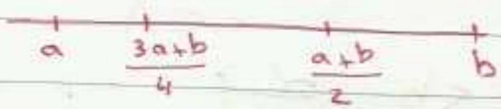
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

مبرهنة/ في الحقل المرتب $(Q, +, \cdot, \leq)$ تكون علاقة $\leq$ علاقة ترتيب كثيفة فضلاً عن ذلك توجد مالانهاية من الاعداد النسبية بين اي عددين نسبيين

البرهان/ من المبرهنة السابقة (أعلاه)

$\because$ $(Q, +, \cdot, \leq)$ حقل مرتب عليه $\leq$ علاقة ترتيب كثيفة على Q

لنفرض ان $a < b$ في Q



$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

$$a < \frac{3a+b}{4} < b$$

$$a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+3b}{4} < b$$

$$a < \frac{7a+b}{8} < \frac{3a+b}{4} < \cdots\cdots$$

علينا توجد ما لانهاية من الاعداد النسبية بين a, b

ملاحظة/ لا يوجد $x \in Q$ بحيث $x^2 = 2$
ولكنه تمتلك حلاً في $\mathbb{R}$ يرمز له $\sqrt{2}$

مبرهنة (الحقل الارخميدي)

يقال للحقل المرتب $(A, +, \cdot, \leq)$
صفة ارخميدياً اذا كان $b > a > 0$ فيوجد
$n \in N - \{0\}$ بحيث ان $na > b$

مبرهنة/ اذا كانت $0 < x < y$ في الحقل المرتب $(Q, +, \cdot, \leq)$
فيوجد $n \in N - \{0\}$ بحيث ان $nx > y$

البرهان/ اذا كانت $x, y \in Q$

$$x = \frac{p}{r} \quad , \quad y = \frac{q}{r}$$

خذ $n = rq$

$$nx = rq \cdot \frac{p}{r} = pq > q > \frac{q}{r} = y$$

$$nx > y$$

مبرهنة/ اذا كان $\varepsilon_Z^Q : Z \to Q$ تطبيق معرف
$\varepsilon_Z^Q [n] = [n, 1]$
فانه ε_Z^Q يشكل غمراً لـ Z في Q

مهمة جداً جداً مهم في الامتحان النهائي

البرهان/ ε متباينة

ليكن $E(n) = E(m)$

م . ث $n=m$

برهان/

$[n,1]=[m,1]$

$n\cdot 1 = m\cdot 1 \Rightarrow m=n$

② E يحفظ الجمع

$E(n+_{z}m)=E(n)+_{Q}E(m)$

$$E(n+_{z}m)=[n+m,1]$$
$$=[n,1]+_{Q}[m,1]$$
$$=E(n)+_{Q}E(m)$$

③ E يحفظ الضرب

$E(n\cdot_{z}m)=E(n)\cdot_{Q}E(m)$

$$E(n\cdot_{z}m)=E(nm,1)$$
$$=[n,1]\cdot_{Q}[m,1]$$
$$=E(n)\cdot_{Q}E(m)$$

④ يحفظ الترتيب

$E(n)\leq E(m)\xrightarrow{?} n\leq m$

$[n,1]\leq[m,1]$

$[n,1]=[m,1]\vee[n,1]<[m,1]$

$n=m\vee[m,1]-[n,1]>0$

$n=m\vee[m,1]+[-n,1]>0$

$n=m\vee[m-n,1]>0$

$n=m\vee[m-n)1>0$

$n=m\vee m>n$

$n\leq m$ $n\leq m$

القطع والفجوة في Q

ليكن $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ حقلاً مرتباً فيقال الزوج (x, y) بأنه يشكل قطع في Q اذا كان

① $X \neq \phi$, $y \neq \phi$

② $x \cup y = Q$

③ $x \cap y = \phi$

④ $x \leq y$ اذا كان $x \in X$, $y \in Y$ فإن

يدعى X بالصف الأوطأ , Y بالصف الأعلى ويقال للقطع (y, Y) بأنه تشكل فجوة في Q اذا افتقد X لعنصر اكبر او افتقد Y لعنصر اصغر

مثال/ في Q . لتكن

$x = \{x \in Q \,/\, x < \sqrt{2}\}$

$y = \{x \in Q \,/\, x > \sqrt{2}\}$

هل ان (x, y) قطعاً في Q ؟

الحل/ ① $X \neq \phi$ لان $0 \in X$

$Y \neq \phi$ لان $2 \in Y$

② $X \cup Y = Q$

③ $X \cap Y = \phi$

④ لتكن $x \in X$, $y \in Y$ فان $x \leq y$

فان X, Y قطع في Q

وهو يشكل فجوة لان الصف الاوطأ لا يحوي على عنصر اكبر والصف الاعلى لا يحوي على عنصر اصغر.

مثال / في Q . لتكن $X = \{ x \in Q \mid x^2 \le 2 , x < 0 \}$

$Y = \{ x \in Q \mid x^2 \ge 2 , x > 0 \}$

هل ان (X , Y) قطعاً في Q ؟ هل انه (X, Y) فجوة؟

① $X \neq \emptyset$ لان $-1 \in X$

$Y \neq \emptyset$ لان $2 \in X$

② $X \cup Y = Q$

③ $X \cap Y = Q$

④ لتكن $x \in X$, $y \in Y$ فأنه $x \le y$

$\therefore$ X , Y قطع في Q

وهو ليس فجوة لان الصف الاول لا يحتوي على عنصر اكبر والصف الاعلى لا يحتوي على عنصر اصغر

م / تطبيق القيمة المطلقة

في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \le)$

تعرف القيمة المطلقة للعدد $x \in A$

$|x| = \max \{ x , -x \}$

مثال / في Q

$|\frac{1}{2}| = \max \{ \frac{1}{2} , -\frac{1}{2} \} = \frac{1}{2}$

$|-1| = \max \{ -1 , 1 \} = 1$

خصائص القيمة المطلقة

في الحقل المرتب $(A, +, \cdot, \le)$

① $-|x| \le x \le |x|$

$[n,m]=[p,q]$

$n-m=p-q$

ليكن $[a,b]\neq[0,1]$ ، $[c,d]\neq[0,1]$

يجب ان نثبت انه

$[a,b]\cdot[c,d]\neq[0,1]$ ؟

$[a,b]\cdot[c,d]=[0,1]$

$[ac,bd]=[0,1]$

$ac\cdot 1=bd\cdot 0=0$

$ac=0 \rightarrow a=0 \vee c=0$

$a=0$ ، $a\cdot 1=0\cdot b \Rightarrow [a,b]\sim_a(0,1) \Rightarrow [a,b]=[0,1]$

$\vee$ $c=0$ ، $c\cdot 1=0\cdot d$ ، $(c,d)\sim_a(0,1)$ ، $[c,d]=[0,1]$

$\rightarrow (0,b) \vee [0,d]$

$\rightarrow [a,b]=[0,1] \vee [c,d]=[0,1]$

وهذا تناقض وعليه

$[a,b]\cdot[c,d]\neq 0$

$\therefore$ $(Q,+,\cdot)$ ساحة

مثال/ جد مجموعة الحلول في ① $\mathbb{Z}$ للمعادلة

$[x,y]+[2,3]=[1,0]$

② جد الحل في Q حيث $4\leq x\leq 6$

الحل/ $[x,y]+[2,3]=[x+2,y+3]$

$=[0,1]$

$\boxed{x+2+0=y+3+1}$ $x+2+1=y+3+0$

$x=2$ $x+3=y+3 \Rightarrow x=y$

$[2,0],[3,1],[4,2],[5,3]$ $[0,0],[1,1],[2,2]$

$[3,3],[4,4],[5,5]$

$[6,6],\dots$

② لا يوجد حل $[x,y]+[2,3]=[1,0]$

$[3x+2y,3y]=[1,0]$

$3y=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow [x,y]=[x,0]$

ولكن $\cancel{\exists}Q \ni [x,0]$

جد الكل في Q عندما

$[x, y] + [2, 3] = [5, 6]$ $\quad \frac{3x+2y}{3y} = \frac{5}{6}$

$(3x + 2y, 3y] = [5, 6]$

$18x + 12y = 15y$

$3y = 18x$

$y = 6x$

$[4, 24], [5, 30], [6, 36]$

س/ جد عددين نسبيين $x = [x, y]$ (a, b) , $y = [p, q]$

بحيث أن

$x - y = [2, 1]$

$x^2 - y^2 = [12, 1]$

الحل/ $X - Y = \{2, 1]$

$[\overset{a}{x}, \overset{b}{y}] - [p, q] = [2, 1]$

$[x, y] + [-p, q] = [2, 1]$

$[xq - py, yq] = [2, 1]$

$(xq - py, yq) \sim_Q (2, 1]$

$(xq - py) * 1 = 2yq \longrightarrow (1)$

[

$X^2 - Y^2 = \{12, 1\}$

$\{a, b\}\{a, b\} - \{p, q\}\{p, q\} = \{12, 1)$

$\{a^2, b^2\} - [p^2, q^2] = [a^2, b^2] + [-p^2, q^2] = [12, 1]$

$\{a^2q^2 - p^2b^2, b^2q^2\} = [12, 1]$

$a^2q^2 - p^2b^2 = 12b^2q^2$ —— (2)

$aq - pb = 2bq$ —— (1)

$2bq(a^2q^2 + p^2b^2) = 12b^2q^2 \Rightarrow 2aq + 2pb = 12bq$

$[a, 4b] = [2, 6q]$

س/ جد قيمة x اذا علمت

$$[x,1]+[1,2]=[3,5]$$
$$[2x+1,2]=[3,5]$$
$$(2x+1)5=6$$
$$10x+5=6$$
$$10x=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{10}$$

∴ لا يوجد حل في Q

س/ اذا علمت ان x,y عددان صحيحان بحيث العامل المشترك الاكبر لهم هو 1 اثبت انه لا يوجد عدد نسبي $[x,y]$ بحيث ان $[x,y]^2=[2,1]$

الحل/ نفرض وجود عدد نسبي $[x,y]$ بحيث انه

$$[x,y]^2=2 \rightarrow (2,1)$$
$$[x,y][x,y]=[2,1] \qquad \frac{2}{1}=2$$
$$[x^2,y^2]=[2,1]$$
$$x^2=2y^2$$

∴ x زوجي

$$x=2k$$
$$4k^2=2y^2$$
$$2k^2=y^2$$

y^2 زوجي $\longrightarrow$ y زوجي

س/ اثبت ان Q لا تحوي قواسم للصفر

$$[a,b]\neq[0,1]$$
$$[p,q]\neq[0,1]$$
وان $[a,b]\cdot[p,q]=[0,1]$
$$[ap,bq]=[0,1]$$

$ap = 0 \longrightarrow a = 0 \;\; \cup \;\; p = 0$

$[a,b] = [0,b] \;\; \vee \;\; [p,q] = [0,q]$

$= [0,1] \qquad\qquad [0,1]$

س/ علل مع البرهان

$\mathbb{Z}^+ = [a \in \mathbb{Z} \;/\; a > 0]$

$\mathbb{Z}^+ = [-a \in \mathbb{Z} \;/\; a < 0]$

let $x \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x = [p,q] \rightarrow p > q$

$-x = [q,p] \rightarrow q < p$

$-x < 0$

ليكن $-a \in \mathbb{Z}$ بحيث $a < 0$

$-a = [q,p] \leftarrow a = [p,q]$

$q < p \qquad p > q$

$\Rightarrow -a \in \mathbb{Z}^+$

س/

$[x,2] + [3,y] = [5,10]$

$[1,x] + [y,2] = [7,6]$

الخامسة

مبرهنة: الساحة $(Q,+,\cdot,\preceq)$ هي ساحة مرتبة

والبرهان: من المبرهنة السابقة لاحظنا انه $(Q,+,\cdot,\preceq)$ ساحة بقي ان نبرهن انه $(Q,+,\cdot,\preceq)$ ساحة مرتبة

يجب ان تتحقق شروط الترتيب

① ليكن $a,b,c \in Q$ اذا كان

$a \preceq b \rightarrow a+c \preceq b+c$?

$\Rightarrow b-a=0 \lor b-a \in Q^+$

$\Rightarrow a+c=b+c \lor b-a+c-c \in Q^+$

$\Rightarrow a+c=b+c \lor (b+c)-(a+c) \in Q^+$

$\Rightarrow a+c=b+c \lor a+c < b+c$

② اذا كانت $c>0$ ~~a+c ≼ b+c~~

$a \preceq b \longrightarrow a.c \preceq b.c$?

$a \preceq b \longrightarrow a=b \lor a<b$

$\longrightarrow a.c=b.c \lor b-a \in Q^+$

$c \in Q$

$\Rightarrow a.c=b.c \lor (b-a)c \in Q^+$

$\Rightarrow a.c=b.c \lor b.c-ac \in Q^+$

$\Rightarrow a.c=b.c \lor ac<bc$

$\Rightarrow ac \preceq bc$

و.هـ.م

مبرهنة/ $(Q,+,\cdot,\preceq)$ حقل مرتب

والبرهان/ $\because$ $(Q,+,\cdot,\preceq)$ ساحة مرتبة

$\therefore$ يجب ان نثبت انه لكل عنصر $x=[a,b]\neq[0,1]$

يوجد $y\in Q$ بحيث $x.y=[1,1]$

$y=[b,a]$

البرهان/ $(a,b) \sim_Q (c,d) \Rightarrow ad = cb \;\ldots ①$

$(c,d) \sim_Q (p,q) \Rightarrow cq = dp \;\ldots ②$

بضرب المعادلة ① في q نحصل على

$aqd = cbq$

بضرب المعادلة ② في b نحصل على

$bpd = cbq$

$(aq)\cancel{d} = (bp)\cancel{d} \Rightarrow aq = bp$

لأن $d \neq 0$

∴ $\sim_Q$ علاقة تكافؤ على A

$A/\sim_Q = \{[a,b],\ a,b \in Z,\ b \neq 0\}$

تعريف مجموعة القسمة $A/\sim_Q$

تعريف/ يعرف صف تكافؤ $(a,b) \in A$ بالنسبة للعلاقة $\sim_Q$ كالآتي

$[a,b] = \{(c,d) \in A \,/\, (a,b) \sim_Q (c,d)\}$

يمكن صف التكافؤ اعتباره بالعدد النسبي وعليه يكون

$A/\sim_Q = Q$

مثال/ $0 \quad [0,1] = \{(c,d) \in A : (0,1) \sim (c,d)\}$

$0 \cdot d = c \cdot 1$, $0 = c$

$= \{(c,d) : c = 0\}$

$[0,1] = \{(0,1), (0,2), (0,-1), \ldots\}$

$1 \cdot d = c \times 2$

$\frac{1}{2} \quad [1,2] = \{(c,d) \in A : (1,2) \sim_Q (c,d)\}$

$= \{(c,d) \in A : d = 2c\}$

$= \{(1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$

جمع وضرب الأعداد النسبية

مبرهنة / لتكن $x=[a,b]$ ، $y=[c,d]$ عناصر في Q

تعرف

$x +_Q y = [ad+bc, bd]$

$x \cdot_Q y = [ac, bd]$

فأنه $+_Q$ ، $\cdot_Q$ عمليتين ثنائيتين على Q

البرهان /

let $x=[a,b]$, $y=[c,d]$

$\Rightarrow b \neq 0$, $d \neq 0$

$x +_Q y = [ad+bc, bd] \in Q$

بما أن $bd \neq 0$

if $x'=[a',b'] = x = [a,b]$

$y'=[c',d'] = y' = [c,d]$

م.ش $x' +_Q y' = x+y$?

$x +_Q y = [ad+cb, bd]$

$x' +_Q y' = [a'd'+c'b', b'd']$

$[ad+cb, bd] = [a'd'+c'd' + \cancel{d}b', b'd']$

$(ad+cb, bd) \sim_Q (a'd'+c'd' + b'd')$?

$(ad+cb)b'd' = bd(a'd'+c'b')$?

$ad\underline{d'}b' + cb\underline{b'd'} = bda'\underline{d'} + \underline{d}b\underline{b'}c'$?

$x' = x \longrightarrow a'b = b'a$ ---- (*)

$y' = y \longrightarrow c'd = d'c$ ---- (*)(*)

بعد التعويض منه (*)

$$add'b' + cbb'd' = bdd'a' + dbb'c'$$

الطرف الايسر

بعد التعويض منه (*)(*)

الطرف الايمن = الطرف الايسر ∴

م . ح للضرب

$$x \cdot y = x' \cdot y'$$

$$[ac, bd] = [a'c', b'd'] \quad ?$$

$$acb'd' = a'c'bd \quad ?$$

الطرف الايسر الطرف الايمن

$a' \cdot b = b'a$ ---- (1)

$c' \cdot d = d' \cdot c$ ---- (2)

نضرب الاولى cd'

نضرب الثانية $a'b$

$$ca'\cancel{bd}d'b = cb'd'a$$

$$a'd'cb = a'c'bd$$

ولكن الاطراف اليسرى متساوية

عليه تكون الاطراف اليمنى متساوية

وعليه $cb'd'a = a'c'bd$

لاحظ هنا

مبرهنة/ $(Q,+_Q,\cdot_Q)$ ساحة

البرهان/ (a) $(Q,+)$ زمرة ابدالية

1) + عملية ثنائية على Q

2) تجميعية لتكن $[a,b],[c,d],[e,f]$

$$([a,b]+[c,d])+[e,f]=[ad+cb,bd]+[e,f]$$
$$=[adf+cbf+ebd,bdf] \rightsquigarrow 1$$
$$[a,b]+([c,d]+[e,f])=[a,b]+[cf+ed,df]$$
$$=[adf+cfb+edb,bdf] \rightsquigarrow 2$$
$$1=2$$

3) يوجد محايد بالنسبة للجمع هو $[0,1]$

$$[a,b]+[0,1]=[a,b]$$
$$=[0,1]+[a,b]$$

4) نظير العنصر $[a,b]$ في Q هو $[-a,b]$

$$[a,b]+[-a,b]=[ab+(-ab),b^2]$$
$$=(0,b^2)=[0,1]$$

زمرة ابدالية 5)

$$[a,b]+[c,d]=[ad+bc,bd] \rightsquigarrow 1$$
$$[c,d]+[a,b]=[cb+ad,bd] \rightsquigarrow 2$$
$$1=2$$

∴ $(Q,+)$ زمرة ابدالية

يقال ساحة
1) زمرة ابدالية
حذوف الصفر
2) شبه زمرة < عملية ثنائية / تجميعية
3) الضرب يتوزع على الجمع
4) المحايد الضربي

(b) $(Q,\cdot)$ شبه زمرة

1- عملية ثنائية

2- عملية تجميعية

$([a,b].[c,d]).[e,f] = [ac, bd].[e,f]$

$= [ace, bdf]$

$[a,b].([c,d].[e,f]) = [a,b].[ce, df]$

$= [ace, bdf]$

$eq\ ① = eq\ ②$

∴ $(Q, .)$ تجميعيه

ⓒ . يتوزع على +

$[a,b]([c,d] + [e,f]) = [a,b].[cf + ed, d.f]$
$= [acf, aed, bdf] \rightsquigarrow ①$
$[a,b].[c,d] + [a,b].[e,f] = [ac, bd] +$
$[ae, bf]$
$= [acbf + aebd, b^2 df] \rightsquigarrow ②$
$[(acf + aef) b, b^2 df]$
$[acf, aed, bdf] \rightsquigarrow ②$

$① = ②$

∴ $(Q, +, .)$ حلقة

بالنسبة محايد ضربي هو $(1,1)$ $(a,b).(1,1) = (a,b)$

ⓔ $[a,b].[x,y] = [a,b] \rightsquigarrow x = y = 1$

ابدالية

ⓓ $[a,b].[c,d] = [ac, bd]$
$= [c,d].[a,b]$

8- يجب ان نثبت ان لا توجد قواسم للصفر في Q

مبرهنة: لتكن $(A,+,.)$ حلقة فان

1. $a-b = a+(-b)$
2. $a.(c-b) = ac-ab$
3. $-(a+b) = -a+(-b)$
4. $-(-a) = a$
5. $(-a)(-b) = -(-ab) = ab$
6. $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

تعريف / اذا كانت $(A,+,.)$ حلقة فيقال لعنصر $a\neq 0$ في A بانه قاسم للصفر اذا وجد $b\neq 0$ في A بحيث $ab=0$

عنصرين لا يساويان صفر وحاصل ضربهم يساوي صفر

مثال / ماهي قواسم الصفر في $(\mathbb{Z},+,.)$ ؟

الحل / $\mathbb{Z}$ لا تمتلك قواسم للصفر

فمثلا

ليكن $ab=0$ في $\mathbb{Z}$

$\rightarrow a=0 \vee b=0$

يقال للحلقة $(A,+,.)$ بأنها لا تمتلك قواسم للصفر اذا كان $ab=0 \rightarrow a=0 \vee b=0$

تعريف / يقال للحلقة الابدالية ذات محايد $(A,+,.)$ بأنها ساحة اذا لم تمتلك قواسم للصفر

مثال / $(\mathbb{Z},+,.)$ حلقة ابدالية ذات محايد ولا تمتلك قواسم للصفر

مبرهنة / في $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ اذا كان $a \neq 0$ فأن $a^2 > 0$

البرهان / بما ان $a \neq 0$ فهناك احتمالان

$a < 0 \leftarrow -a > 0$

$a > 0 \leftarrow a > 0$

اذا كان $-a > 0 \Leftarrow (-a)(-a) = a^2 > 0$

اذا كان $a > 0 \Leftarrow a \cdot a = a^2 > 0$

تعريف / يقال للتطبيق المتباينة للحلقة $(A,+,\cdot)$ أنها حلقة مرتبة اذا وجدت علاقة ترتيب كلي على A بحيث تحقق الشروط التالية

١ - لكل $a,b,c \in \mathbb{Z}$ يكون

$a < b \longrightarrow a+c \leq b+c$

٢ - لكل: $a,b \in \mathbb{Z}$ يكون

$a < b \longrightarrow a \cdot c < b \cdot c \wedge c \cdot a < c \cdot b$ if $c > 0$

مبرهنة / $(\mathbb{Z},+,\cdot,\geq)$ حلقة مرتبة

البرهان / $\because$ $\geq$ علاقة ترتيب كلي على $\mathbb{Z}$ وان $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ حلقة

وتحقق الشروط اعلاه

١ - $a < b \xrightarrow{\text{هذا يعني}} b - a > 0$

$(b-a) + c - c > 0$

$(b+c) - (a+c) > 0 \Rightarrow b+c > a+c$