محاضرات (١٤)

الكورس الصيفي

مدرس المادة

أ.م. سناء لفتة خلف

التاريخ / / ٢٠١

المعادلات التفاضلية :

المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي بين
المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل
(المستقلة) تدخل فيها المشتقات او التفاضلا
وتسمى المعادلة التفاضلية عادية (ordinary
اذا كان المتغير التابع دالة لمتغير مستقل وا
وبالتالي لا تحتوي الا على مشتقات عادية
مثال على ذلك :

متغير تابع

① $$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2$$

متغير مستقل

② $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

ملاحظة :

كثير ما نستخدم الشرطة المائلة (′) للدلالة

على المشتقة العادية فمثلاً .

المشتقة الاولى للمتغير y بالنسبة الى x هي

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

المشتقة الثانية تكتب على الصورة $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة تكتب على الصورة $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

وهكذا المشتقات العليا يصعب تكرار الشرطة فتكتب

المشتقة على الصورة $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$

حيث نضع المشتقة اعلى المتغير وبين قوسين

لتميزها عن الاس .

التاريخ / /

فمثلاً $y^{(4)}$ تعني المشتقة الرابعة و $y^{(5)}$ تعني المشتقة الخامسة و هكذا .

اما اذا كانت المعادلة التفاضلية فيها المتغير التابع دالة لاكثر من متغير مستقل وبالتالي تظهر فيها مشتقات جزئية تسمى معادلة تفاضلية جزئية (partial) . مثال على ذلك

متغير تابع

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

متغيرات مستقلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ملاحظة

في هذا المقرر سوف ندرس فقط المعادلات التفاضلية العادية .

تعريف :

① رتبة المعادلة Order .

هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

مثلاً : رتبة اولى $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ①

رتبة ثانية $y'' + 5x = 0$ ②

رتبة ثالثة $y''' + (y')^2 - 5y = \sin x$ ③

② درجة المعادلة Degree .

هي أعلى أس لأعلى مشتقة تظهر في المعاد

التفاضلية بعد وضعها على صورة خالية من

الجذور . مثلاً :

درجة اولى $y'' + 2y' + y = 0$ ①

درجة ثانية $(y''')^2 + 2y' + y'' = 0$ ②

$$[1+(y')^2]^{1/2} + 3y'' + xy = 0$$

لتحديد درجة هذه المعادلة يجب وضعها على

صورة خالية من الجذور.

$$[1+(y')^2]^{1/2} = -3y'' - xy$$

بتربيع الطرفين نحصل على:

$$1+(y')^2 = (-3y'' - xy)^2$$

$$1+(y')^2 = 9(y'')^2 + 6xyy'' + x^2y^2$$

$$1+(y')^2 - 9(y'')^2 - 6xyy'' - x^2y^2 = 0$$

اذن المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية

تمارين: جد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية الت

$$y' = e^{y'}$$

$$y'' = (5-2y')^{3/2}$$

$$[1+(y')^2]^{3/2} = Ky''$$

حل المعادلة التفاضلية

تسمى الدالة $y = w(x)$ "حلاً" للمعادلة التفاضلية

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ اذا كانت.

① قابلة للإشتقاق n مرة.

② تحقق المعادلة التفاضلية ، اي ان

$$F(x, w(x), w'(x), \dots, w^{(n)}(x)) = 0$$

مثال / اثبت ان $y = c \sin x$ "حلاً"

للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت

الحل / ① يجب ان نثبت ان $y = c \sin x$ قابلة

للإشتقاق مرتين.

$$y = c \sin x$$

$$y' = c \cos x$$

$$y'' = -c \sin x$$

③ يجب ان نثبت ان $y = C\sin x$ يحقق

المعادلة $y'' + y = 0$.

$y'' + y = -C\sin x + C\sin x = 0$

اذن $y = C\sin x$ حل للمعادلة $y'' + y = 0$

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو حل

يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالط

يحقق المعادلة التفاضلية.

اما الحل الخاص هو اي حل يحقق المعادلة التفاض

ولا يحتوي على اي ثابت من الثوابت الاختيارية و

نحصل عليه احيانا" بالتعويض عن الثوابت الاختيارية

في الحل العام بقيم محددة.