التكامل العددي
Numerical Integration

مدرس المقرر: عبير مجيد

وهو ايجاد صيغة تقريبية للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ عندما يتم حساب التكامل بالطرق التحليلية صعب او غير ممكن مثل تكامل $\int_a^b e^{x^2}\,dx$ الذي يصعب ايجاده بالطرق التحليلية ولايجاد قيمة التكامل $\int_a^b f(x)$ حيث ان $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ نقسم هذه الفترة الى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول $[x_{i-1}, x_i]$ حيث ان $i = 1, 2, \ldots, n$ و $h = \frac{b-a}{n}$ هو طول الفترة الواحدة . والتكامل هنا عبارة عن المساحة المحصورة تحت المنحني $f(x)$ وبين المستقيمين $x = a$, $x = b$ وهنالك عدة طرق لاشتقاق التكامل العددي ومن هذه الصيغ :-

١- صيغ نيوتن كوتس Newton - cotes

لاشتقاق صيغ نيوتن كوتس يتم بطريقتين هما :-

١- طريقة مباشرة تعتمد اسلوب تقريب الدالة $f(x)$ متعددة حدود لاكرانج ثم اجراء التكامل للدالة .

٢- الثانية تعتمد اسلوب ايجاد صيغة التقريب كتابة هذه الصيغ مواصفات رياضية وعددية مرغوبة .

الصيغة العامة لصيغ نيوتن - كوتس

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) + E$$

حيث ان w_i تسمى الاوزان و E هو الخطأ الناتج عن التقريب

الطريقة الاولى: وفي هذه الطريقة يتم تقريب الدالة $f(x)$ بمتعددة حدود لاكرانج

$$f(x) \simeq P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\, L_i(x)$$

لذلك فان

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_m(x) = \int_a^b \sum_{i=0}^{m} f(x_i)\, L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \left(\int_a^b L_i(x)\,dx\right) f(x_i)$$

حيث ان

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_j)/(x_i - x_j)$$

وان

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$$

نوعين من صيغ نيوتن كوتس وهما :-

نيوتن كوتس المغلقة closed Newton - cotes formula
حيث نستخدم نقاط النهايات لايجاد قيم التكامل
ترمز ان $\quad x_i = x_0 + ih \quad i = 0, 1, \dots, n$

$x_0 = a$, $x_1 = b$, $h = b - a / n$

... الحالات التالية

$m =$ ... فان $L_i(x)$ تصبح معادلة من الدرجة

... التكامل بشرحه واصلة صيغ ات الشرحية

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{1} f(x_i)\, L_i(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x_0)\, L_0(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x_1) \dots$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \dots$$

$$= \frac{1}{h}\left[-f(x_0)\frac{(x - x_1)^2}{2} + f(x_1) \dots \right.$$

$$= \frac{1}{h}\left[f(x_0)\frac{h^2}{2} + f(x_1)\frac{h^2}{2} \right.$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1 \right]$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة شبه المنحرف
(trapezoidal rule)

لنثبت :

$$\int_a^b f(x) = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f_{n-1} + f_n\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1}\right) + f_n\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum_{m=1}^{n-1} f_m + f_n\right]$$

وهذه هي الصيغة العامة لقاعدة شبه المنحرف.

مثال : جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 (x+1)\,dx$ عندما $n=1$

الحل :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$T_1 = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] = \frac{h}{2}\left[f(0) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 2\right] = \frac{3}{2}$$