التفاضل والتكامل /1   ر101

الفصل الاول: الدوال (Functions)

تعريف: لتكن كل من X و Y مجموعة غير خالية. يقال للعلاقة f من X الى Y بأنها دالة (تطبيق) function من X الى Y اذا كان لكل $x \in X$ يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ يحقق $y = f(x)$. حيث تسمى المجموعة X بمجال الدالة domain والمجموعة Y بالمجال المقابل اما مدى الدالة range فيعرف بالشكل

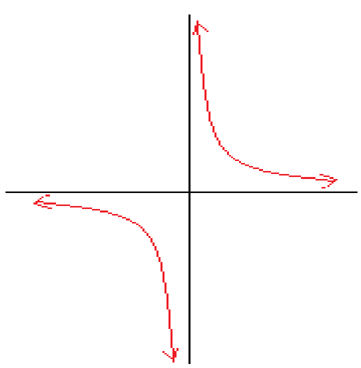
$$R_f = \{y \in Y : y = f(x), \ \ x \in X \text{ لبعض}\}$$

ملاحظات:

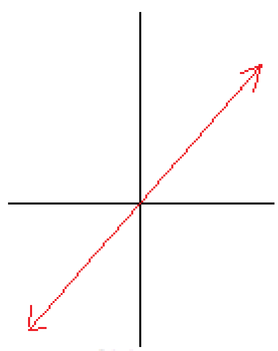
1. لايجاد المدى نكتب x بدلالة y ثم نجد قيم y.
2. لرسم الدالة توجد عدة طرق منها:

(1) نجد بعض قيم y بتحديد بعض قيم x فنحصل على النقاط (x, y) ثم نحدد ذلك على الورقة البيانية ونصل بين تلك النقاط فيتحدد رسم الدالة وتكون دقة الرسم بكثرة تلك النقاط.

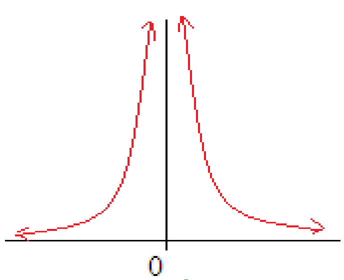
(2) نعتمد على بعض الدوال الخاصة في رسم الدالة المعطاة (كما في الامثلة 1 و 2 ادناه) ومن هذه الدوال:



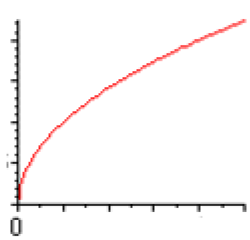
$f(x) = \frac{1}{x}$



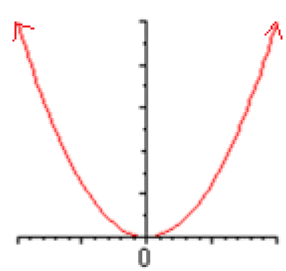
$f(x) = x$



$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$f(x) = \sqrt{x}$



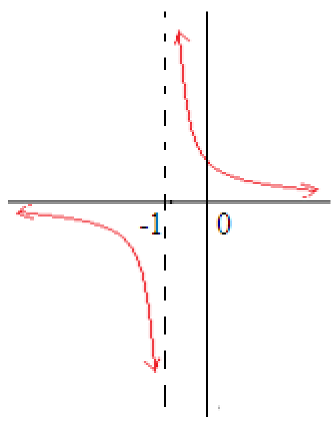
$f(x) = x^2$

(3) يمكن ايجاد مجال ومدى الدالة من معرفة رسمها كالاتي:
(4) لايجاد المجال نضع المسطرة عمودية على المحور x ونحركها يمينا وشمالا فنقاط x التي تمر بها المسطرة وهي تقطع منحني الدالة ستكون ضمن المجال وبخلافة لاتقع ضمنه.
(5) لايجاد المدى نضع المسطرة عمودية على المحور y ونحركها للاعلى والاسفل فنقاط y التي تمر بها المسطرة وهي تقطع منحني الدالة تكون ضمن المدى وبخلافه لاتقع ضمنه.

امثلة:

1. جد المجال والمدى للدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ثم ارسمها؟

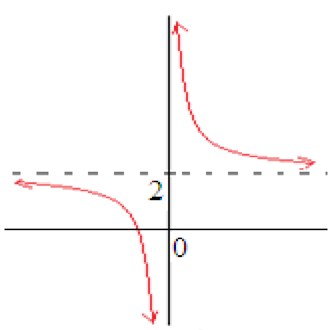
بما ان الدالة كسرية نجد قيم x التي تجعل المقام صفرا وهي $x=-1$ فيكون المجال $D_f=\mathbb{R}/\{-1\}$.
ولايجاد المدى نضع x بلالة y فيكون $x=\frac{1}{y}-1$
اي ان $R_f=\mathbb{R}/\{0\}$.



ولرسم الدالة اعلاه نلاحظ ان الدالة مشابهة للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ ماعدا المحاذي بدلا من $x=0$ اصبح $x=-1$ وبذلك يكون رسم الدالة بالشكل

2. جد المجال والمدى للدالة $f(x)=\frac{1}{x}+2$ ثم ارسمها؟

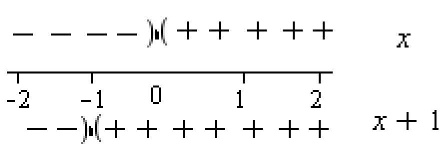
مجال الدالة هو $D_f=\mathbb{R}/\{0\}$
اما المدى فهو $R_f=\mathbb{R}/\{2\}$.



لرسم الدالة اعلاه نلاحظ ان الدالة مشابهة للدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ ماعدا المحاذي بدلا من $y=0$ اصبح $y=2$ فيكون رسم الدالة بالشكل

3. جد المجال والمدى للدالة $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ ؟

بما ان الدالة كسرية وجذرية فنتبع خط الاعداد لمعرفة مجال الدالة وبالشكل التالي:



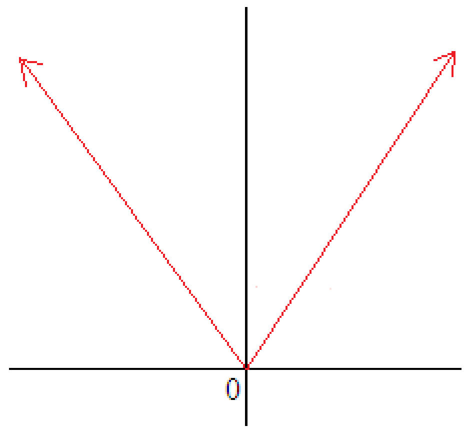
فيكون المجال هو $D_f=(-\infty,-1)\cup[0,\infty)=\mathbb{R}/[-1,0)$.
اما المدى فنجده بالشكل $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow x=\frac{y^2}{1-y^2}$
اي ان $R_f=\{y\in\mathbb{R}: y\geq 0, y\neq 1\}$

دالة القيمة المطلقة: Absolute Value function

دالة القيمة المطلقة تعرف بالشكل:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

مجال الدالة اعلاه هو $D_f = \mathbb{R}$



اما المدى فنجده بالشكل:

1. عندما $y = x$ فأن $x \geq 0$ اي ان $y \geq 0$
2. عندما $y = -x$ فأن $x < 0$ اي ان

$-y = x < 0$ فهذا يعني $y > 0$

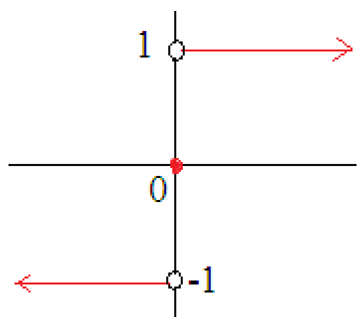
فيكون المدى $R_f = [0, \infty) \cup (0, \infty) = [0, \infty)$

اما رسم دالة القيمة الطلقة فيكون بالشكل

دالة الاشارة: Signum function

تعرف دالة الاشارة بالشكل

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



حيث ان $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \{-1,0,1\}$

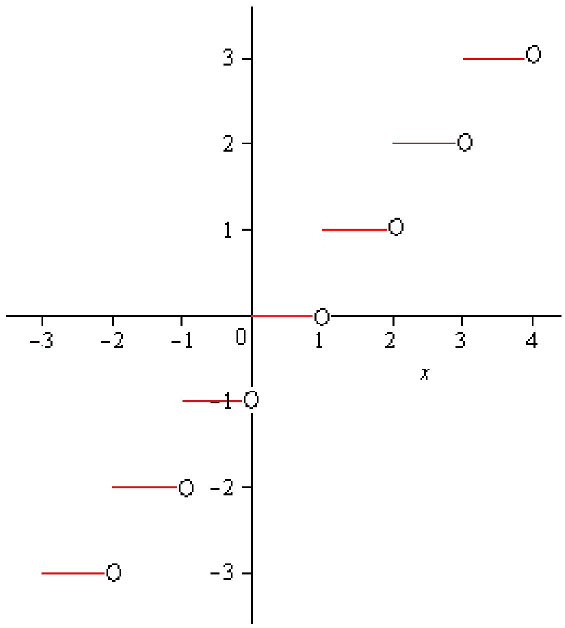
اما رسم الدالة فيكون بالشكل

دالة الصحيح الاعظم: *Greatest Integer function*

تعرف دالة الصحيح الاعظم بالشكل:

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots & \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ \vdots & \end{cases}$$

حيث ان



$R_f = \mathbb{Z}$ و

وان رسم الدالة يكون بالشكل:

ملاحظة: $[-2.5] = -3 \qquad [-2] = -2, \qquad [2.5] = 2, \qquad [2] = 2,$

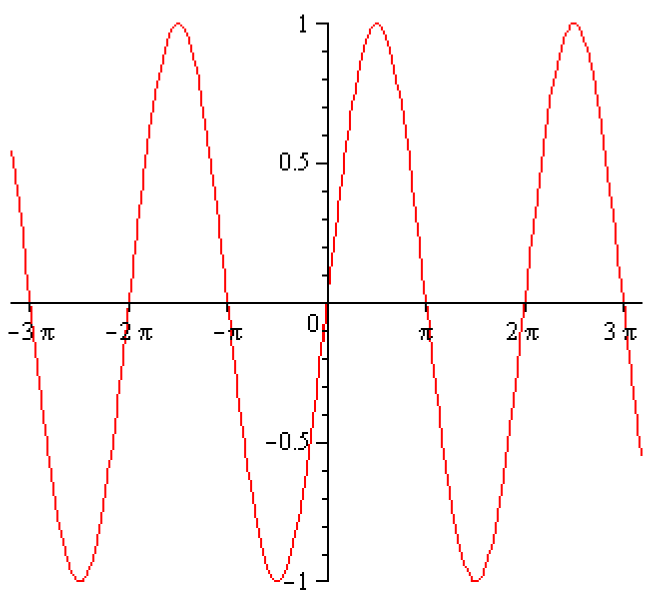
الدوال المثلثية: *Trigonometric functions*

الدالة الجيب: *Sine function*

$$sin(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$D_{sin} = \mathbb{R}, \qquad R_{sin} = [-1, 1]$$

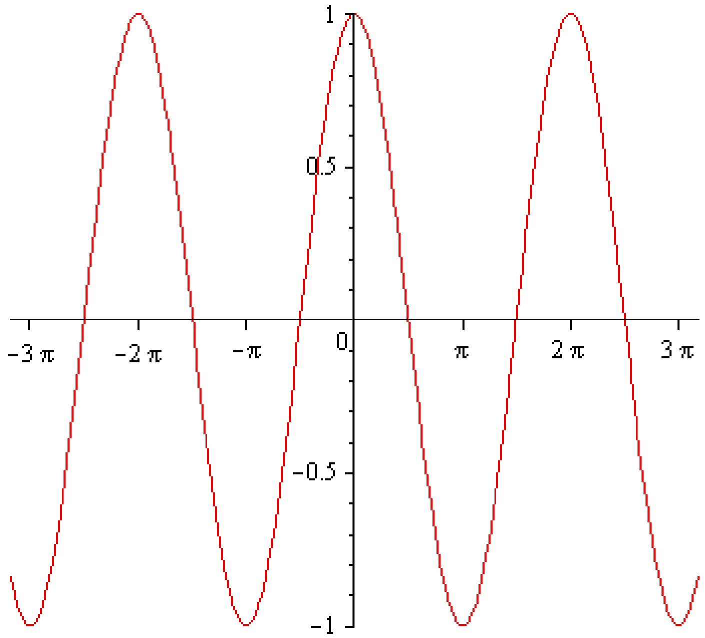
الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$. اما رسم دالة الجيب بالشكل:



الدالة الجيب التمام: *Cosine function*

$$cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

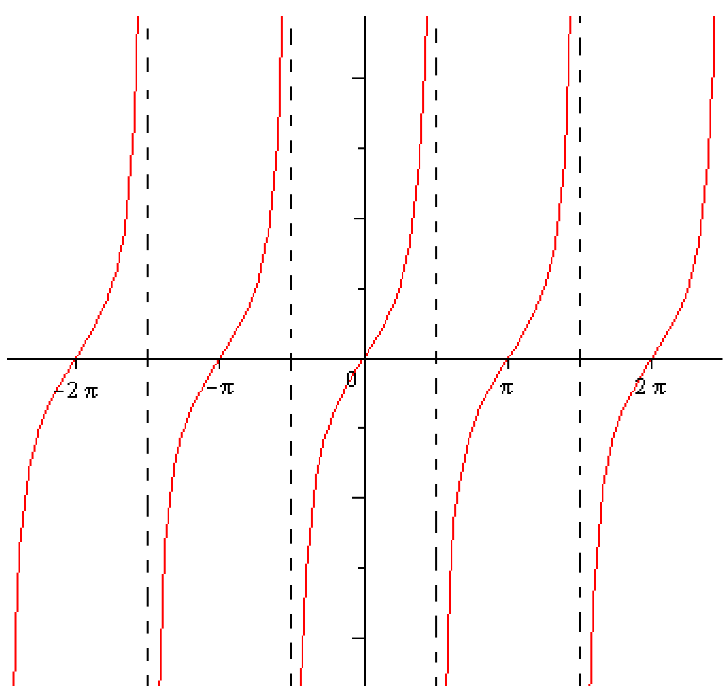
$$D_{cos} = \mathbb{R}, \qquad R_{cos} = [-1, 1]$$



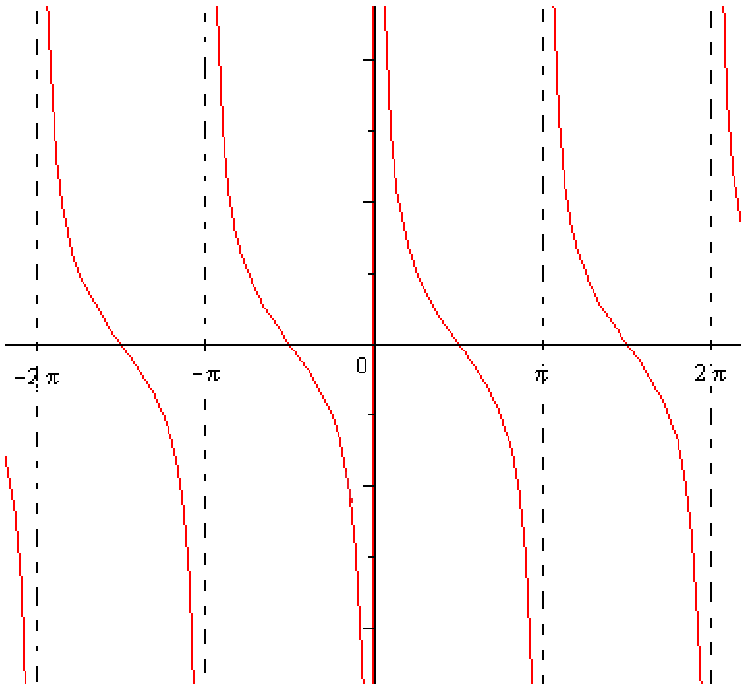
دالة الظل: *Tangent function*

$$tan(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$D_{tan} = \mathbb{R}/\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$R_{tan} = \mathbb{R}$$



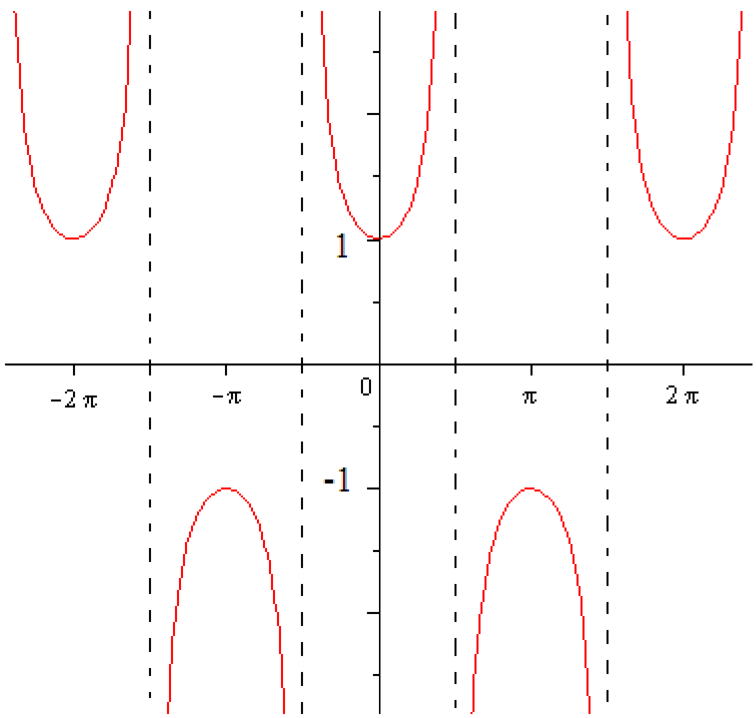
دالة الظل التمام: *Cotangent function*



$$cot(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$D_{cot} = \mathbb{R}/\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\},$
$R_{cot} = \mathbb{R}$

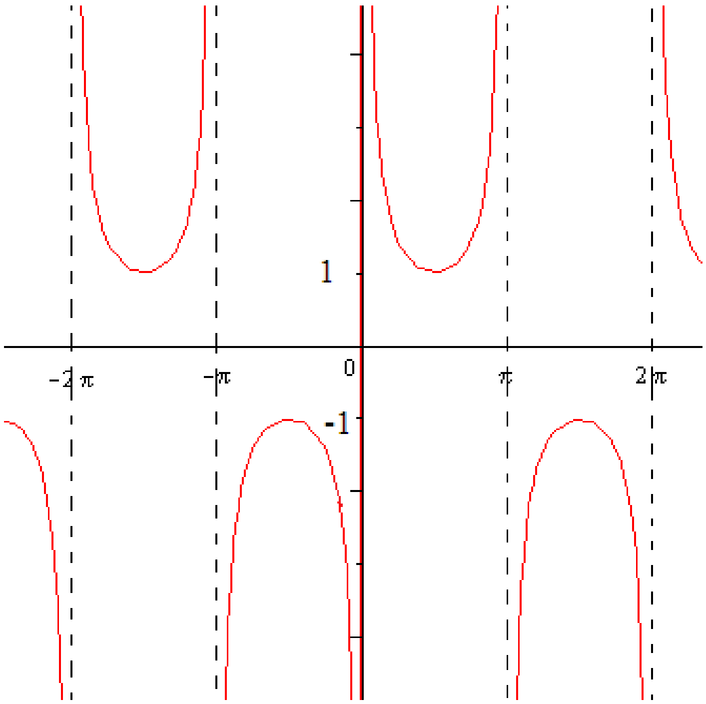
دالة القاطع: *Secant function*



$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$$

$D_{sec} = \mathbb{R}/\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\},$
$R_{sec} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

دالة القاطع التمام: ***Cosecant function***



$$csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$$

$$\begin{aligned} D_{csc} &= \mathbb{R}/\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}, \\ R_{csc} &= (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \end{aligned}$$

امثلة:

1. ارسم الدالة التالية مبينا مجالها ومداها $f(x) = \sqrt{sgn(x)}$

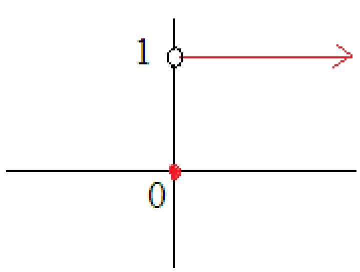
الحل:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{sgn(x)} = \begin{cases} \sqrt{1}, & x > 0 \\ \sqrt{0}, & x = 0 \\ \sqrt{-1}, \quad \text{يهمل} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

فيكون $D_f = [0, \infty)$ و $R_f = \{0,1\}$

اما رسم الدالة فيكون بالشكل:

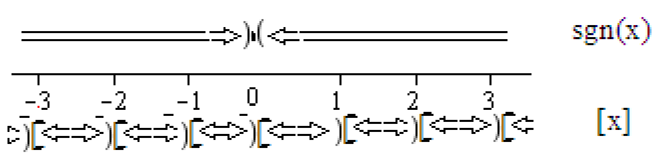


2. ارسم الدالة التالية مبينا مجالها ومداها $f(x) = sgn(x) + [x]$

الجواب: نعرف كل من دالة الاشارة ودالة الصحيح الاعظم

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad [x] = \begin{cases} \vdots & \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 0, & 0 \le x < 1 \\ -1, & -1 \le x < 0 \\ -2, & -2 \le x < -1 \\ \vdots & \end{cases}$$

الان نرسم خط الاعداد ونثبت عليه النقاط المميزة الى x وهي ...,-2,-1,0,1,2,... ثم نثبت مجال الدالتين وبالشكل

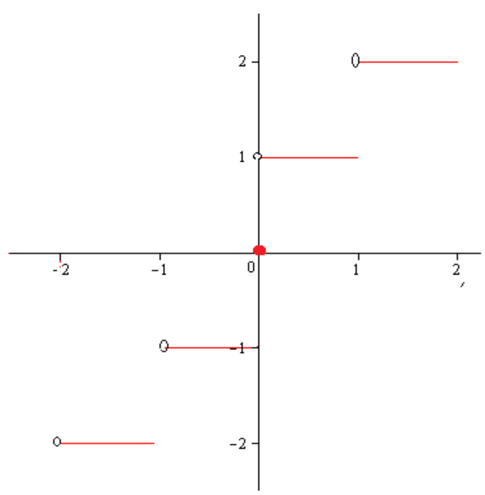


فيكون مجال الدالة الرئيسية هو التقاطعات بين المجالين ومنها نحصل على تعريف الدالة الرئيسية وبالشكل:

$$sgn(x) + [x] = \begin{cases} \vdots & \\ 1+1, & 1 < x \le 2 \\ 1+0, & 0 < x \le 1 \\ 0+0, & x = 0 \\ -1+(-1), & -1 \le x < 0 \\ -1+(-2), & -2 \le x < -1 \\ \vdots & \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \vdots & \\ 2, & 1 < x \le 2 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \\ -2, & -1 \le x < 0 \\ -3, & -2 \le x < -1 \\ \vdots & \end{cases}$$

عندئذ $D_f = \mathbb{Z}/\{-1\}$ و $R_f = \mathbb{R}$ اما رسم الدالة فيكون بالشكل



.3 ارسم الدالة $f(x) = \sin(|x|)$ مبينا مجالها ومداها

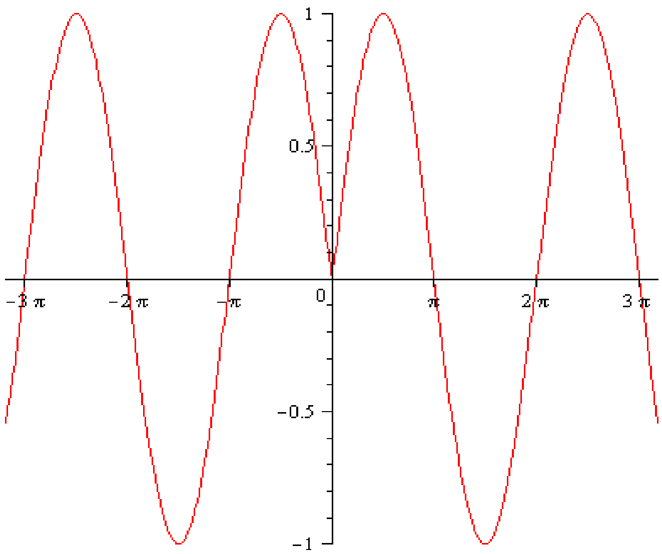
لرسم الدالة اعلاه نعرف اولا دالة القيمة المطلقة ثم ندخل عليها دالة الجيب وبالشكل التالي:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(|x|) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ \sin(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(|x|) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ -\sin(x), & x < 0 \end{cases}$$

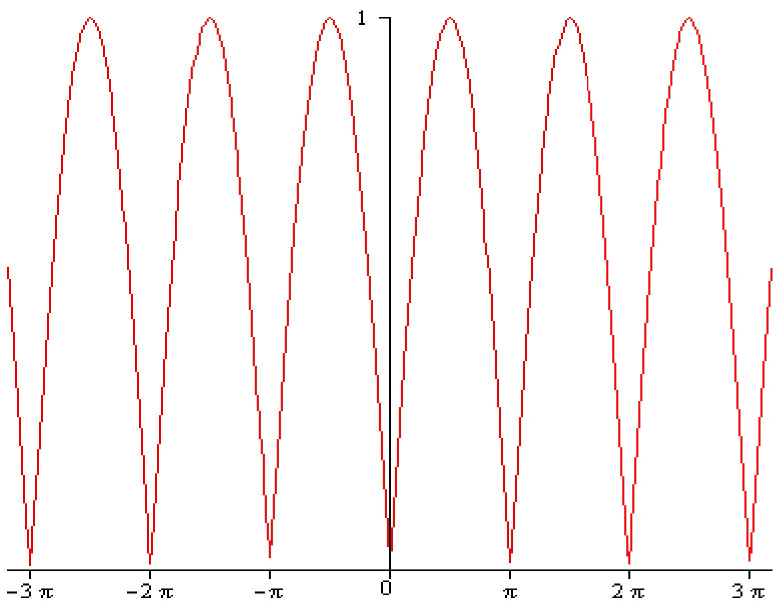
فيكون رسم الدالة اعلاه معتمد على رسم دالة الجيب وبالشكل:



.4 ارسم الدالة $f(x) = |\sin(x)|$ مبينا مجالها ومداها

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), & \sin(x) < 0 \end{cases}$$

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & x \in \cdots \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \ldots \\ -\sin(x), & x \in \cdots \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \ldots \end{cases}$$



واضح ان $R_f = [0, 1]$, $D_f = \mathbb{R}$,

تمارين:

1) ارسم كل من الدوال التالية مبينا مجالها ومداها:

$1. f(x) = [sgn(x)]$ $\quad 2. f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ $\quad 3. f(x) = x + sgn(-x)$

$4. f(x) = x - [x]$ $\quad 5. f(x) = \sqrt{x}\, sgn(\sqrt{x})$ $\quad 6. f(x) = \sqrt{sgn(x-2)}$

$7. f(x) = |x+1| + |x|$ $\quad 8. f(x) = \dfrac{sgn(x+1)}{x}$ $\quad 9. f(x) = sgn(x^2 + 4)$

$10. f(x) = |[x+1| - 2$ $\quad 11. f(x) = x[x]$ $\quad 12. f(x) = x^2.sgn(x)$

2) جد قيمة كل من a و b اذا كان مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+b}$ هو $\mathbb{R}/\{-1,2\}$

العلاقات المثلثية:

1. $sin^2(x) + cos^2(x) = 1, \quad sec^2(x) - tan^2(x) = 1, \quad csc^2(x) - cot^2(x) = 1$
2. $cos(-x) = cos(x), \quad sin(-x) = -sin(x)$
3. $cos(x \pm y) = cos(x)\, cos(y) \mp sin(x)\, sin(y),$

   $sin(x \pm y) = sin(x)\, cos(y) \pm cos(x)\, sin(y)$

   $tan(x \pm y) = \frac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x) tan(y))} \quad cot(x \pm y) = \frac{cot(x) cot(y) \mp 1}{cot(y) \mp cot(x)}$
4. $sin(2x) = 2\, sin(x)\, cos(x), \quad cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
5. $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x)), \quad sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$
6. $sin(ax)\, cos(bx) = \frac{1}{2}[sin((a-b)\,x) + sin((a+b)\,x)]$

   $sin(ax)\, sin(bx) = \frac{1}{2}[cos((a-b)\,x) - cos((a+b)\,x)]$

   $cos(ax)\, cos(bx) = \frac{1}{2}[cos((a-b)\,x) + cos((a+b)\,x)]$

الفصل الثاني: الغايات (Limits)

تعريف:

1. اذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد L_1 عندما x تقترب من a من جهة اليمين فأن L_1 يسمى غاية (limit) الدالة f عندما x تقترب من a من جهة اليمين وتكتب $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
2. اذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من العدد L_2 عندما x تقترب من a من جهة اليسار فأن L_2 يسمى غاية (limit) الدالة f عندما x تقترب من a من جهة اليسار وتكتب $\lim_{x\to a^-} f(x)$.
3. اذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$ فأن L تسمى غاية الدالة f عندما x تقترب من a

ملاحظة:

1. لكي تكون للدالة f غاية عندما تقترب x من a من احد الجهتين يجب ان تكون الدالة معرفة عند تلك الجهة ولايشترط ان تكون معرفة عند a.
2. الرمز a^- يعني يسار العدد a وهو اقرب عدد حقيقي الى a من جهة اليسار وكذلك بالنسبة للرمز a^+ فهو اقرب عدد حقيقي الى a من جهة اليمين. علما انه كلما وجدنا عدد قريب من a من اليسار او اليمين فأنه يوجد عدد اقرب من ذلك مثلا $2^+ \neq 2.1$ كذلك $2^+ \neq 2.001$ كذلك $2^+ \neq 2.000001$ ...
3. $a^+ \neq +a$ و $a^- \neq -a$
4. اذا كانت الدالة المراد اخذ الغاية لها ليست كسرية ولاجذرية (او جذرية او كسرية لكن داخل الجذر دائما ليس سالب او مقام الكسر دائما ليس صفرا) وليست دالتي الاشارة او الصحيح الاعظم فعند التعويض المباشر بقيمة x (سواء من جهة اليسار او اليمين) ولم تحدث مشكلة عندئذ قيمة الغاية هي قيمة التعويض المباشر.
5. اذا حدثت مشكلة عند التعويض المباشر (كأن تكون $\frac{0}{0}$) فنحاول التخلص منها (قدر الامكان) كأن نحلل ونختصر.
6. خواص الغايات:

(1) $\lim_{x\to a} c = c$ لكل ثابت c.

(2) $\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$

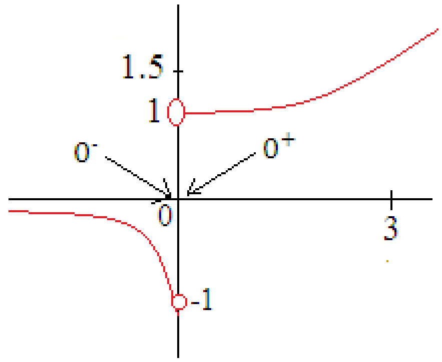
(4) $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$ بشرط $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

(5) $lim_{x\to 0}\, sin(x) = 0, \qquad lim_{x\to 0}\, cos(x) = 1,$

$$lim_{x\to 0} \frac{sin\,(x)}{x} = 1, \qquad lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,(x)}{x} = 0,$$

امثلة:

1. جد (ان وجدت) الغاية للدالة المرسومة ادناه عند النقطتين $x = 0,\ 3$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

بما ان غاية اليمن لاتساوي غاية اليسار فعليه لاتوجد غاية للدالة اعلاه عند $x = 0$.

اما بالنسبة للنقطة $x = 3$ فالغاية تسوي 1.5 لان $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1.5 = \lim_{x\to 3^-} f(x)$

2. احسب الغاية (ان وجدت) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$$

3. احسب الغاية (ان وجدت) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

من تعريف القيمة المطلقة نحصل على

$$lim_{x\to 0^-}|x| = -x \quad \text{و} \quad lim_{x\to 0^+}|x| = x$$

وعليه يكون $\quad lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 \qquad lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

اي ان غاية اليمين واليسار للدالة اعلاه عند $x = 0$ موجودتين لكن غير متساويتين وبالتالي الغاية اعلاه غير موجودة.

4. احسب الغاية (ان وجدت) $lim_{x\to 1} sgn(x-1)$

بما ان قيمة المقدار $(1^+ - 1)$ كمية موجبة والمقدار $(1^- - 1)$ كمية سالبة ومن تعريف الدالة $sgn(x)$ فأن

$$lim_{x\to 1^-} sgn(x-1) = -1 \quad \text{و} \quad lim_{x\to 1^+} sgn(x-1) = 1$$

5. احسب الغاية (ان وجدت) $\lim_{x\to 2}[x]$

من تعريف دالة الصحيح الاعظم نلاحظ ان $\lim_{x\to 2^+}[x] = 2$ لكن $\lim_{x\to 2^-}[x] = 1$

فعليه الغاية اعلاه غير موجودة

6. احسب الغاية (ان وجدت) $\lim_{x\to 2.5}[x]$

من تعريف دالة الصحيح الاعظم نلاحظ ان $\lim_{x\to 2.5^-}[x] = 2 = \lim_{x\to 2.5^+}[x]$

فعليه الغاية اعلاه موجودة وقيمتها 2.

7. احسب الغاية (ان وجدت) $lim_{x\to 2.3}[x+0.7]$

نلاحظ من تعريف دالة الصحيح الاعظم

$$lim_{x\to 2.3^+}[x+0.7] = [2.3^+ + 0.7] = [3^+] = 3$$

وكذلك $\quad lim_{x\to 2.3^-}[x+0.7] = [2.3^- + 0.7] = [3^-] = 2$

وعليه الغاية اعلاه غير موجودة.

.8 $lim_{x\to\pi} cos\left(\frac{x^2}{\pi+x}\right) = cos\left(\frac{\pi^2}{\pi+\pi}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

.9 $lim_{x\to0} \frac{sin(3x)}{4x} = \frac{3}{4} lim_{x\to0} \frac{sin(3x)}{3x} = \frac{3}{4}$

.10 $lim_{x\to0} \frac{x}{\sin(2x)} = lim_{x\to0} \frac{x}{\sin(2x)} . \frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} = lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{lim_{x\to0}\frac{1}{2}}{lim_{x\to0}\frac{sin(2x)}{2x}} = \frac{1}{2}$

.11 $lim_{x\to0} \frac{tan(3x)}{sin(5x)} = lim_{x\to0} \frac{sin(3x)}{cos(3x)} . \frac{1}{sin(5x)}$

$$= lim_{x\to0} sin(3x) . lim_{x\to0} \frac{1}{sin(5x)} lim_{x\to0} \frac{1}{cos(3x)}$$

$$= \lim_{x\to0} sin(3x). \frac{3x}{3x} . lim_{x\to0} \frac{1}{sin(5x)} . \frac{5x}{5x} . lim_{x\to0} \frac{1}{cos(3x)}$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x\to0} \frac{sin(3x)}{3x} . lim_{x\to0} \frac{5x}{sin(5x)} . lim_{x\to0} \frac{1}{cos(3x)} = \frac{3}{5}$$

.12 $lim_{x\to0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = lim_{x\to0} \frac{1-cos(x)}{x^2} . \frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}$

$$= lim_{x\to0} \frac{1-cos^2(x)}{x^2} . \lim_{x\to0} \frac{1}{(1+cos(x))}$$

$$= lim_{x\to0} \frac{sin^2(x)}{x^2} . \lim_{x\to0} \frac{1}{(1+cos(x))} = (\lim_{x\to0} \frac{sin(x)}{x})^2 \lim_{x\to0} \frac{1}{(1+cos(x))} = (1)\left(\frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{2}$$

.13 $lim_{x\to\infty} x\, tan\left(\frac{1}{x}\right)$

نفرض $u = \frac{1}{x}$ وعليه عندما $x \longrightarrow \infty$ فأن $u \longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow lim_{x\to\infty} x\, tan\left(\frac{1}{x}\right) = lim_{u\to0} \frac{1}{u} tan(u) = lim_{u\to0} \frac{\sin(u)}{u} . \frac{1}{\cos(u)} = (1)(1) = 1$$

الغاية اللانهائية:

1. اذا كانت قيمة الدالة f $(f(x))$ تزداد بالاتجاه الموجب بدون ان تتوقف عند عدد معين عندما تقترب x من العدد a من كلا الاتجاهين فيقال ان الدالة f تقترب من اللانهاية الموجبة عندما x تقترب من a وتكتب $lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty = lim_{x\to a^-} f(x)$ اي ان $lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
2. اذا كانت قيمة الدالة f $(f(x))$ تزداد بالاتجاه السالب بدون ان تتوقف عند عدد معين عندما تقترب x من العدد a من كلا الاتجاهين فيقال ان الدالة f تقترب من اللانهاية السالبة عندما x تقترب من a وتكتب $lim_{x\to a^+} f(x) =$ $-\infty=limx\to a-fx$ اي ان $limx\to afx=-\infty$.

ملاحظات:

1. الرمز $(+\infty)$ ليس عددا حقيقيا ولكنه يشير الى عدد حقيقي كبير جدا جدا بالاتجاه الموجب كذلك بالنسبة للرمز $(-\infty)$ليس عددا حقيقيا ولكنه يشير الى عدد حقيقي كبير جدا جدا بالاتجاه السالب.
2. اذا كانت نتيجة التعويض المباشر هي عدد نسبي بسطه عدد حقيقي ومقامه صفرا عندئذ تكون قيمة الغاية هي ∞ بقي ان نبحث انها موجبة $(+\infty)$ او سالبة $(-\infty)$.
3. كل من الصيغ $0.\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$ في الغايات تسمى <u>غير محددة</u> (بينما في الدوال تسمى غير معرفة) فنحاول تغييرها لايجاد قيمة الغاية.
4. لاي ثابت c يكون $-\infty \pm c = -\infty$ $+\infty \pm c = +\infty,$
5. لاي ثابت $c>0$ يكون $\pm\infty.c=\pm\infty$.
   لاي ثابت $c<0$ يكون $\pm\infty.c=\mp\infty$.
6. $(\mp\infty).(\mp\infty)=+\infty$ و $(\mp\infty).(\pm\infty)=-\infty$
7. عندما $0<c<1$ فأن $c^{+\infty}=0$ و $c^{-\infty}=+\infty$
8. عندما $c>1$ فأن $c^{+\infty}=+\infty$ و $c^{-\infty}=0$
9. لاي ثابت c يكون $\frac{c}{-\infty}=0=\frac{c}{+\infty}$

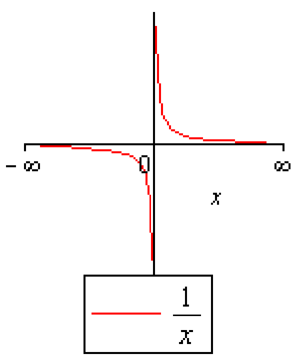
امثلة:

1. احسب (ان وجدت) كل من الغايتين $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}$

يمكن ايجاد قيمة الغايتين اعلاه بعدة طرق منها:

(1)

نلاحظ من رسم الدالة $\frac{1}{x}$ ان قيمة الدالة عندما قيمة x تقترب جدا جدا من الصفر من جهة اليمين هي $+\infty$ و اما قيمة الدالة عندما قيمة x تقترب جدا جدا من الصفر من جهة اليسار هي $-\infty$.



(2) قيمة الدالة $\frac{1}{x}$ تزداد كلما صغرت قيمة x الموجبة وبالتالي تكون اكبر ما يكون $(+\infty)$ عندما تكون x اصغر ما يكون بالاتجاه الموجب 0^+ بينما قيمة الدالة $\frac{1}{x}$ تصغر كلما صغرت قيمة x السالبة وبالتالي تكون اصغر ما يكون $(-\infty)$ عندما تكون x اكبر ما يكون بالاتجاه السالب 0^-.

2. احسب (ان وجدت) الغاية $lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

نلاحظ انه عند التعويض المباشر تكون النتيجة $\frac{-1}{0}$ وعليه تكون نتيجة الغاية (ان وجدت) هي ∞ وسنبحث غاية اليمين واليسار لمعرفة اشارة ∞

$$lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-}{+}=-\infty$$
$$lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-}{-}=+\infty$$

بما ان غاية اليمين واليسار غير متساويتين فعليه الغاية اعلاه غير موجودة.

3. احسب (ان وجدت) الغاية $lim_{x\to 0}\frac{3^{\frac{1}{x}}-3}{3^{\frac{1}{x}}+3}$

بما ان $lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ فعليه نحصل على

$$lim_{x\to 0^-}\frac{3^{\frac{1}{x}}-3}{3^{\frac{1}{x}}+3}=\frac{3^{-\infty}-3}{3^{-\infty}+3}=\frac{0-3}{0+3}=-1$$

اما عند التعويض المباشر من جهة اليمين للصفر فستون النتيجة $\frac{\infty}{\infty}$ وهي صيغة غير محددة وللتخلص منها نضرب البسط والمقام بالمقدار الذي يسبب المشكلة بعكس اشارة الاس اي نضرب بالمقدار $\frac{3^{-\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}}$ بالشكل التالي:

$$lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}-3}{3^{\frac{1}{x}}+3}=lim_{x\to 0^+}\frac{3^{\frac{1}{x}}-3}{3^{\frac{1}{x}}+3}.\frac{3^{-\frac{1}{x}}}{3^{-\frac{1}{x}}}=lim_{x\to 0^+}\frac{1-3.3^{-\frac{1}{x}}}{1+3.3^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

بما غاية اليمين وغاية اليسار غير متساويتين فعليه الغاية اعلاه غير موجودة.

4. $$lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin(x)}=lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin(x)}.\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sin(x)}{x}}=\frac{lim_{x\to 0}\frac{1}{x}}{lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}=lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

5. $$lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}.\frac{1}{x}2\,lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}.lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=2\,lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

بما ان $lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ غير موجودة فعليه $lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x^2}$ غير موجودة

<u>طريقة اخرى للحل</u>

$$lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x^2}=lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{x^2}=2\,lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}.lim_{x\to 0}\cos(x).lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

الغاية عند اللانهاية

1. اذا اقتربت قيمة الدالة f $(f(x))$ من العدد L عندما تزداد x بالاتجاه الموجب فنقول ان L غاية الدالة f عندما تقترب x من $+\infty$ وتكتب $lim_{x\to\infty} f(x) = L$.
2. اذا اقتربت قيمة الدالة f $(f(x))$ من العدد L عندما تزداد x بالاتجاه السالب فنقول ان L غاية الدالة f عندما تقترب x من $-\infty$ وتكتب $lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

ملاحظات:

1. لايجوز مناقشة الغاية من اليمين واليسار عند اللانهاية.
2. اذا كانت الدالة هي دالة كسرية فيها البسط والمقام بشكل متعددات حدود وكان ناتج التعويض المباشر هو احد الصيغ غير المحددة عندئذ نقسم كل من البسط والمقام على x^n حيث n اكبر اس في الدالة.

امثلة:

1. احسب (ان وجدت) الغايتين $lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ و $lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$

من الممكن ايجاد الغاية اعلاه بعدة طرق منها:

(1) من رسم الدالة نلاحظ انه كلما كبرت x سواءا بالاتجاه الموجب او السالب فأن منحني الدالة سينطبق مع المحور x اي ان قيمة الدالة ستكون صفر. اي ان $lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

(2) كلما كبرت x سواءا بالاتجاه الموجب (او السالب) فأن قيمة $\frac{1}{x}$ ستصغر(او تكبر) الى ان تصبح صفرا, مثلا

$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots \frac{1}{10000} > \cdots > 0$ وكذلك $-\frac{1}{1} < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \cdots < -\frac{1}{10000} \ldots < 0$

اي ان $lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

2. احسب (ان وجدت) الغاية $lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3}{3x^2-2}$

نلاحظ ان ناتج التعويض المباشر للغاية اعلاه هو احد الصيغ غير المحددة وهي $\frac{\infty}{\infty}$ وبالتالي نقسم البسط والمقام بالمقدار x^3 وبالشكل

$$lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3}{3x^2-2} = lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3}{3x^2-2} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$$

$$= lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

3. احسب (ان وجدت) الغاية $lim_{x\to\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

نلاحظ ان ناتج التعويض المباشر للغاية اعلاه هو احد الصيغ غير المحددة وهي $\frac{\infty}{\infty}$ وبالتالي نقسم البسط والمقام بالمقدار 3^x وبالشكل

$$lim_{x\to\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=lim_{x\to\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}.\frac{\frac{1}{3^x}}{\frac{1}{3^x}}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{1+3^{-2x}}{1-3^{-2x}}==\frac{1+0}{1-0}=1$$

4. احسب (ان وجدت) الغاية $lim_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2-1}$

$$lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1}).\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\infty}=0$$

5. $$lim_{x\to-\infty}sin\left(\frac{\pi x^2+1}{2x^2+5}\right)=lim_{x\to-\infty}sin\left(\frac{\pi x^2+1}{2x^2+5}.\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=lim_{x\to-\infty}\frac{\pi+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

6. $$lim_{x\to0}csc(x)=lim_{x\to0}\frac{1}{sin(x)}$$

من مثال (5) اعلاه نجد ان $lim_{x\to0^+}\frac{1}{sin(x)}=+\infty,\quad lim_{x\to0^-}\frac{1}{sin(x)}=-\infty$

وهذا يعني ان $lim_{x\to0}csc(x)$ غير موجودة.

<u>طريقة اخرى</u>: الغاية اعلاه غير موجودة بالاعتماد على رسم دالة القاطع تمام.

<u>تمارين</u>: جد الغايات التالية: اذا علمت ان a عدد صحيح و α عدد حقيقي يقع بين العددين الصحيحين a و $a+1$.

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to a}[x]$
5. $\lim\limits_{x\to\alpha}[x]$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{|x|}$
8. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2}{|x-2|}$
9. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+1}$
10. $\lim\limits_{x\to9}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}}{x-9}$
11. $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^3}$
12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{-x}}}{3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{-x}}}$
13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\frac{1}{3})^x-(\frac{1}{3})^{-x}}{(\frac{1}{3})^x+(\frac{1}{3})^{-x}}$
14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+10^{-\frac{1}{x}}}{1-10^{-\frac{1}{x}}}$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

16. $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})}{2x+1}$ 17. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}$ 18. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sec(x)$

19. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos(x)}{x\,sin(x)}$ 20. $\lim_{x\to0}\frac{2-2sec^2(x)}{sin^2(x)}$ 21. $\lim_{x\to2}\frac{cos(\frac{\pi}{2})}{x-2}$

22. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos^4(x)}{x^2}$ * 23. $\lim_{x\to0}\frac{sec(x)-1}{x^2}$ 24. $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{sec(x)-1}{x^2}$

25. $\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{sin(x)}$ 26. $\lim_{h\to0}\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$ 27. $\lim_{x\to0}\frac{1-2\cos(x)+cos(2x)}{x^2}$

19. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos(x)}{x\,sin(x)}$ 20. $\lim_{x\to0}\frac{2-2sec^2(x)}{sin^2(x)}$ 21. $\lim_{x\to2}\frac{cos(\frac{\pi}{2})}{x-2}$

الفصل الثالث: الاستمرارية:

يقال عن الدالة f بأنها مستمرة عند النقطة $x=c$ اذا تحققت الشروط التالي:

1. $f(c)$ معرفة (موجودة)
2. $lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ومنتهية
3. $f(c)=lim_{x\to c} f(x)$

ويقال ان الدالة f مستمرة على المجموعة A اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاطها.

ملاحظات:

1. المعنى الهندسي لأستمرارية دالة عند نقطة هو ان يكون منحني الدالة متصل عند تلك النقطة.
2. لاختبار وجود قيمة للدالة عند نقطة معينة نعوض تعويضا مباشرا بالدالة دون اي اختصار (على خلاف اختبار وجود الغاية حيث نختصر ثم نعوض).

امثلة:

1. ابحث استمرارية الدالة $f(x)=\frac{x^2}{x}$ عند النقطة $x=0$

عند التعويض المباشر بالنقطة $x=0$ تكون قيمة الدالة هي $\frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة وعليه الدالة اعلاه غير مستمرة.

2. ابحث استمرارية الدالة $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ عند $x=2$
نلاحظ ان $f(2)=\sqrt{5}$ و $lim_{x\to 2^+} f(x)=\sqrt{5}=lim_{x\to 2^-} f(x)$
اي ان $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ وعليه الدالة اعلاه مستمرة عند $x=2$.
3. ابحث استمرارية الدالة $f(x)=[x]$ عند العدد الصحيح a
نلاحظ ان الشرط الثاني غير متحقق لان الغاية غير موجودة لان الغايتين اليمنى واليسرى غير متساويتين لان $\lim_{x\to a^+}[x]=a$ بينما $\lim_{x\to a^-}[x]=a-1$ وبالتالي تكون الدالة اعلاه غير مستمرة عند a.
4. جد قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}, & x\neq 2\\ c & x=2\end{cases}$ مستمرة عند $x=2$
نلاحظ ان $f(2)=c$ و

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}\cdot\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$$
$$=lim_{x\to 2}\frac{9-(x^2+5)}{(x^2-4)(3+\sqrt{x^2+5})}$$
$$=lim_{x\to 2}\frac{-1}{3+\sqrt{x^2+5}}=-\frac{1}{6}$$

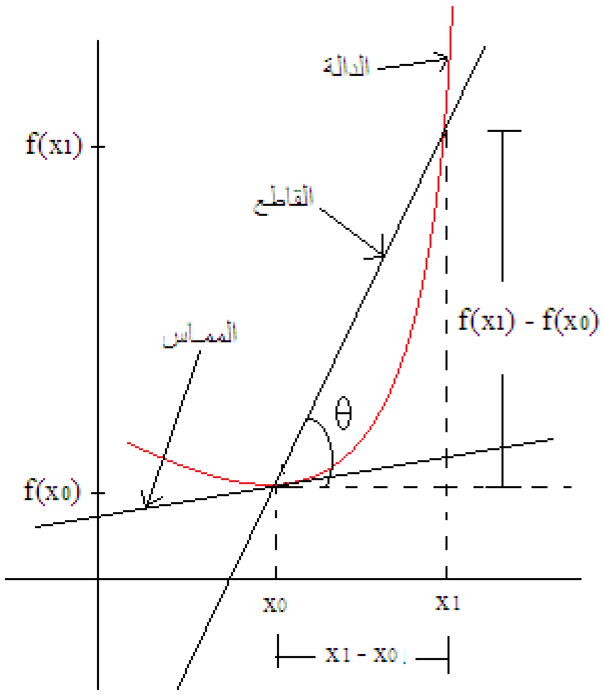
بما ان الدالة مستمرة عند $x=2$ فعليه $f(2)=lim_{x\to 2} f(x)$ اي ان $c=-\frac{1}{6}$.

تمارين: اختبر استمرارية كل من الدوال التالية عند النقاط ازاء كل منها

1. $f(x)=sgn(x)$ عند النقاط $x=0,0.5,1$
2. $f(x)=sgn([x])$ عند النقاط $x=0,0.5,1$
3. $f(x)=[x]$ عند العدد الحقيقي α الذي يقع بين العددين الصحيحين a و $a-1$
4. $f(x)=[x]-[x-1]$ عند النقاط $x=0,\ 1$
5. $f(x)=[x]-[-x]$ عند النقطة $x=0$
6. $f(x)=\sqrt{x}\,sgn(\sqrt{x})$ عند النقطة $x=1$
7. $f(x)=sgn(x^2+1)+sgn(x^2-1)$ عند النقطة $x=1$
8. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 2\\ x^2, & x<2\end{cases}$ عند النقطة $x=2$
9. جد قيمة الثوابت a و b التي تجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, & x\geq 1\\ 3ax-b, & x<1\end{cases}$ مستمرة عند $x=1$.
10. جد قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة $f(x)=\begin{cases}x+c^2+1, & x>0\\ 5, & x=0\\ x+c+3, & x<0\end{cases}$ مستمرة عند النقطة $x=0$

الفصل الرابع: المشتقة:

تعريف: مشتقة الدالة f عند النقطة x_0 تعرف بالشكل:



$$f'(x_0) = lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

بشرط ان تكون الغاية اعلاه موجودة ومنتهية.

ملاحظات:

1. ضع $h = x - x_0$ وعليه عندما $x \to x_0$ فأن $h \to 0$ اي ان

2. المعنى الهندسي لمشتقة دالة عند نقطة هو وجود مماس للدالة عند تلك النقطة، وقيمة المشتقة لدالة عند نقطة هي قيمة ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع المحور $x -$ عند تلك النقطة.
3. للمشتقة اعدة رموز منها: $y',\ f',\ \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$

امثلة: استخدم تعريف المشتقة لايجاد مشتقة الدوال التالية:

1. $f(x) = \sqrt{x}$

$$y' = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} . \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$
$$= lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. $f(x)=x^2$

$$\begin{aligned} y' &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}(2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

3. $f(x)=|x|$ عند $x=0,\ 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} \end{aligned}$$

عندما $x=0$ فأن

$$f'(0)=lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

بما ان $lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=1$ و $lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1$

فعليه الغاية $lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$ غير موجودة اي ان الدالة اعلاه غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

عندما $x=1$ فأن

وهذا يعني ان مماس الدالة عند $x=1$ يصنع زاوية مقدراها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور $-x$.

4. $f(x)=sgn(x)$ عند $x=1$

$$f'(x)=lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(1)=lim_{h\to 0}\frac{sgn(1+h)-sgn(1)}{h}$$

بما ان $lim_{h\to 0^+}\frac{sgn(1+h)-1}{h}=0=lim_{h\to 0^-}\frac{sgn(1+h)-1}{h}$

وهذا يعني $f'(1)=0$ اي ان مماس الدالة عند $x=0$ يكون موازي للمحور $-x$ (يصنع زاوية مقدراها 0 مع المحور $-x$.

مبرهنة: اذا كانت دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فأنها تكون مستمرة عند تلك النقطة.

ملاحظة: عكس المبرهنة اعلاه ليس من الضروري ان يكون صحيح اي انه اذا كانت الدالة مستمرة عند نقطة فليس من الضروري ان تكون قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة ومثال على ذلك الدالة $y=|x|$ فأنها مستمرة عند $x=0$ لكنها غير قابلة الاشتقاق عند تلك النقطة.

قوانين المشتقة:

1. اذا كان $f(x)=k$ (حيث k ثابت) فأن $f'(x)=0$.
2. اذا كان $y=kf(x)$ (حيث k ثابت) فأن $y'=kf'(x)$.
3. اذا كان $f(x)=x^n$ (لأي عدد حقيقي n) فأن $f'(x)=nx^{n-1}$.
4. اذا كان $y=f(x)\pm g(x)$ فأن $y'=f'(x)\pm g'(x)$.
5. اذا كان $y=f(x).g(x)$ فأن $y'=f(x).g'(x)+g(x)f'(x)$.
6. اذا كان $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $g(x)\neq 0$ لكل x فأن $y'=\frac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$.
7. اذا كان $y=(f(x))^n$ (لأي عدد حقيقي n) فأن $y'=n(f(x))^{n-1}.f'(x)$.

مبرهنة: اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فأن:

1. $\frac{d}{dx}sin(u)=cos(u)\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}cos(u)=-sin(u)\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}tan(u)=sec^2(u)\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}cot(u)=-csc^2(u)\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}sec(u)=sec(u)tan(u)\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}csc(u)=-csc(u)cot(u)\frac{du}{dx}$

البرهان:

1. نفرض $y=sin(u)$ وعليه

$$\frac{d}{dx}sin(u)=\frac{d}{du}sin(u).\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}sin(u)=lim_{h\to 0}\frac{sin(u+h)-sin(u)}{h}$$
$$=lim_{h\to 0}\frac{sin(u)\,cos(h)+cos(u)\,sin(h)-sin(u)}{h}$$
$$=lim_{h\to 0}sin(u)\frac{cos(h)-1}{h}+(\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h})(lim_{h\to 0}cos(u))$$
$$=0+(1)\,cos(u)$$
$$=cos(u)$$

2. $H.W$
3.

$$\frac{d}{dx}tan(u)=\frac{d}{du}(tan(u))\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}(\frac{sin(u)}{cos(u)}).\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{cos^2(u)+sin^2(u)}{cos^2(u)}.\frac{du}{dx}=sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

4. , .5 , .6 $H.W$

المشتقات من الدرجات العليا:

يرمز للمشتقة الثانية بالرموز $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، y''

يرمز للمشتقة الثالثة بالرموز $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right))$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، y'''

يرمز للمشتقة النونية بالرموز $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}\left(\dots\left(\frac{dy}{dx}\right)\right))$ ، $\frac{d^ny}{dx^n}$ ، $y^{(n)}$.

الاشتقاق الضمني:

اذا تعذر كتابة y بدلالة x او x بدلالة y فنشتق ضمنيا للحصول على y'. مثال على ذلك الدالة التالية:

$$y = xy^2 + 2x^2$$

$$\Rightarrow y' = x(2yy') + y^2 + 4x$$

$$= \frac{y^2+4x}{1-2xy}$$

الاشتقاق بقاعدة السلسلة:

اذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى u وكانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فأن $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}}$

امثلة:

1) جد y' لكل من الدوال التالية:

1. $y = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

نفرض $y = \sqrt{y}$ ، $t = 2-u$ ، $u = \sqrt{x}$

عند ئذ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}}.(-1).\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad = \frac{-1}{4\sqrt{x(2-\sqrt{x})}}$$

2. $y = f(x^2-2)$

حيث f دالة اختيارية.

نفرض $u = x^2 - 2$ وعليه $y = f(u)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u).(2x)$$

$$= 2xf'(x^2-2)$$

3. $y = cos(3x-2)$
   $y' = -3sin(3x-2)$
4. $y = cos(cot(sec(2x)))$

نفرض $u = 2x, \quad t = sec(u), \quad v = cot(t), \quad y = cos(v)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

2) احسب الغاية ان وجدت لكل مما يأتي:

1. $lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+1)-f(1)}{x}$

من تعريف المشتقة نجد ان $lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+1)-f(1)}{x} = f'(x^2+1)\,\|_{x=0}$

2. $lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

نجد الغاية بطريقتين

<u>الطريقة الاولي</u>: من تعريف المشتقة نجد ان

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x)\,\|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>الطريقة الثانية</u>:

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} = lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}.\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$$
$$= lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>تمارين:</u>

1. اثبت ان الدوال التالية تكون غير قابلة للاشتقاق لكن مستمرة عند النقاط المؤشرة ازاء كل منها
   1) $f(x) = |x+1|+1$ ، $x = -1$
   2) $f(x) = |x^2-1|$ ، $x = 1$
   3) $f(x) = |x^3-x|$ ، $x = 0, -1$
2. بأستخدام قانون المشتقة جد الغاية $lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$
3. اذا كان $2x = f(y^2).x^2$ حيث f دالة اختيارية فجد y'.
4. جد y' لكل مما يأتي:

$1. sin(xy) = tan(y^2+2x)$

$2. csc(x+2xy^2) = x$

الفصل الرابع: التكاملات

التكامل غير المحدد: لتكن f دالة معرفة على فترة ما ولتكن F دالة اخرى تحقق $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. فتسمى $F(x)$ تكاملا غير محدد للدالة f بالنسبة الى x وتكتب بالشكل:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c ثابت (يسمى ثابت التكامل)

خواص التكامل غير المحدد: لتكن كل من f و g دالة مستمرة عندئذ:

1. $\int d(f(x)) = f(x) + c$
2. $\int kdx = kx + c$ لأي عدد حقيقي k
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ لأي عدد حقيقي k
4. $\int\big(f(x) \pm g(x)\big) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int (f(x))^n f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$ بشرط $n \neq -1$.

امثلة:

1.
$$\int\left(\frac{12x^2-2}{(2x^3-x+1)^3} + 3\right)dx = \int 2(6x^2-1)\,(2x^3-x+1)^{-3}dx + \int 3dx$$
$$= -(2x^3-x+1)^{-2} + 3x + c$$

طريقة اخرى

نفرض $u = 2x^3 - x + 1$ وهذا يعني $du = (6x^2-1)dx$

$$\int\left(\frac{12x^2-2}{(2x^3-x+1)^3} + 3\right)dx = \int \frac{2(6x^2-1)}{u^3}\frac{du}{6x^2-1} + \int 3dx \;= 2\frac{u^3}{-2} + 3x + c$$
$$= -(2x^3-x+1)^{-2} + 3x + c$$

2. $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

نفرض $u = x - 1$ اي ان $du = dx$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du \;= \int\left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3. $\int (x-1)(x+1)^{15}\,dx$

نفرض $u = x + 1$ وهذا يعني $du = dx$

$$\int (x-1)(x+1)^{15}\,dx = \int (u-2)u^{15}\,du = \int\left(u^{16} - 2u^{15}\right)du$$
$$= \frac{1}{17}u^{17} - \frac{2}{16}u^{16} + c \;= \frac{1}{17}(x+1)^{17} - \frac{1}{8}(x+1)^{16} + c$$

تكامل الدوال المثلثية

1. $\int sin(x)\,dx = -cos(x) + c$
2. $\int cos(x)\,dx = sin(x) + c$
3. $\int sec^2(x)\,dx = tan(x) + c$
4. $\int csc^2(x)\,dx = -cot(x) + c$
5. $\int sec(x)\,tan(x)dx = sec(x) + c$
6. $\int csc(x)cot(x)(x)\,dx = -csc(x) + c$

ملاحظة: اذا كانت دالة التكامل تحوي على احد الدالتين $sin(x)$ او $cos(x)$ المرفوعة الى قوى $n \in \mathbb{Z}$ نتبع مايلي:

1. اذا كانت $n \in \mathbb{Z}_o$ نجزء $sin^n(x)$ و $cos^n(x)$ بالشكل

$$sin^n(x) = sin(x)\,.\,sin^{n-1}(x)$$
$$cos^n(x) = cos(x)\,.\,cos^{n-1}(x)$$

ثم نعوض بالعلاقة

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

2. اذا كانت $n \in \mathbb{Z}_e$ نعوض بأحد العلاقتين

$$sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$$
$$cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$$

امثلة:

1. $\int x\,cos(2x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{4}sin(2x^2 - 1) + c$

2. $$\int \frac{cos\,(x)}{sec\,(x)+tan\,(x)}dx = \int \frac{cos\,(x)}{sec\,(x)+tan\,(x)}\,.\,\frac{sec\,(x)-tan\,(x)}{sec\,(x)-tan\,(x)}dx$$
$$= \int \frac{cos\,(x)(sec\,(x)-tan\,(x))}{1}dx = \int(1 - sin(x))dx$$
$$= x - cos(x) + c$$

طريقة اخرى:

$$\int \frac{cos\,(x)}{sec\,(x)+tan\,(x)}dx = \int \frac{cos\,(x)}{\frac{1}{cos\,(x)}+\frac{sin\,(x)}{cos\,(x)}}dx = \int \frac{cos^2(x)}{1+sin\,(x)}dx = \int \frac{1-sin^2(x)}{1+sin\,(x)}dx$$
$$= \int(1 - sin(x))dx \;= x + cos(x) + c$$

3. $$\int sin^5(x)dx = \int sin(x)\,sin^4(x)dx = \int sin(x)\,(1 - cos^2(x))^2\,dx$$
$$= \int sin(x)\,(1 - 2cos^2(x) + cos^4(x))\,dx$$
$$= \int (sin(x) - 2sin(x)cos^2(x) + sin(x)cos^4(x))\,dx$$
$$= -cos(x) + \frac{2}{3}cos^3(x) - \frac{1}{5}cos^5(x) + c$$

4. $\int cos^4(x)dx = \int(\frac{1}{2}(1+cos(2x)\,)^2dx \;\; = \frac{1}{4}\int\left(1+2\,cos(2x)+cos^2(2x)\right)dx$

$= \frac{1}{4}(\int(1+2\,cos(2x))dx + \int\frac{1}{2}(1+cos(4x))dx)$

$= \frac{1}{4}\left(2x+sin(2x)+\frac{1}{8}sin(4x)\right)+c$

5. $\int\sqrt{1-sin(x)}dx = \int\sqrt{(1-sin(x))\frac{1+sin(x)}{1+sin(x)}}dx = \int\sqrt{\frac{cos^2(x)}{1+sin(x)}}dx$

$= \int cos(x)\,(1+sin(x))^{-\frac{1}{2}}dx \;\; =2\sqrt{1+sin(x)}+c$

التكامل المحدد:

لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ولتكن $F'(x) = F(b)-F(a)$. التكامل المحدد للدالة f من a الى b يعرف بالشكل: $\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a)$

خواص التكامل المحدد: لتكن كل من f و g دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ عندئذ:

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ لكل ثابت k
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx$ حيث $a\le c\le b$
6. $\int_a^b d\left(f(x)\right) = f(b)-f(a)$
7. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$

امثلة:

1. $\int_{-2}^{3}|x-1|\,dx$

نعرف $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases}$

$$\int_{-2}^{3}|x-1|\,dx = \int_{-2}^{1}|x-1|\,dx + \int_{1}^{3}|x-1|\,dx = \int_{-2}^{1}(x-1)\,dx + \int_{1}^{3}-(x-1)\,dx =$$

2. $\int_{-2}^{2} sgn(x)\,dx$

من تعريف دالة الاشارة نحصل على

$$\int_{-2}^{2} sgn(x)\,dx = \int_{-2}^{0} sgn(x)\,dx + \int_{0}^{2} sgn(x)\,dx = \int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{2}(1)\,dx =$$

.3 $\int_{0}^{3}[x-1]\,dx$

من تعريف دالة الصحيح الاعظم نحصل على

$$[x-1] = \begin{cases} \vdots & \\ 1, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ -1, & 0 \le x < 1 \\ \vdots & \end{cases}$$

$$\int_{0}^{3}[x-1]dx = \int_{0}^{1}[x-1]dx + \int_{1}^{2}[x-1]dx + \int_{2}^{3}[x-1]dx$$

$$= \int_{0}^{1}(-1)dx + \int_{1}^{2}(0)dx + \int_{2}^{3}(1)dx =$$

.4 اذا كان $\int_{1}^{2} f(x)dx = 3$ فجد $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{x^2} f(\frac{1}{x})\,dx$

نفرض $u = \frac{1}{x}$ وهذا يعني ان $du = \frac{-1}{x^2}dx$

عندما $x = 1$ فأن $u = 1$ وعندما $x = \frac{1}{2}$ فأن $u = 2$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{x^2} f(\frac{1}{x})\,dx = -\int_{2}^{1} \frac{2}{x^2} f(u).x^2du = 2\int_{1}^{2} f(u)du = (2)(3) = 6$$

.5
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin(3x)\,cos(5x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(sin((3-5)x) + sin((3+5)x))dx$$

$$= \frac{1}{2}(\int(sin(-2x) + sin(8x)))dx$$

$$= [\frac{1}{4}cos(2x) + \frac{1}{16}cos(8x)]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}$$

<u>تمارين</u>:

(1) احسب كل من التكاملات التالية:

1   2   3   4

5   6   7   8

(2) اذا علمت ان $\int_{0}^{2} f(x)dx = 4$ وكانت الدالة f تحقق $f(-x) = f(x)$ فجد قيمة التكامل $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

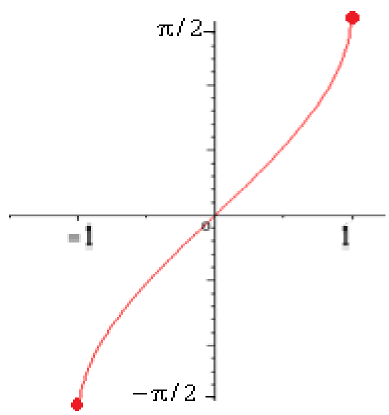
(3) اذا علمت ان $\int_{0}^{2} f(2x)dx = 5$ وكانت الدالة f تحقق $f(-x) = f(x)$ فجد قيمة التكامل

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})\,dx$$

الفصل الخامس: الدوال المثلثية العكسية:

مجال (اومدى) الدالة المثلثية العكسية هو مدى (مجال) الدالة المثلثية بشرط ان ذلك يحقق شروط الدالة والا فنأخذ جزء من ذلك المجال او المدى كما موضح ادناه.

1. **معكوس دالة الجيب** :

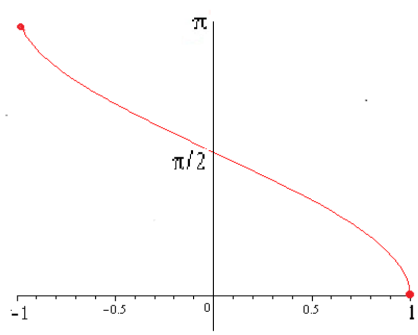


تعرف دالة معكوس دالة الجيب بالشكل

$$\boldsymbol{y = sin^{-1}(x) \leftrightarrow x = sin(y)}$$

حيث $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

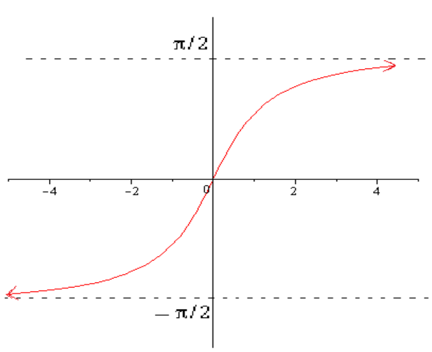
2. **معكوس دالة جيب التمام** :



تعرف دالة معكوس دالة جيب التمام بالشكل

حيث $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$

3. **معكوس دالة الظل** :

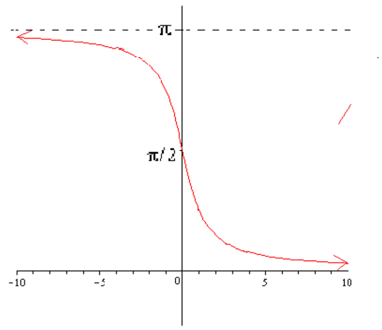


تعرف دالة معكوس دالة الظل بالشكل

$$\boldsymbol{y = tan^{-1}(x) \leftrightarrow x = tan(y)}$$

حيث $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

4. **معكوس دالة ظل التمام** :

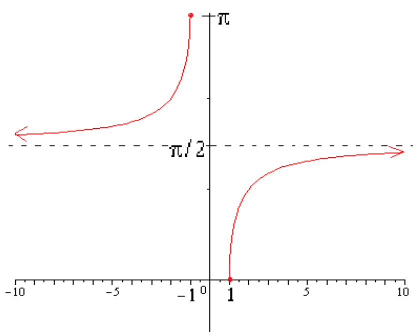


تعرف دالة معكوس دالة ظل التمام بالشكل

$$\boldsymbol{y = cot^{-1}(x) \leftrightarrow x = cot(y)}$$

حيث $-\infty < x < \infty$ و $0 < y < \pi$

5. **معكوس دالة القاطع** :

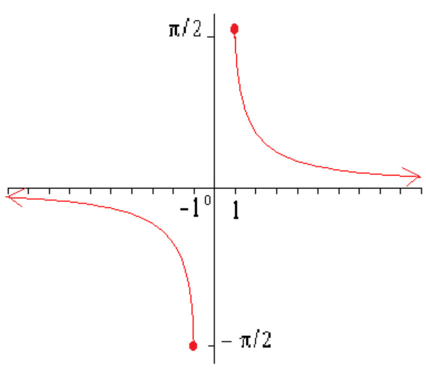


تعرف دالة معكوس دالة القاطع بالشكل

$$\boldsymbol{y = sec^{-1}(x) \leftrightarrow x = sec(y)}$$

حيث $(x \geq 1 \text{ ، } x \leq -1)$ و $(0 \leq y \leq \pi \text{ ، } y \neq \frac{\pi}{2})$

6. **معكوس دالة قاطع التمام** :



تعرف دالة معكوس دالة قاطع التمام بالشكل

$$\boldsymbol{y = csc^{-1}(x) \leftrightarrow x = csc(y)}$$

حيث $(x \geq 1 \text{،} x \leq -1)$ و $(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{،} y \neq 0)$

ملاحظات: الملاحظات ادناه على دالة الجيب العكسية التي هي نفسها للدوال المثلثية العكسية الاخرى

1. $sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{sin(x)}$
2. $\sin(sin^{-1}(x)) = x$ اذا كانت $-1 < x < 1$
3. $sin^{-1}(sin(y)) = y$ اذا كانت $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

علاقات الدوال المثلثية العكسية:

مبرهنة:

1. $cos^{-1}(-x) = \pi - cos^{-1}(x)$
2. $sin^{-1}(-x) = -sin^{-1}(x)$
3. $tan^{-1}(-x) = -tan^{-1}(x)$
4. $cot^{-1}(-x) = -cot^{-1}(x)$
5. $sec^{-1}(-x) = \pi - sec^{-1}(x)$
6. $csc^{-1}(-x) = -csc^{-1}(x)$
7. $sec^{-1}(x) = cos^{-1}(\frac{1}{x})$
8. $csc^{-1}(x) = sin^{-1}(\frac{1}{x})$
9. $sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$
10. $tan^{-1}(x) + cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$
11. $sec^{-1}(x) + csc^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$
12. $tan^{-1}(x) + tan^{-1}(y) = tan^{-1}(\frac{x+y}{1-xy})$
13. $sin^{-1}(x) + sin^{-1}(y) = sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

البرهان:

.1 نفرض $y = cos^{-1}(-x)$

وعليه نحصل على $-x = cos(y)$ اي ان الزاوية y تقع بالربع الثاني او الثالث.

من تعريف cos^{-1} يكون $0 \le y < \pi$ اي ان y تقع بالربع الاول اوالثاني.

وهذا يعني y تقع بالربع الثاني

$$\Rightarrow x = -cos(y) = cos(\pi - y) \Rightarrow \pi - y = cos^{-1}(x) \Rightarrow y = \pi - cos^{-1}(x)$$

.2 ... .6 H.W

.7 $y = sec^{-1}(x) \Rightarrow x = sec(y) \Rightarrow x = \frac{1}{cos(y)}$

من تعريف sec^{-1} يكون $|x| \ge 1$ اي ان $x \ne 0$

$$\Rightarrow \cos(y) = \frac{1}{x} \Rightarrow y = cos^{-1}(\frac{1}{x}) \Rightarrow sec^{-1}(x) = cos^{-1}(\frac{1}{x})$$

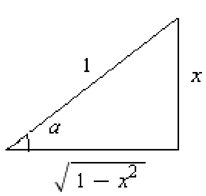
.8 H.W

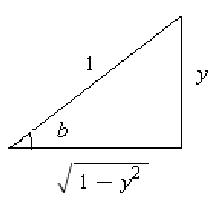
.9 نفرض $a = sin^{-1}(x), \quad b = cos^{-1}(x)$ اي ان $sin(a) = x = cos(b)$

$$a + b + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow a + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

.10 ... .12 H.W

.13 نفرض $a = sin^{-1}(x), \quad b = sin^{-1}(y)$ اي ان $x = sin(a), \quad y = sin(b)$



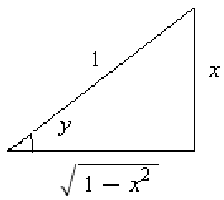


$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow a + b = sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

امثلة:

1. احسب $tan(sin^{-1}(x))$

نفرض $y = sin^{-1}(x)$ وعليه $x = sin(y)$



2. احسب $cos^{-1}(-1)$

$$cos^{-1}(-1) = \pi - cos^{-1}(1)$$
$$y = cos^{-1}(1) \Rightarrow 1 = cos(y) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow cos^{-1}(-1) = \pi - 0 = \pi$$

3. اذا كان $x = sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ جد كل من $sin(x),\ cos(x),\ tan(x)$

$$x = sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = -sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$
$$x = sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow cos(x) = cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow tan(x) = tan\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

4. احسب $sin^{-1}(sin(\frac{5\pi}{7}))$

بما ان $\frac{5\pi}{7} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فعليه

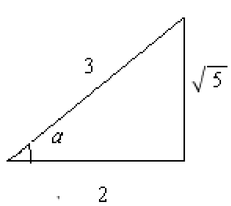
$$sin^{-1}\left(sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right)\right) = sin^{-1}\left(sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$$

بما ان $\frac{2\pi}{7} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فعليه $sin^{-1}\left(sin\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right) = \frac{2\pi}{7}$

5. اثبت ان $tan\left(2sec^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = -4\sqrt{5}$

$$tan\left(2sec^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = tan\left(2cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{sin\left(2cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{cos\left(2cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)} = \frac{2sin\left(cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)cos\left(cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2cos^2\left(cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)-1}$$
$$= \frac{\frac{4}{3}sin\left(cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{2(\frac{2}{3})^2-1}$$

ليكن $a = cos^{-1}(\frac{2}{3})$ اي ان $\frac{2}{3} = cos(a)$ ومن المثلث القائم الزاوية نحصل على



مشتقات الدوال المثلثية العكسية:

مبرهنة: لتكن $u = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x. فأن

$$1.\ \frac{d}{dx}sin^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad 2.\ \frac{d}{dx}cos^{-1}(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad 3.\ \frac{d}{dx}tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$4.\ \frac{d}{dx}cot^{-1}(u) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad 5.\ \frac{d}{dx}sec^{-1}(u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad 6.\ \frac{d}{dx}csc^{-1}(u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

✕ **البرهان:**

1. نفرض $y = sin^{-1}(u)$ عندئذ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

$$y = sin^{-1}(u) \Rightarrow u = sin(y) \Rightarrow \frac{du}{dy} = cos(y) \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{cos(y)}$$

$$cos^2(y) = 1 - sin^2(y) \Rightarrow cos^2(y) = 1 - u^2 \Rightarrow cos(y) = \pm\sqrt{1-u^2}$$

بما ان $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ فأن y تقع بالربع الاول او الرابع اي ان $cos(y) = +\sqrt{1-u^2}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}sin^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}$$

2. … 6. H.W

امثلة:

1. $y = csc^{-1}(sec(x)) + sec^{-1}(csc(x))$

$$y' = \frac{-1}{sec(x)\sqrt{sec^2(x)-1}}(sec(x).tan(x)) + \frac{-1}{csc(x)\sqrt{csc^2(x)-1}}(csc(x).cot(x))$$
$$= -2$$

2. $x\,cos(y) = tan^{-1}(2y) + 3xy$

$$\Rightarrow cos(y) - x\,sin(y)\,y' = \frac{1}{1+4y^2}(2y') + 3y + 3xy'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{cos(y)-3y}{x\,sin(y)+3x+\frac{2}{1+4y^2}}$$

تكاملات تعطى نسب مثلثية عكسية:

$$1.\ \int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \begin{cases} sin^{-1}(u) + c \\ -cos^{-1}(u) + c\end{cases} \quad 2.\ \int\frac{1}{1+u^2}du = \begin{cases} tan^{-1}(u) + c \\ -cot^{-1}(u) + c\end{cases} \quad 3.\ \int\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}du = \begin{cases} sec^{-1}(u) + c \\ -csc^{-1}(u) + c\end{cases}$$

امثلة:

1. $\int \frac{du}{\sqrt{2-3u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-\frac{3}{2}u^2}}$

نفرض $y^2 = \frac{3}{2}u^2$ اي ان $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u$ وهذا يعني ان $dy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}du$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2-3u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} sin^{-1}(y) + c = \frac{1}{\sqrt{3}} sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u\right) + c$$

2. $\int \frac{sec^2(u)}{\sqrt{1-tan^2(u)}} du$

نفرض $y^2 = tan^2(u)$ اي ان $y = tan(u)$ وهذا يعني ان $dy = sec^2(u)du$

$$\int \frac{sec^2(u)}{\sqrt{1-tan^2(u)}} du = \int \frac{sec^2(u)}{\sqrt{1-y^2}} . \frac{dy}{sec^2(u)} = sin^{-1}(y) + c = sin^{-1}(tan(u)) + c$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{20-(x^2-8x-16+16)}} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x-4}{4})^2}} = \frac{1}{6} sin^{-1}\left(\frac{x-4}{4}\right) + c$

4. $\times$ $\int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1}(u)\Big]_{-\sqrt{2}}^{-\frac{2}{\sqrt{3}}} = sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - sec^{-1}(-\sqrt{2})$

$$= \left(\pi - sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) - \left(\pi - sec^{-1}(\sqrt{2})\right) = -cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

تمارين:

1. احسب كل من التكاملات التالية:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-12x^2}}$ 2. $\int \frac{dx}{5+6x^2}$ 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-3}}$ 4. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4+x^4} dx$

5. $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}}$ 7. $\int \frac{x^3+2x^2-x+1}{x+2} dx$ 8. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$

2. اذا كان $y = (sin^{-1}(x))^2$ اثبت ان $(1+x^2)\,y'' - xy - 2 = 0$

3. اذا كان $y = (sin^{-1}(x))^2$ او $y = sin(tan^{-1}(x))$ اثبت ان $(1+x^2)^2\, y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$

4. اثبت ان $sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{4}$ و $sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

5. جد قيمة كل من $tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) + tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ و $sec^{-1}(-2) - sec^{-1}(2)$

الفصل السابع: مبرهنة اشتقاق التكامل وتطبيقاتها

✕ مبرهنة اشتقاق التكامل:

لتكن $y = f(u)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن $F(u) = \int_a^u f(t)dt$ حيث ان $u \in [a,b]$.

عندئذ $F(u)$ تكون قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) ويكون $F'(u) = f(u)$ اي ان

$$\frac{d}{du}\int_a^u f(t)dt = f(u)$$

تعميم مبرهنة اشتقاق التكامل:

لتكن $y = f(u)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ ولتكن $F(u) = \int_a^u f(t)dt$ وكانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x عندئذ $F(u)$ تكون قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) ويكون $F'(u) = f(u)\frac{du}{dx}$ اي ان

$$\frac{d}{dx}\int_a^u f(t)dt = f(u)\frac{du}{dx}$$

امثلة:

1. جد $\frac{d}{du}\int_1^u \frac{\sin(t)}{t}$

نفرض $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ فيكون $F(u) = \int_1^u f(t)dt$

بما ان f مستمرة على الفترة $(1,+\infty)$ فمن مبرهنة اشتقاق التكامل نحصل على

$F'(u) = \frac{d}{du}\int_a^u \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\sin(u)}{u}$

2. ✕ ليكن $y = \int_{\sin^{-1}(t)}^0 \sqrt{1-x^2}\,dx$ فجد $\frac{dy}{dt}$

$y = \int_{\sin^{-1}(t)}^0 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^{\sin^{-1}(t)} \sqrt{1-x^2}\,dx$

بما ان $\sin^{-1}(t) \in [-1,1]$ وان الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ مستمرة على الفترة $[-1,1]$ اي انها تكون مستمرة على الفترة $[0,1]$ فعليه من تعميم مبرهنة اشتقاق التكامل يكون

$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sin^{-1}(t)} \sqrt{1-x^2}\,dx\right) = -\sqrt{1-(\sin^{-1}(t))^2}.\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

3. ✕ ليكن $y = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$ فجد $\frac{dy}{dt}$

بما ان $f(x) = \frac{1}{x}$ دالة مستمرة للفترة $[1,2]$ و 2 يمكن اعتبارها دالة بالنسبة الى t وعليه يمكن تطبيق مبرهنة تعميم اشتقاق التكامل وهذا يعني

$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}(0) = 0$

4. ليكن $t^2 = \int_0^{\tan(y)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ فجد $\frac{dy}{dt}$

بما ان $\tan(y) \in (-\infty, \infty)$ وان الدالة $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ مستمرة للفترة $[0, \infty)$ وعليه يمكن تطبيق تعميم مبرهنة اشتقاق التكامل وبالشكل

$$2t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(y)}}.\sec^2(y).\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{\sec(y)}$$

تمارين:

1. اذا كان $y = \int_1^x \tan^{-1}(t)dt$ اثبت ان $(1+x^2)y'' + y' + \cot^{-1}(x) - 1 = \frac{\pi}{2}$
2. اذا كان $y = \int_1^{\cot^{-1}(x)} t\, dt$ اثبت ان $(1-x^2)y'' - xy' - 1 = 0$

الدالة اللوغارتمية الطبيعية:

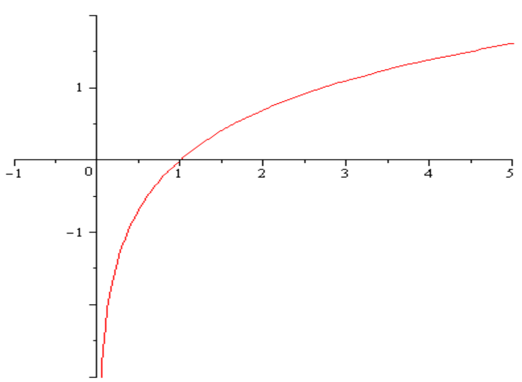
تعرف الدالة اللوغارتمية الطبيعية الى x بالشكل: $x > 0$ $\qquad y = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$

رسم دالة اللوغاريتم الطبيعية:

1. ليكن $u = 1$ عندئذ يكون $y = \ln(1) = 0$. اي ان المنحني $y = \ln(x)$ يمر بالنقطة $(1, 0)$.
2. من مبرهنة اشتقاق التكامل نحصل على $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$ اي ان $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

ومن تعميم مبرهنة اشتقاق التكامل وعندا تكون u دالة بالنسبة الى x فنحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_1^u \frac{1}{t} dt = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$$



3. بما ان $u > 0$ فأن $y' = \frac{1}{x} > 0$ اي ان الدالة $y = \ln(x)$ تكون متزايدة.
4. بما ان $y'' = -\frac{1}{u^2} < 0$ فأن الدالة $y = \ln(x)$ تكون محدبة.
5. بما ان $y' = \frac{1}{x}$ معرفة على $(0, \infty)$ فعليه الدالة $y = \ln(x)$ تكون قابلة للاشتقاق على $(0, \infty)$ وهذا يعني ان الدالة $y = \ln(x)$ تكون مستمرة على الفترة نفسها.
6. $y'(1) = 1$ اي ان المماس عندما $u = 1$ يصنع زاوية مقدارها 45° مع المحور-x بالاتجاه الموجب.

ملاحظات:

1. $D_f = (0, \infty)$, $\qquad R_f = (-\infty, \infty)$
2. $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\qquad \lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$

3. $\frac{d}{dx}ln(u) = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

4. ليكن كل من a و b عددين حقيقين موجبين عندئذ:

1). $ln(a.b) = ln(a) + ln(b)$

2). $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

3). $ln(a^r) = r.ln(a)$

4). $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$

تكاملات تعطى الدالة اللوغارتيمية الطبيعية:

$$\int \frac{du}{u} = \begin{cases} ln(u) + c, & u > 0 \\ -ln(u) + c, & u < 0 \end{cases}$$

امثلة:

1. جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

$y = ln(x^2 + 1) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}.(2x)$

$y = ln(|sin(2x)|) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sin(2x)}.(2cos(2x))$

$ln(xy) = ln(x + y) \implies \frac{1}{xy}.(xy' + y) = \frac{1}{x+y}.(1 + y') \implies \frac{dy}{dx} = \frac{xy-(x+y)}{x^2}$

2. جد كل من التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{x}{x-1}dx$

الطريقة الاولى: نفرض $u = x - 1$ و هذا يعني $du = dx$

$$\implies \int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{u+1}{u}du = \int \left(1 + \frac{1}{u}\right)du = u + ln(u) + c = (x-1) + ln(x-1) + c$$
$$= x + ln(x-1) + c$$

الطريقة الثانية: $\int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x + ln(x-1) + c$

الطريقة الثالثة:

بما ان درجة البسط تساوي درجة المقام نستطيع ان نستخدم القسمة الطويلة وبالشكل:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \hline x-1 & \quad x \\ & \underline{\mp x \pm 1} \\ & \quad\quad 1 \end{array}$$

$$\int \frac{x}{x-1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx = x + ln(x-1) + c$$

$(2)\int \frac{x^2}{x^3-4}dx$

الطريقة الاولى: بما ان اس المقام x^3-4 هو 1 ومشتقته $3x^2$ ممكن توفيرها فعليه ناتج التكامل هو الدالة اللوغارتيمية الطبيعية للمقام وبالشكل: $\int \frac{x^2}{x^3-4}dx=\frac{1}{3}ln(x^3-4)+c$

الطريقة الثانية: نفرض $u=x^3-4$ فنحصل على $du=3x^2dx$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^2}{x^3-4}dx=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{3}ln(|x^3-4|)+c$$

$(3)\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

الطريقة الاولى: نفرض $u=x^2+1$ فنحصل على $du=2x\,dx$

$$\Longrightarrow \int \frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{u}du=\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}du=\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{1}{2}(u-ln(|u|)+c$$

$$=\frac{1}{2}((x^2+1)-ln(|x^2+1|)+c$$

الطريقة الثانية: بما ان درجة البسط اكبر من درجة المقام فنستخدم طريقة القسمة الطويلة وبالشكل

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx=\int \left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int x\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+c$$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x^2+1 & x^3 \\ & \underline{\mp x^3 \mp x} \\ & -x \end{array}$$

$(4)\quad \times \int \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx$

نفرض $u=x^2+2x+7$ وهذا يعني ان $du=(2x+2)dx$

$$\Longrightarrow \int \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx=\int \frac{x+1}{u}.\frac{du}{2(x+1)}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du=\frac{1}{2}ln(u)+c=ln\left(\sqrt{x^2+2x+7}\right)+c$$

$(5)\quad \times\ \int tan(2x)dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}dx=-\frac{1}{2}ln(|cos(2x)|)+c$

$(6)\int sec(x)\,dx=\int sec(x).\frac{sec(x)+tan(x)}{sec(x)+tan(x)}dx=\int \frac{sec^2(x)+sec(x).tan(x)}{sec(x)+tan(x)}=ln(|sec(x)+tan(x)|)+c$

تمارين:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
2. $\int \frac{x\,ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$
3. $\int \frac{(ln(x))^2}{x}dx$
4. $\int \frac{dx}{sec(2x)-tan(2x)}$
5. $\int \frac{ln(x)}{x(1+(ln(x))^2)}dx$
6. $\int \frac{x^3+2x^2-x+1}{x+2}dx$
7. $\int \frac{ln(x)}{x(1+ln(x))}$

الاشتقاق اللوغاريتمي:

ليكن $y = (f(x))^{g(x)}$ وبأخذ اللوغايتم الطبيعي للطرفين نحصل على $\ln(y) = g(x)\ln(f(x))$

نشتق الطرفين بالنسبة الى المتغير x فنحصل على $\frac{1}{y}y' = g(x).\frac{1}{f(x)}f'(x) + g'(x)ln(f(x))$

$$\Longrightarrow y' = (f(x))^{g(x)}\left[\frac{g(x)}{f(x)}f'(x) + g'(x)\,ln\big(f(x)\big)\right]$$

امثلة:

1. $y = 4 + x^{sin(x)} \Longrightarrow y' = 0 + x^{sin(x)}\left[\frac{sin\,(x)}{x}.(1) + cos(x)\,ln(|x|)\right]$
2. $y = x^2.2^x \Longrightarrow y' = 2x.2^x + x^2\left[2^x\left(\frac{x}{2}(0) + 1.ln(2)\right)\right] = x.2^{x+1} + ln(2^y)$

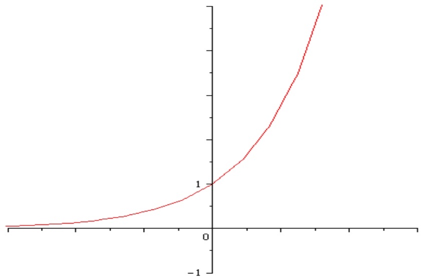
الدالة الاسية:

تعرف الدالة الاسية بالنسبة الى x بأنها معكوس الدالة اللوغاريتمية الطبيعية اي ان

$$y = e^x \iff x = \ln(y)$$

✕ رسم الدالة الاسية:

1. عندما $x = 1$ فأن $y = e^1$ من تعريف الدالة الاسية $1 = \ln(y)$ وهذا يعني $e^1 = y \cong 2.718$
2. بما ان الدالة الاسية هي معكوس دالة اللوغايتمي الطبيعية وعليه
   مجال الدالة الاسية هو مدى دالة اللوغايتمي الطبيعية اي ان $D_f = (-\infty, \infty)$
   مدى الدالة الاسية هو مجال دالة اللوغايتمي الطبيعية اي ان $R_f = (0, \infty)$
3. من (2) اعلاه نحصل على ان بيان الدالة الاسية في الربع الاول او الثاني وغير قاطع للمحور-x.
4. عندما $x = 0$ فأن $y = e^0$ اي ان $0 = \ln(y)$ وهذا يعني $y = 1$
   اي ان منحني الدالة الدالة الاسية يمر بالنقطة (0,1).
5. بما ان $y = e^x$ وعليه يكون $x = \ln(y)$ وبأشتقاق الطرفين بالنسبة الى x نحصل على
   $$1 = \frac{1}{y}y' \Longrightarrow y' = y \Longrightarrow y' = e^x \Longrightarrow \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
   وبصورة عامة عندما u دالة بالنسبة الى x فأن $\frac{dy}{dx} = e^u.\frac{du}{dx}$
6. بما ان $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$ وهذا يعني ان الدالة الاسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
   وبالتالي الدالة الاسية مستمرة على $\mathbb{R}$.
7. بما ان $y' = e^x > 0$ وعليه الدالة الاسية متزايدة.



8. بما ان $y' = e^x < 0$ وعليه الدالة الاسية مقعرة.
9. عندما $x = 0$ فأن $y'(0) = 1$ اي ان مماس الدالة الاسية عند $x = 0$ يصنع زاوية مقدارها 45° مع المحور-x.

ملاحظات:

1. $D_f = (-\infty, \infty)$, $\qquad R_f = (0, \infty)$
2. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u . \frac{du}{dx}$,
3. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
4. $e^{a+b} = e^a . e^b$, $\qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $\qquad (e^a)^r = e^{ar}$
5. $\ln(e^x) = x$, $\qquad e^{\ln(x)} = x$

مثال: ليكن $e^{2y} = \ln(x + e^{3x^2+1})$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$e^{2y}.(2y') = \frac{1}{x+e^{3x^2+1}} . \left(1 + e^{3x^2+1}.(6x)\right)$$

$$y' = \frac{1+6x.e^{3x^2+1}}{2e^{2y}(x+e^{3x^2+1})}$$

تكامل الدالة الاسية:

$$\boxed{\int e^x\, dx = e^x + c}$$

امثلة:

1. $\int e^{3x} dx$

نفرض $u = 3x$ وعليه يكون $du = 3dx$

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\int e^u du \quad = \frac{1}{3}e^u + c \quad = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

2. $\int e^{-x} sec^2(2 - e^{-x})dx$

نفرض $u = 2 - e^{-x}$ وعلي يكون $du = e^{-x}dx$

$$\int e^{-x} sec^2(2 - e^{-x})dx = \int sec^2(u)du = tan(u) + c = tan(2 - e^{-x}) + c$$

3. $\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx$

الطريقة الاولى:

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{1}{1+e^{-x}} . \frac{e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = ln(|e^x + 1|) + c$$

الطريقة الثانية: بأستخدام القسمة الطويلة يكون

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 1+e^{-x} & 1 \\ & \mp 1 \mp e^{-x} \\ \hline & -e^{-x} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int \left(1+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx = x + ln(1+e^{-x}) + c$$
$$= ln(e^{x}) + ln(1+e^{-x}) + c = ln\left(e^{x}(1+e^{-x})\right) + c$$
$$= ln(e^{x}+1) + c$$

4. $\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}dx$

الطريقة الاولى: نفرض $u = e^{x}+3$ وهذا يعني ان $du = e^{x}dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}dx = \int \frac{e^{x}.e^{x}}{e^{x}+3}dx = \int \frac{u-3}{u}du = \int \left(1-\frac{3}{u}\right)du = u - 3\,ln(|u|) + c$$
$$= e^{x} + 3 - 3\,ln(e^{x}+3) + c = e^{x} - 3\,ln(e^{x}+3) + c$$

الطريقة الثانية: بأستخدام القسمة الطويلة وبالشكل:

$$\begin{array}{r|l} & e^{x} \\ \hline e^{x}+3 & e^{2x} \\ & \mp e^{2x} \mp 3e^{x} \\ \hline & -3e^{x} \end{array}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{x}+3}dx = \int \left(e^{x} - \frac{3e^{x}}{e^{x}+3}\right)dx = e^{x} - 3\,ln(|e^{x}+3|) + c$$

تمارين:

.1 ليكن $y = \ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$ اثبت $2y = e^{y} - e^{-y}$

.2 اذا كان $y = cos^{-1}(e^{x})$ اثبت $sin^{2}(y)y'' + cos^{2}(y)y' = -\sin(y)\cos(y)$

× **الدالة الاسية العامة**: ليكن $a > 0$ عندئذ نعرف $\boxed{a^{x} = e^{x ln(a)}}$

مشتقة الدالة الاسية العامة حيث u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x هي $\frac{d}{dx}a^{u} = a^{u}\,ln(a)\frac{du}{dx}$

× **الدالة اللوغايتمية العامة**: اذا كانت $u > 0$ و $a >$ $(a \neq 1)$ عندئذ نعرف

$$\boxed{log_{a}(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}}$$

مشتقة الدالة اللوغايتمية العامة حيث u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى xهي $\frac{d}{dx}log_{a}(u) = \frac{1}{u\,ln(a)}.\frac{du}{dx}$

× **امثلة**:

1. $log_{2}(4) = \frac{ln(4)}{ln(2)} = \frac{ln(2^{2})}{ln(2)} = 2$
2. $\int \frac{1}{x}log_{3}(x)dx = \int \frac{1}{x}\frac{ln(x)}{ln(3)}dx = \frac{1}{ln(3)}\int \frac{1}{x}ln(x)\,dx = \frac{1}{ln(3)}\left(\frac{1}{2}ln^{2}(x)\right) + c$

الفصل الثامن: طرق التكامل:

1. التكامل بالتجزئة: لتكن كل من u و v دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x عندئذ

$$d(u.v) = u.dv + v.du \implies \int d(u.v) = \int u.dv + \int v.du$$

$$\implies u.v = \int u.dv + \int v.du \implies \boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

ملاحظة:

1. نجزء دالة التكامل الى جزئين احدهما نرمز له بالرمز u والاخر dv والاختيار قابل للتغيير. نختار dv بحيث بالامكان تكامله وكذلك حسب سهولة وصعوبة او بالامكان وغير الممكن حل التكامل $\int v.du$.
2. بالامكان تطبيق طريقة التجزئة عدة مرات لايجاد الحل كما هو موضح بالامثلة ادناه.

امثلة:

1. $\int x.e^x\,dx$

اذا فرضنا $(u = e^x, \quad dv = xdx) \Leftarrow (du = e^x dx, \quad v = \frac{1}{2}x^2)$

فيكون التكامل $\int x.e^x\,dx = \frac{1}{2}x^2.e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$ اكثر تعقيدا وعليه يفشل الاختيار ونعيده بالشكل

نفرض $(u = x, \quad dv = e^x dx) \Leftarrow (du = dx, \quad v = e^x)$

$$\implies \int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + c$$

2. $\int x^2.e^x dx$

نفرض $(u = x^2, \quad dv = e^x dx) \Leftarrow (du = 2xdx, \quad v = e^x)$

$$\implies \int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int (2x)e^x dx$$

نحل التكامل $\int x.e^x\,dx$ بطريقة التجزئة مرة اخرى. من المثال (1) اعلاه يكون

$$\int x^2.e^x dx = (x^2 - 2x - 2)e^x + c$$

3. $\int x.tan^{-1}(x)dx$

نفرض $(u = tan^{-1}(x), \quad dv = xdx) \Leftarrow (du = \frac{1}{x^2+1}dx, \quad v = \frac{1}{2}x^2)$

$$\implies \int x.tan^{-1}(x)dx = \frac{1}{2}x^2 tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx = \frac{1}{2}x^2 tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\left(x - tan^{-1}(x)\right) + c$$

4. $\int sin(\sqrt{x})\, dx$

نفرض $y = \sqrt{x}$ وهذا يعني $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\Longrightarrow \int sin(\sqrt{x})\, dx = \int 2y\, sin(y)\, dy$$

نفرض $(u = y, \quad dv = sin(y)\, dy) \Longleftarrow (du = dy, \quad v = -\,cos(y))$

$$\Longrightarrow \int 2y\, sin(y)\, dy = 2(-ycos(y) + \int cos(y)\, dy) = 2(-ycos(y) + sin(y)) + c$$

$$\int sin(\sqrt{x})\, dx = 2(-\sqrt{x}cos(\sqrt{x}) + sin(\sqrt{x})) + c$$

5. $\int e^{2x}\, sin(3x)\, dx$

نفرض $(u = e^{2x}, \quad dv = sin(3x)\, dx) \Longleftarrow \left(du = 2e^{2x} dx, \quad v = -\frac{1}{3}cos(y)\right)$

$$\int e^{2x}\, sin(3x)\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\, cos(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\, cos(3x)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

الان نحل التكامل $\int e^{2x}\, cos(3x)\, dx$ بالتجزئة ايضا

نفرض $(u = e^{2x}, \quad dv = cos(3x)\, dx) \Longleftarrow \left(du = 2e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{3}sin(3x)\right)$

$$\int e^{2x}\, cos(3x)\, dx = \frac{1}{3}e^{x}\, sin(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}\, sin(3x)\, dx$$

بالتعويض في المعادلة (*) اعلاه نحصل على

$$\int e^{2x}\, sin(3x)\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\, cos(3x) + \frac{2}{3}(\frac{1}{3}e^{2x}\, sin(3x) - \frac{2}{3}\int e^{2x}\, sin(3x)\, dx)$$

$$= \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\, cos(3x) + \frac{2}{9}e^{2x}\, sin(3x)\right) + c$$

تمارين:

1. جد كل من التكاملات التالية:

1. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ 2. $\int x\, ln(x)\, dx$ 3. $\int (ln(x))^2 dx$ 4. $\int cot^{-1}(\sqrt{x})\, dx$

5. $\int cos(ln(x))\, dx$ 6. $\int cos(ln(x))\, dx$ 7. $\int sin^3(x)\, dx$ 8. $\int x^n e^x dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

2. اثبت ان $\int sin(ln(x))\, dx = \frac{x}{2}(sin(ln(x)) - cos(ln(x))) + c$

ثم استخدمها لايجاد التكامل $\int e^y\, sin(y)\, dy$

2. التكامل بالتعويضات المثلثية:

اذا احتوت دالة التكامل في البسط او المقام على احد المقادير التالية $\sqrt{b^2x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2x^2}$, $\sqrt{a^2-b^2x^2}$

او احتوت دالة التكامل في المقام على احد المقدارين $a^2+b^2x^2$, $a^2-b^2x^2$

عندئذ نستخدم التعويضات المثلثية ادناه لحل التكامل وبالشكل التالي:

اذا وجد المقدار $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ في البسط او المقام او وجد المقدار $a^2-b^2x^2$ في المقام نفرض $x=\frac{a}{b}sin(\theta)$.

اذا وجد المقدار $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ في البسط او المقام او وجد المقدار $a^2+b^2x^2$ في المقام نفرض $x=\frac{a}{b}tan(\theta)$.

اذا وجد المقدار $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ في البسط او المقام نفرض $x=\frac{a}{b}sec(\theta)$.

امثله:

1. $\int\frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx$

بما انه يوجد المقدار $\sqrt{2-x^2}$ في المقام فنستخدم الفرضية $x=\frac{\sqrt{2}}{1}sin(\theta)$

اي ان $dx=\sqrt{2}cos(\theta)d\theta$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int\frac{\left(\sqrt{2}\,sin(\theta)\right)^3}{\sqrt{2-\left(\sqrt{2}\,sin(\theta)\right)^2}}(\sqrt{2}\,cos(\theta))d\theta=-2^{\frac{3}{2}}\int sin^3(\theta)d\theta$$

$$=-2^{\frac{3}{2}}\int sin(\theta)sin^2(\theta)d\theta=-2^{\frac{3}{2}}\int sin(\theta)\,(1-cos^2(\theta))d\theta$$

$$=-2^{\frac{3}{2}}\int(sin(\theta)-sin(\theta)\,cos^2(\theta))d\theta=-2^{\frac{3}{2}}\left(-cos(\theta)+\frac{1}{3}cos^3(\theta)\right)+c$$

بما ان $x=\frac{\sqrt{2}}{1}sin(\theta)$ ومن المثلث القائم الزاوية نجد ان $cos(\theta)=\sqrt{2-x^2}$ اي ان

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx=-2^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{3}(\sqrt{2-x^2})^3\right)+c$$

2. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

بما ان دالة التكامل تحوي المقدار $\sqrt{x^2+3}$ وعليه سنفرض $x=\sqrt{3}\tan(\theta)$ اي ان

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}=\int\frac{\sqrt{3}sec^2(\theta)d\theta}{(\sqrt{3}\tan(\theta))^4\sqrt{(\sqrt{3}\tan(\theta))^2+3}}=\frac{1}{9}\int\cos(\theta)\cos^2(\theta)sin^{-4}(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\int\cos(\theta)\,(1-\sin^2(\theta))sin^{-4}(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{9}\int(\cos(\theta)\,sin^{-4}-\cos(\theta)sin^{-2}(\theta))d\theta=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^{3}(\theta)}+\frac{1}{\sin(\theta)}\right)+c$$

بما ان $x=\sqrt{3}\tan(\theta)$ ومن المثلث القائم الزاوية نجد ان $sin(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ اي ان

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right)^3+\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\right)+c$$

تمارين:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$
2. $\int\frac{x^2}{\sqrt{3-4x^2}}dx$
3. $\int\frac{\sqrt{2x^2-4}}{x}dx$
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{24-2x-x^2}}$
5. $\int\frac{x-1}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$
6. $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$

3. التكامل بالكسور الجزئية:

اذا كانت دالة التكامل هي دالة كسرية فيها البسط والمقام بشكل متعددات حدود نجزء الدالة كحاصل جمع حدين او اكثر وبالشكل التالي:

1. اذا احتوى المقام على المقدار $(ax+b)^n$ نجزء الدالة الكسرية بالشكل

$$\frac{1}{(ax+b)^n}=\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث كل من $A_n,\dots,A_2,A_1$ ثوابت نحاول ايجاد قيمها.

2. اذا احتوى المقام على المقدار $(ax^2+b)^n$ نجزء الدالة الكسرية بالشكل

$$\frac{1}{(ax^2+b)^n}=\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+b)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+b)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+b)^n}$$

حيث كل من $B_n,\dots,B_2,B_1,A_n,\dots,A_2,A_1$ ثوابت نحاول ايجاد قيمها.

3. اذا احتوى المقام على المقدارين $(ax+b)^n(ax^2+b)^n$ نجزء الدالة الكسرية بالشكل

$$\frac{1}{(ax+b)^n(ax^2+b)^m}=\frac{C_1}{(ax+b)}+\frac{C_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{C_n}{(ax+b)^n}$$
$$+\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+b)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+b)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_m}{(ax^2+b)^m}$$

حيث كل من $C_n,\dots,C_2,C_1,B_n,\dots,B_2,B_1,A_n,\dots,A_2,A_1$ ثوابت نحاول ايجاد قيمها.

ملاحظة: اذا كانت دالة التكامل هي دالة كسرية فيها البسط والمقام بشكل متعددات حدود وكانت درجة البسط اكبر من درجة المقام عندئذ يجب اولا استخدام القسمة الطويلة ومن ثم نحل التكامل.

امثلة:

1. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+2} + \frac{A_2x+B_2}{x^2+1} = \frac{(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+1)}$

$x^3 + x^2 + x + 2 = (A_1x + B_1)(x^2 + 1) + (A_2x + B_2)(x^2 + 2)$

$= (A_1 + A_2)x^3 + (B_1 + B_2)x^2 + (A_1 - 2A_2)x + (B_1 + 2B_2)$

$A_1 + A_2 = 1, \quad B_1 + B_2 = 1, \quad A_1 - 2A_2 = 1, \quad B_1 + 2B_2 = 2$

بحل المعادلات الاربعة اعلاه نجد ان $A_1 = 1,\ A_2 = 0,\ B_1 = 0,\ B_2 = 1$ فنحصل على

$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx = \int (\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+1})\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) + tan^{-1}(x) + c$

2. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^4+x^3}dx = \int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^3(x+1)}dx$

$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^3(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+1} = \frac{(A_1+B_1)+(A_1+A_2)x+(A_2+A_3)x^2+A_3x^3}{x^3(x+1)}$

$\Longrightarrow A_1 + B_1 = 2, \quad A_1 + A_2 = 3, \quad A_2 + A_3 = 3, \quad A_3 = 2$

بحل المعادلات الاربعة اعلاه نحصل على $A_1 = 2,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2,\ B_1 = 0$ فيكون

$\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{x^4+x^3}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{0}{x+1}\right) dx = 2\ln(|x|) - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + c$

3. $\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int (\frac{A}{x+1} + \frac{B+C}{x^2+1})\, dx$

$\Longrightarrow \frac{1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$

$\Longrightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + tan^{-1}(x)\right) dx$

4. $\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx$

بما ان درجة البسط اكبر من درجة المقام نستخدم القسمة الطويلة فيكون

$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx = \int \left((x - 3) + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c$

تمارين:

1. $\int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}dx$

2. $\int \frac{x^2 + x - 2}{3x^3 - x^2 + 3x - 1}dx$

قاعدة اوبيتال:

اذا كانت كل من f و g دالة تحقق $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فأن

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظات:

1. يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لاكثر من مرة الى ان نصل لحل.
2. يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لكل الحالات غير المحددة الاخرى $\left(\frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty,\ \infty^0,\ 1^\infty, 0^0\right)$ كما هو موضح في الامثلة ادناه.
3. اذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فأن

4. ✕ اذا كان $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = 0.\infty$ أو $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \infty.0$ فأن

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \begin{cases} \frac{0}{0}, & \lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = \infty \\ \frac{\infty}{\infty}, & \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases}$$

5. ✕ $\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \infty - \infty$ فأن

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \frac{0}{0}$$

6. ✕ $\lim_{n\to\infty} f(x)^{g(x)} = \infty^0$ او $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}, = 1^\infty$ او $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^0,$

عندئذ نستخدم اللوغايتم الطبيعي وبالشكل التالي: نفرض $y = f(x)^{g(x)}$ وعليه يكون

$$\ln(y) = g(x)\ln(f(x))$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to a} \ln(y) = \lim_{x\to a} g(x)\ln(x)$$

ثم نستخدم الملاحظة (2) اعلاه ثم نأخذ الدالة الاسية للطرفين.

7. اذا كانت نتيجة التعويض المباشر $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ وكلما طبقنا قاعدة لوبيتال تبقى النتيجة نفسها $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ عندئذ تفشل هذه الطريقة ونحاول حلها بطريقة اخرى (كما في المثال الاخير ادناه).

امثلة:

1. $lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = 4$
2. $lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-sin(x)}{1} = -1$

3. $lim_{x\to 0}\frac{x-tan(x)}{sin(x)-x}=lim_{x\to 0}\frac{1-sec^2(x)}{cos(x)-1}=lim_{x\to 0}\frac{2sec^2(x)\,tan(x)}{-sin(x)}=lim_{x\to 0}\frac{2sec^4(x)+2sec^2(x)\,tan(x)}{-cos(x)}=-2$

4. $lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}cos(x^2)dx}{\sqrt{x}}=lim_{x\to 0^+}\frac{cos(x).\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=1$

5. $lim_{x\to 0^+}\frac{ln(|sin(x)|)}{ln(|tan(x)|)}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{sin(x)}.cos(x)}{\frac{cos(x)}{sin(x)}.sec^2(x)}=1$

6. $lim_{x\to\infty}x^2.e^{-x}=lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$

7. $lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{sin(x)})=lim_{x\to 0}(\frac{sin(x)-x}{xsin(x)})=lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x\,cos(x)+sin(x)}=lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{2\,cos(x)-x\,sin(x)}=\frac{0}{2-0}=0$

8. $lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{ln(x)}-\frac{x}{x-1}\right)=lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-x\,ln(x)}{(x-1)\,ln(x)}=lim_{x\to 1}\frac{1-(1+ln(x))}{\frac{x-1}{x}+ln(x)}$

9. $=lim_{x\to 1}\frac{-xln(x)}{(x-1)+xln(x)}=lim_{x\to 1}\frac{-1-ln(x)}{1+(1+ln(x))}=-1$

10. $lim_{x\to 0^+}x^x$

نفرض $y=x^x$ وبأخذ الدالة اللوغايتمية للطرفين نحصل على $ln(y)=x\,ln(x)$

$$\Rightarrow lim_{x\to 0^+}(ln(y))=lim_{x\to 0^+}(x\,ln(x))=lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)=lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow e^{lim_{x\to 0^+}(ln(y))}=e^0\Rightarrow lim_{x\to 0^+}e^{ln(y)}=1\Rightarrow lim_{x\to 0^+}x^x=1$$

11. $lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

نفرض $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ وبأخذ الدالة اللوغايتمية للطرفين نحصل على $ln(y)=\frac{1}{x}ln(x+1)$

$$\lim_{x\to 0}ln(y)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=1$$

$$\Rightarrow e^{lim_{x\to 0}(ln(y))}=e^1\Rightarrow lim_{x\to 0}e^{ln(y)}=e^1\Rightarrow lim_{x\to 0}x^x=e^1$$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

نلاحظ انه عند التعويض المباشر تكون النتيجة $\frac{\infty}{\infty}$ وعند استخدام قاعدة لوبيتال تبقى النتيجة نفسها مهما كررنا التطبيق لهذا تفشل هذه الطريقة وتحل بأن نتخلص من الجزء الذي يسبب مشكلة وبالشكل:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$$

تمارين:

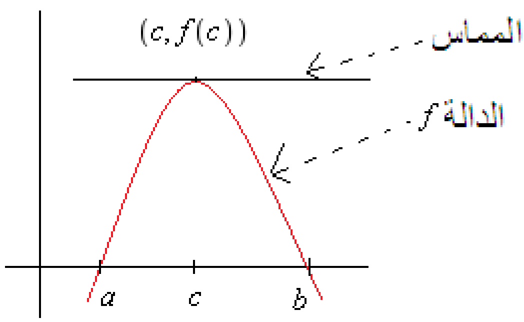
1. $lim_{x\to\infty}(e^x-x^2)$ 2. $lim_{x\to\pi}\frac{\cos(\tan(x))-1}{x-\pi}$ 3. $lim_{x\to 0}(csc(x))^{sin(x)}$

الفصل السادس: مبرهنتي رول والقيمة الوسطى:

مبرهنة رول: اذا كانت $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) وتحقق $f(a) = 0 = f(b)$ فأنه يوجد على الاقل عدد مثل c يقع بين a و b يحقق $f'(c) = 0$.

التفسير الهندسي:

اذا كان f منحني متصل داخل الفترة $[a, b]$ وله مماس عند كل نقطة بين a و b ويقطع المحور-x في النقطتين a و b فأنه يوجد على الاقل نقطة c $(a < c < b)$ تحقق ان المماس للدالة عند النقطة $(c, f(c))$ يكون موازيا للمحور-x (اي ان ميل المماس يساوي صفرا).



امثلة:

1. هل يمكن تطبيق مبرهنة رول للدالة $f(x) = \tan(x)$ للكل من الفترتين التاليتين $[0, \pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$؟

(1) بما ان الدالة $\tan(x)$ غير معرفة عند $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ وعليه الدالة غير مستمرة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني انه لايمكن تطبيق مبرهنة رول للفترة $[0, \pi]$.

(2) الدالة $\tan(x)$ مستمرة على الفترة $[0, \pi]$ وقابلة للاشتقاق للفترة $(0, \pi)$ لكن $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$ وهذا يعني انه لايمكن تطبيق مبرهنة رول للفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$.

2. هل يمكن تطبيق مبرهنة رول للدالة $f(x) = x^2 - 6x + 8$؟ ثم جد كل الثوابت c.

(1) نستخرج فترة لنختبر عندها مبرهنة رول بجعل $f(x) = 0$

$$\Longrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2, 4$$

وعليه الفترة هي $[2,4]$.

(2) بما ان الدالة خطية فهي مستمرة لكل $\mathbb{R}$ وعليه تكون مستمرة للفترة $[2, 4]$.

(3) بما ان $f'(x) = 2x - 6$ دالة خطية معرفة لكل $\mathbb{R}$ فهي معرفة للفترة $(2, 4)$ وهذا يعني ان الدالة f قابلة للاشتقاق للفترة $(2, 4)$.

(4) بما ان $f(2) = 0 = f(4)$

فعليه يمكن تطبيق مبرهنة رول للفترة $[2, 4]$ اي انه يوجد عدد c يقع بين 2 و 4 يحقق $f'(c) = 0$

$$\Longrightarrow 2c - 6 = 0 \Longrightarrow c = 3$$

(5) اي فترة $[a,b]$ لاتساوي الفترة $[2,4]$ (اي ان $b \neq 4$ او $a \neq 2$) لاتحقق مبرهنة رول لانه اما $f(a) \neq 0$ او $f(b) \neq 0$.

3. هل يمكن تطبيق مبرهنة رول للدالة $f(x) = \sin(3x)$ ثم جد الثابت c (ان وجد).

(1) نجد الفترة بأن نجعل $f(x) = 0$

$$\Longrightarrow \sin(3x) = 0 \Longrightarrow 3x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}, \dots$$

نختار اي قيمتين الى x مثل $0, \ \pi$ فنحصل على الفترة $[0, \ \pi]$

(2) بما دالة الجيب مستمرة لكل $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على الفترة $[0, \ \pi]$.

(3) بما ان $f'(x) = 3\cos(3x)$ وهي معرفة للكل $\mathbb{R}$ فهي معرفة للفترة $(0, \ \pi)$ وعليه الدالة f قابلة للاشتقاق للفترة $(0, \ \pi)$.

(4) بما ان $\qquad f(0) = 0 = f(\pi)$

فعليه يمكن تطبيق مبرهنة رول على الفترة $[0, \ \pi]$ اي انه يوجد عدد c يقع بين π و 0 يحقق $f'(c) = 0$ اي ان

$$3\cos(3c) = 0 \Longrightarrow \cos(3c) = 0 \ \Longrightarrow 3c = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \Longrightarrow \ c = \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{3\pi}{6}, \dots$$

نختار $c = \frac{\pi}{6}$ لان $0 < \frac{\pi}{6} < \pi$.

4. هل يمكن تطبيق مبرهنة رول للدالة $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$؟

نجد فترة بأن نضع $f(x) = 0$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \ \Longrightarrow x(x-2) = 0 \ \Longrightarrow x = 0, 2$$

فنحصل على الفترة $[0,2]$.

بما ان الدالة f اعلاه غير معرفة عند $x = 1 \in [0,2]$ وعليه الدالة f غير مستمرة عند $x = 1$
اي ان الدالة f غير مستمرة على الفترة $[0,2]$. وهذا يعني انه لايمكن تطبيق مبرهنة رول للدالة اعلاه للفتره اعلاه
وكذلك لاي فترة اخرى $[a,b]$ تختلف عن $[0,2]$ لانها اما $f(a) \neq 0$ او $f(b) \neq 0$.

<u>تمارين</u>: هل يمكن تطبيق مبرهنة رول للدوال ادناه ثم جد **كل** الثوابت c (ان وجدت)

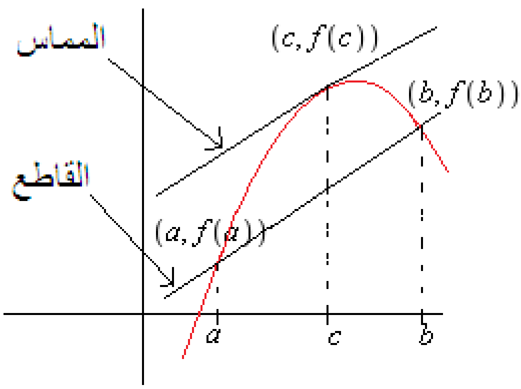
1. $f(x) = |x^2 - 1|$
2. $f(x) = \sin(3x)$
3. $f(x) = \tan(x)$
4. $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x+2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$
6. $f(x) = \sin^{-1}(x), \quad [0,1]$

مبرهنة القيمة الوسطى:

اذا كانت $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) فأنه يوجد على الاقل عدد c بين a و b يحقق $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

التفسير الهندسي:

اذا كان f منحني متصل داخل الفترة $[a, b]$ وله مماس عند كل نقطة في الفترة (a, b) فأنه يوجد على الاقل عدد c يحقق ان $(a < c < b)$ المماس للدالة f عند النقطة $(c, f(c))$ يكون موازيا للمستقيم القاطع الواصل بين النقطتين $(a, f(a)), \ (b, f(b))$ اي ان المماس والقاطع لهما نفس الميل.



امثلة: هل يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى للدوال ادناه:

1. $f(x) = x^3$ للفترة $[-1, 1]$

الدالة اعلاه مستمرة للفترة $[-1, 1]$ وان $f'(x) = 3x^2$ معرفة على الفترة $(-1, 1)$ اي ان الدالة اعلا قابلة للاشتقاق للفترة $(-1, 1)$ وعليه يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى للدالة اعلاه فنجد العدد c بين 1 و -1 من

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \Longrightarrow 3\,c^2 = \frac{(1)^3-(-1)^3}{1-(-1)} \Longrightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

اي انه يوجد مماسان للدالة f اعلاه واحدا في الفترة $[-1, 0]$ والاخر في الفترة $[0, 1]$.

2. $f(x) = sin^{-1}(x)$ للفترة $[0, 1]$

بما ان الدالة اعلاه مستمرة للفترة $[-1, 1]$ فهي مستمرة للفترة $[0, 1]$

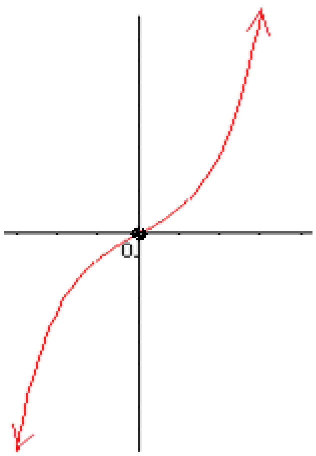
وبما ان $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ معرفة للفترة $(0, 1)$ اي ان الدالة f اعلاه قابلة للاشتقاق للفترة $(0, 1)$ فعليه يمكن تطبيق مبرهنة القيمة الوسطى فنجد العدد c الي يقع بين 1 و 0 ويحقق

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{sin^{-1}(1)-sin^{-1}(0)}{1-0}$$

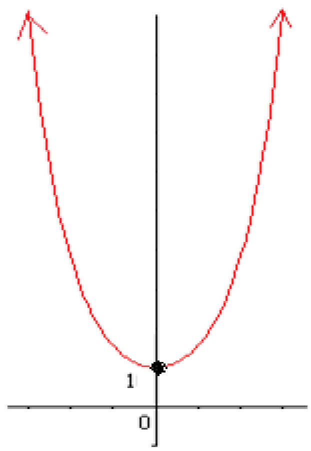
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{1-0} \Longrightarrow c \cong 0.2$$

الفصل التاسع: الدوال الزائدية:

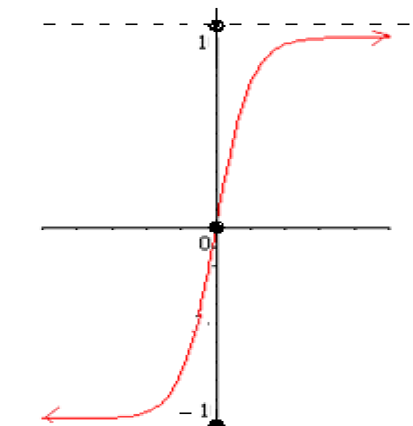
1. دالة الجيب الزائدية	s	L	F
2. دالة الجيب تمام الزائدية	c	L	F
3. دالة الظل الزائدية	t	L	F
4. دالة الظل تمام الزائدية	c	L	F
5. دالة القاطع الزائدية	s	L	F
6. دالة القاطع تمام الزائدية	c	L	F



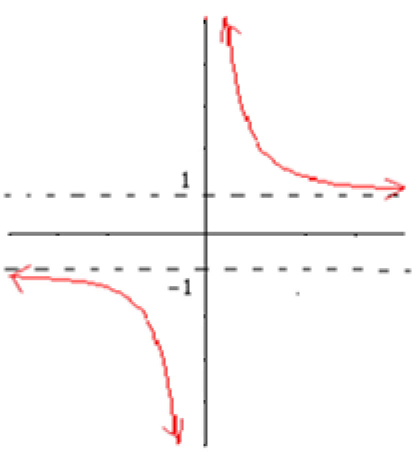
$y = \sinh(x)$



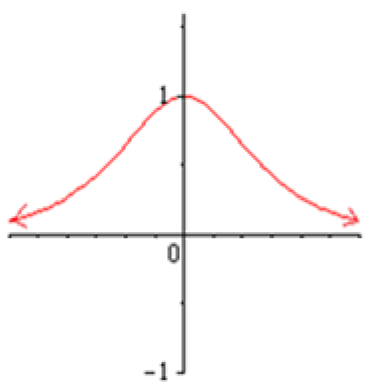
$y = \cosh(x)$



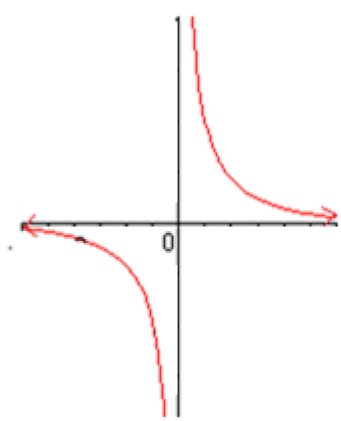
$y = \tanh(x)$



$y = \coth(x)$



$y := \operatorname{sech}(x)$



$y := \operatorname{csch}(x)$

علاقات الدوال الزائدية:

1. $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$
2. $tanh^2(x) + sech^2(x) = 1$
3. $coth^2(x) - csch^2 = 1$
4. $sinh(-x) = sinh(x)$
5. $cosh(-x) = cosh(x)$
6. $sinh(2x) = 2\,sinh(x)\,cosh(x)$
7. $cosh(2x) = cosh^2(x) + sinh^2(x)$
8. $sinh(x \pm y) = sinh(x)\,cosh(y) \pm cosh(x)\,sinh(y)$
9. $cosh(x \pm y) = cosh(x)\,cosh(y) \pm sinh(x)\,sinh(y)$

البرهان:

1. $$cosh^2(x) - sinh^2(x) = \left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$
$$= 1$$

2. 3. 4. 5. 6. 7. H.W

مشتقات الدوال الزائدية: لتكن u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x عندئذ:

1. $\frac{d}{dx}\sinh(u) = \cosh(u)\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cosh(u) = \sinh(u)\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tanh(u) = \text{sech}^2(u)\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\coth(u) = -\text{csch}^2(u)\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\text{sech}(u) = -\text{sech}(u)\tanh(u)\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\text{csch}(u) = -\text{csch}(u)\coth(u)\frac{du}{dx}$

البرهان: H.W

تكامل الدوال الزائدية:

1. $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + c$
2. $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + c$
3. $\int \text{sech}^2(x)\,dx = \tanh(x) + c$
4. $\int \text{csch}^2(x)\,dx = -\coth(x) + c$
5. $\int \text{sech}(x)\tanh(x)\,dx = -\text{sech}(x) + c$
6. $\int \text{csch}(x)\coth(x)\,dx = -\text{csch}(x) + c$

امثلة:

1. $\lim_{x\to 0^+} csch(x)$

مباشرة من الرسم نحصل على $\lim_{x\to 0^+} csch(x) = +\infty$ او من التحليل بالشكل

$$\lim_{x\to 0^+} csch(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{1^+ - 1^-} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

2. $y = tanh^4(3x) \implies y' = 4\,tanh^3(3x).sech^2(3x).3$
3. $y = x\,sinh(xy) \implies y' = sinh(xy) + x\,cosh(xy).(xy' + y) \Rightarrow y' = \frac{sin\,h(xy)+xy\,\cosh(xy)}{1-x^2\cosh(xy)}$
4. $\int \frac{cos\,h(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{cos\,h(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = 2sinh(\sqrt{x})$
5. $\int x\,sinh(x)\,dx$

نفرض $(u = x, \quad dv = sinh(x)\,dx) \Longleftarrow (du = dx, \quad v = cosh(x))$

$$\int x\,sinh(x)\,dx = x\,cosh(x) - \int cosh(x)\,dx = x\,cosh(x) - sinh(x) + c$$

6. $\int \frac{tan\,h(x)}{sin\,h(x)}dx = \int \frac{1}{cosh(x)}dx = \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}.\frac{e^x}{e^x}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx = tan^{-1}(x) + c$