محاضرات ر215 (الفصل الاول)

لطلبة كلية العلوم /قسم الرياضيات

م.م خوله عبد الرزاق سوادي

تذكير بالمفاهيم الأساسية للاحتمالات

مفاهيم أساسية التـرميز

من بين علوم الرياضـــيات العليا يعتبر البعض الاحتمالات على أنها الأكثر تعقيدا و "الأكثر علوا" !!، والحقيقة غير ذلك. إنها لا تعدو أن تكون بالنســبة لمن يريد حقا فهما لعبة مســلية تتلخص في بضــعة قواعد بديهية. ولا يضــاهي بســاطة الاحتمالات إلا تعدد اســتخداماتها وتواجدها في جميع الميادين، ما يفسر حتمية دراستها على جميع الشعب تقريبا. بالنسبة لعالم الاقتصــاد والتسـيير فإن فهم حسـاب الاحتمالات هو أداة يومية لمعالجة المشـاكل المطروحة واتخاذ القرار. فقرارات المســير، بل وحتى رب البيت، تبنى في ٩٩ % من الحالات على معلومات غير مؤكدة.

مفاهيم أساسية

مفهوم التجربة، الحدث والاحتمال

خصائص الاحتمال

القواعد الأساسية في حساب الاحتمال

تعريف باسكال للاحتمال

مفهوم التجربة، الحدث والاحتمال

الاحتمال و الحدث كثيرا ما يخلط الطلبة بين هذين المفهومين لارتباطهما ببعض. فالحدث العشـوائي هو واقعة أو نتيجة ما، أما الاحتمال فهو عدد بين الصـفر والواحد يعبر عن حظوظ وقوع الحدث (ليس شـرطا أن يكون زمن وقوع الحدث هو المسـتقبل، فقد يكون الماضــي أو الحاضــر). عندما نرغب في التعبير بشــكل دقيق على مدى إمكانية وقوع حدث معين فإذنا عادة نســتعمل عبارات مثل: ١٠٠% للحدث المؤكد أو ٥٠% للحدث المحتمل و١% مثلا للحدث المستبعد، إذن نحن نستخدم الكسور في سلم تصاعدي من ٠ إلى١، بحيث يرمز ٠ للاستحالة و١ للتأكد.

مثال. احتمال الحصــول على صــورة عند رمي قطعة نقدية هو ٢/١، و احتمال الحصــول على الوجه "٦" عند رمي حجر نرد هو ٦/١ .

يمكن جمع الأعداد أو طرحها و يمكن أن تخضع للجداء و القسمة أما عمليات التقاطع و الاتحاد، .. فهي عمليات على المجموعات و ليست على الأعداد. من أجل ذلك لا يصح أن نكتب احتمال تقاطع (أو اتحاد) احتمال. تمثل هذه القاعدة الذهبية الأولى في الاحتمالات وفي هذا المقياس ككل.

ويجب التمييز بين الاحتمال والإمكانية (الإمكانية هي حدث). فالاحتمال في مفهوم العلم هو عدد يقيس حظوظ وقوع شيء ما نسميه نتيجة أو حدث أو إمكانية. أما الإمكانية فهي حدث أو نتيجة ما من بين أحداث أو نتائج أخرى. يختلف عن هذا المفهوم العلمي تعريف الناس للاحتمال.

فكثيرا ما تطلق كلمة الاحتمال و يقصـــد بها إمكانية، فيقال مثلا "إن هذا احتمال ممكن" و الصــحيح إن هذه إمكانية واردة" أو يقال "إذا رمينا حجر نرد هناك ٦ إحتمالات" و الصــحيح " هناك ٦ إمكانيات أو ٦ نتائج محتملة"، ...

التجربة

لشرح المفهوم المجرد للتجربة و تمييزها عن الحدث يمكن القول أن التجربة هي أم الحدث أو أم النتيجة. لأن التجربة تتفرع بالضـــرورة إلى أحداث. ففي المقولة الســـابقة، التجربة هي الحرب بينما الهزيمة هي نتيجة ممكنة للحرب.و التجربة قد تقبل نتيجتين أو أكثر.

ومفهوم التجربة في علم الاحتمالات مفهوم عام و مرن، فإذا كنا ندرس احتمال الحصـــول على الوجه ٦ عند رمي قطعة نرد تكون التجربة هي الرمي، و إذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الوحدات التالفة لآلة ما يمكن اعتبار كل وحدة منتجة كتجربة، وإذا كنا ندرس احتمال عدد معين من الطلابة الراســـبين في مقياس ما نعتبر كل طالب كتجربة... نقول احتمال حدث أو احتمال نتيجة ولا نقول إحتمال تجربة.

خصائص الإحتمال

عادة ما نعبر عن هذه الخصائص بالطريقة التالية:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

ويمكن إضافة خاصية ثالثة تستنتج بديهيا من الخاصيتين السالفتين وهي أن الاحتمال يكون محصورا بين 0 و1 . أي أنه لا يمكن أن يكون سالبا ولا أن يكون أكبر من الواحد.

الأركان الخمسة في حساب الاحتمالات

هناك خمس قواعد أساسية في حساب الاحتمال نذكرها الآن باقتضاب لإبراز أهميتها ونعود لشرحها فما بعد وسنحتاج إلى استخدام هذه القواعد في جميع فصول المقياس.

١. احتمال وقوع حدث يساوي 1 مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس. مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي 1.
٢. احتمال وقوع حدثان "أ" و "ب" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.
٣. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.
٤. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.
٥. احتمال وقوع حدث "ا" أو "ب" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

القاعدة السادسة أو حساب الاحتمال حسب تعريف باسكال للاحتمال

عرف بليز باسكال (Blaise Pascal : 1623) الاحتمال بالشكل التالي:

> **"**احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا اقترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع.**"**[١]

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي قطعة نرد ؟ بين كل من التجربة، الحدث والاحتمال في هذا المثال.

الجواب: هناك ثلاث حالات ملائمة للحصول على عدد زوجي (٢، ٤ و٦). أما العدد الكلي للحالات الممكنة فهو ٦: (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦). **وبافتراض أن كل الحالات الممكنة لها نفس الاحتمال** فإن احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

تنبيه: لا يمكن استخدام هذه العلاقة إذا لم تكن احتمالات الحالات متساوية.

مثال٢. صندوق به ٧ كريات منها ٥ حمراء. نسحب ٣ كريات معا. ما هو احتمال أن تكون كلها حمراء؟ بين كل من التجربة والحدث في هذا المثال.

عدد الحالات الملائمة C_5^3 وعدد الحالات الممكنة: C_7^3. إذا الاحتمال هو $\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{10}{35}$. التجربة هي السحب من الصندوق، الحدث أو النتيجة هي الحصول على ...

مثال٣. فوج مكون من ١٠ طلبة. نسحب بالقرعة اسم من العشرة. ما هو احتمال أن يكون الطالب أحمد؟ بين كل من التجربة والحدث.

نسحب (بدون إعادة) عينة من ٣ أسماء من العشرة. ما هو احتمال أن يكون منهم الطالب أحمد؟

الجواب: ١) احتمال الحدث الأول أو النتيجة الأولى هي $\frac{1}{10}$،

٢) عدد الطرق الممكنة للعينة: C_{10}^3، عدد الحالات الملائمة لكي يكون أحمد في العينة:

$$C_{10-1}^{3-1}=C_9^2 \qquad C_n^x=\frac{n!}{(n-x)!x!}\Rightarrow C_9^2=36$$

الاحتمال هو إذا: $\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{10(9)(8)/3}=\frac{36}{240}=\frac{3}{20}$

التجربة هي السحب، النتيجة أو الحدث هي أن يكون الطالب أحمد، ...

مثال ٤. يتنافس أحمد مع ٣ زملائه على أعلى نقطة في كل من الامتحانات الستة للسداسي. إذا كانت حظوظ الطلبة الأربعة متساوية، ما هو احتمال: أن يفوز أحمد بأعلى نقطة في كل من الامتحانات الستة؟ أن يفوز أحد الطلبة (أيا كان) بأعلى نقطة في الامتحانات الستة؟

---

[١] ريجينالد لافوا ١٩٨١، ص ٢ و٣.

الجواب:

١) هناك $4096 = 6^4$ حالة ممكنة لنتائج المنافسة، منها حالة فوز أحمد بجميع المقاييس؛ إذا الاحتمال هو 1/4096.

2) هناك ٤ طلبة إذا هناك ٤ حالات لفوز أحد الطلبة بجميع المقاييس، إذا الاحتمال هو 4/4096 .

خلاصة

الاحتمال هو عدد لا يزيد عن 1 و لا يقل عن 0.

التجربة والحدث والاحتمال هي مفاهيم لا يجب الخلط بينها. التجربة يتولد عنها أحداث (نتائج أو حالات) مختلفة. التجربة مفهوم مرن يتطلب أحيانا نظرة ذكية وخيال. من المهم اكتساب هذه المهارة في تحديد ما هي التجربة أو التجارب في مسألة ما لأن ذلك هو المفتاح لفهم و حل المسألة.

هناك خمس قواعد في حساب الاحتمال هي الأركان الأساسية لعلم الاحتمالات. هذه القواعد متعلقة ب:

- احتمال الحدث المعاكس،
- باحتمال تحقق حدثين معا،
- باحتمال تحقق حدثين معا إذا كانا مستقلان،
- باحتمال تحقق أحد حدثين،
- و متعلقة باحتمال تحقق الحدث و عكسه معا.

الترميز أو التعبير الرياضي عن الاحتمالات

استخدام نضرية المجموعات

التعبير الرياضي عن قواعد جمع وضرب الاحتمالات

نظرية بايز

نستخدم الترميز من أجل التوصل إلى تعبير دقيق و واضح لقواعد الحساب الاحتمالي و هي ذاتها القواعد الأربعة المذكورة في الجزء الأول.

نعبر عن احتمال حدث ما بطريقة رياضية فنكتب $P(A)$

ونعبر عن احتمال وقوع الحدث : $X = x$ كما يلي: $P(X = x)$ أو $P(x)$.

مثال: احتمال الحدث: "الحصول على الوجه ٥" عند إلقاء حجر نرد يكتب: $P(X = 5) = 1/6$ ، أو باختصار: $P(5) = 1/6$

و أحيانا نختصر أكثر فنكتب: $P = 1/6$.

استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية

من خلال البنود التالية تستخدم نظرية المجموعات للتعبير عن الأحداث العشوائية:

١. نعبر عن النتائج الممكنة لتجربة ما ب Ω، وتسمى المجموعة الكلية أو فضاء العينة.
٢. نعبر عن الحدث بمجوعة جزئية A من فضاء العينة، حيث A هي مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة.
٣. إذا انتهت التجربة بنتيجة تمثل عنصرا من A نقول أن الحدث A قد تحقق.
٤. الحدث الذي يحتوي على نقطة أو عنصر واحد من Ω يسمى عادة حدث بسيط.

مثال. لتكن لدينا تجربة هي إلقاء مكعب نرد. أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عمليا عن الأحداث التالية:

الحدث A: الحصول على العدد ٦ (حدث بسيط) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A= {٦}

الحدث B: الحصول على عدد زوجي $B = \{2, 4, 6\}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي $C = \{2, 3, 5\}$

الحدث D: الحصول على عدد فردي $D = \{1, 3, 5\}$

مثال ٢ : لتكن لدينا تجربة هي رمي قطعتين نقديتين على التوالي: أكتب مجموعة فضاء العينة ثم عبر عن:

الحدث A : الحصول على مرتين كتابة (حدث بسيط) $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$, $A = \{PP\}$

الحدث B : الحصول على كتابة مرة واحدة $B = \{FP, PF\}$

الحدث C : الحصول على كتابة في الرمية الأولى $C = \{PF, PP\}$

٥. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، الحدث Φ يمثل الحدث المستحيل لأنه لا يمكن أن يتحقق عنصر منها. $P(\Phi) = 0$.
٦. من بين الأحداث الممكنة في تجربة ما أيا كانت، حدث المجموعة الأساسية Ω نفسها، وهو الحدث الأكيد لأنه لابد أن يتحقق أحد عناصرها على الأقل. $P(\Omega) = 1$
٧. بتطبيق عمليات مثل الإتحاد والتقاطع، الطرح، الجمع .... على المجموعات نحصل على مجموعات جديدة جزئية من Ω ومن ثم أحداث جديدة في Ω . من ذلك :

$A \cup B$ هو الحدث: إما A أو B أو كلاهما.

$A \cap B$ هو الحدث: A و B في وقت معا.

C_A هو الحدث المعاكس ل A.

$A - B$ هو الحدث: A لكن ليس B .

٨. إذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول أن A و B متنافيان (أو غير متلائمان) أي لا يمكن وقوعهما معا.

مثال: نرمي قطعة نقدية مرتين: إذ كان A هو الحدث "مرتين كتابة" و B "صورة على الأقل".

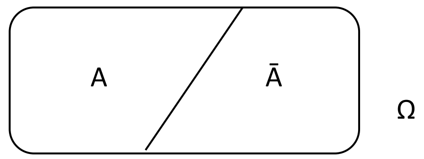
$\Phi = A\cap B \qquad A = \{PP\}.\ \ B = \{PF, FP, FF\}$

التعبير الرياضي عن قواعد حساب الاحتمالات

الحدث المعاكس أو التعبير الرياضي عن القاعدة رقم ١.

نعبر عن الحدث المعاكس ل A ب Ā أو 'A واحتماله هو احتمال عدم تحقق الحدث A، ونكتب :

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \iff P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



مثال: نرمي قطعة نقدية ونرمز ب P للكتابة وF للصورة (الوجه). نلاحظ أن:

$$P(P) = P(F') = 1 - P(F) \iff P(P) + P(F) = 1$$

مثال ٢: عند رمي حجر نرد فإن احتمال الحصول على العدد ٥ هو: $P(5) = 1/6$ ، فما هو الحدث المعاكس في هذه الحالة وما احتماله؟

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير ٥، واحتماله هو: $P(5') = 1 - P(5) = 1 - (1/6) = 5/6$.

مثال ٣: نرمي حجر نرد، ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي، ماهو الحدث المعاكس وما هو احتماله؟

$$P(\text{nombre pair}) = P(2 \text{ or } 4 \text{ or } 6) = 3/6$$

الحدث المعاكس هو الحصول على عدد غير زوجي، و احتماله:

$$P(\text{impair}) = 1 - P(\text{pair}) = 1 - (3/6) = 3/6.$$

احتمال وقوع الحدث "A" و "B" أيا كانت (قاعدة رقم ٢).

$$P(A\cap B) = P(A) * P(B/A)$$

$$P(A\cap B\cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/(A\cap B))$$

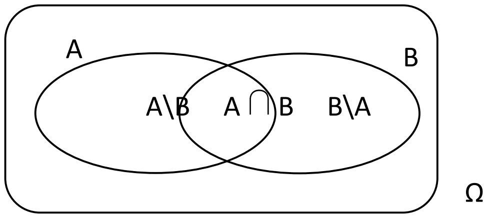
A, B, C أحداث ما (مستقلة أو لا، متنافية أو لا) ، $P(B/A)$ يسمى الاحتمال الشرطي لB علما أن A محقق.

ومن المعادلة الأولى نحصل على:

$$\mathbf{P(B/A) = P(A\cap B) / P(A)} \qquad \text{لما } \mathbf{P(A) > 0}$$

حيث A تصبح فضاء المعاينة بما أن A محقق.

رسم1 الحدث B/A غير الحدث B\A



مثال: ١) أحسب عند إلقاء حجر نرد احتمال الحصول على قيم أقل من ٤ (حدثB).

٢) أحسب احتمال الحصول على نتيجة أقل من ٤ إذا علمت أن الوجه المحصل لمكعب النرد عدد فردي (حدثA).

٣) أحسب احتمال الحصول على قيمة أكبر أو يساوي ٤ إذا علمت أن النتيجة عدد فردي.

P(B) = P(1or 2 or 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 3/6

P(B/A) = P(B∩A)/P(A)

P(B∩A) = P (impaire et ≤) = P(1 or 3) = P(1) + P(3) = 1/6 + 1/6 = 2/6؛

P(B/A) = P(B∩A)/P(A) = 2/6 / 3/6 = 2/3

احتمال وقوع الحدث "A" و "B" لما "A" و "B" مستقلان (قاعدة رقم ٣).

P(A∩B) = P(A) * P(B)   (P(B/A) = P(B))

وهو تعريف اســـتقلال حدثين، أي أن وقوع B لا يتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه نقول أن A وB مستقلان،

P(A∩B∩C) = P(A) * P(B) * P(C)   P(C/(A∩B)) = P(C)

مثال: نرمي حجر نرد وقطعة نقدية معا. ما هو احتمال الحصول على الصورة والعدد ٦ ؟ (نتيجة مكعب النرد مستقلة عن نتيجة القطعة النقدية).

P(A∩B) = P(A).P(B) = 0.5 * 1/6 = 1/12.

مثال ٢. نلقي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على صورة في الرمية الأولى وفي الرمية الثانية.

P(FF) = P(A∩B) = P(A) P(B) = 0.5 * 0.5 = 0.25

مثال ٣. صندوق به ٥ كريات ٢ حمراء و٣ بيضاء. نسحب كرية نسجل لونها ثم نعيدها للصندوق ونكرر العملية ٣ مرات.

- أحسب احتمال الحصول على ٢ كريات حمراء، ٣ كريات حمراء (أحداث مستقلة).

- كيف يكون الاحتمال في حالة كون السحب بدون إرجاع الكرية (أحداث غير مستقلة)؟

$P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\, P(R_2) = 2/5 * 2/5 = 8/25$

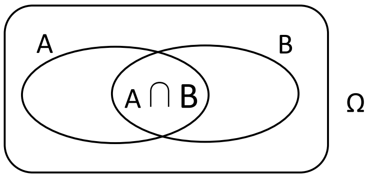
$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\, P(R_2)\, P(R_3) = 2/5 * 2/5 * 2/5 = 8/125$

$P(RR) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\, P(R_2/R_1) = 2/5 * 1/4 = 2/20$

$P(RRR) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)\, P(R_2/R_1)\, P(R_3/(R_1 \cap R_2)) = 2/5 * 1/4 * 0 = 0$

احتمال وقوع حدث "A" أو "B" (القاعدة رقم ٤).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

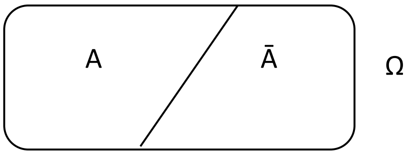


احتمال وقوع حدث "أ" أو "ب" لما "أ" و "ب" متنافيان (القاعدة رقم ٥).

لتكن الأحداث المتنافية A, B

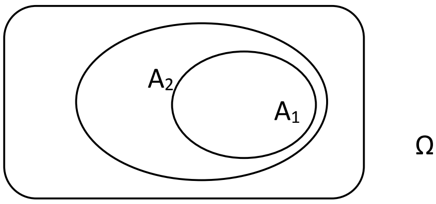
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (P(A \cap B) = 0)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \qquad (P(A \cap B \cap C) = 0)$$

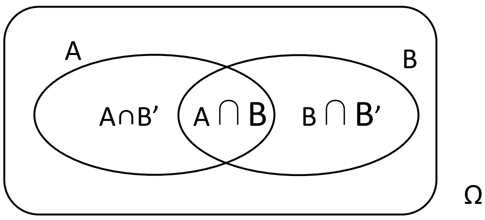


قواعد إضافية مهمة

- من أجل $A_1 \subset A_2$ فإن: $P(A_1) \le P(A_2)$ و $P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

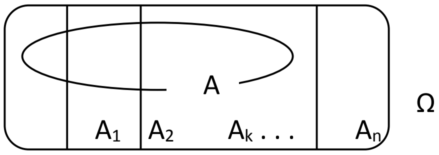


- من أجل A وB أحداث أيا كانت: $P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A)$



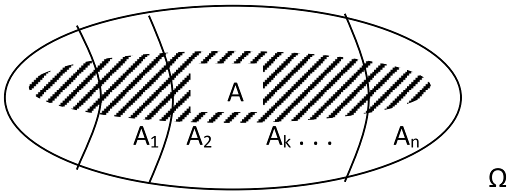
- إذا كان A هو نتيجة أحد أو بعض الأحداث المتنافية: $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_n$

$$P(A) = P(A\cap A_1) + P(A\cap A_2) + P(A\cap A_3) + \ldots\ldots + P(A\cap A_n)$$



نظرية الاحتمال السببي أو نظرية بايز

لتكن A_1، A_2، A_3، . . . A_k، . . .، A_n أحداث متنافية فيما بينها حيث اتحادها يشكل المجموعة الكلية (الأساسية) Ω، وA حدث ما يتحقق عن طريق واحد أو أكثر من الأحداث A_k، إذا علمنا أن A تحقق، نحسب احتمال تحققه عن طريق الحدث A_k كما يلي:



رسم 2 رسم يوضح نظرية بايز

$$P(A_k / A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(A/A_k)} = \frac{P(A\cap A_k)}{P(A)}$$

تسمى هذه النظرية نظرية الاحتمال السببي لأنها تمكن من حساب احتمال أن يكون حدث ما (A_k) هو المسبب لوقوع حدث آخر (A).

مثال: وظفت أمينة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع ٢٠ % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع ٣٠% من الفواتير والأخرى (A_3) ٥٠%. ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في ٥% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) ٢% ولدى الثالثة (A_3) ١%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا ٢٠% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(٥%).

١. أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو A_2 أو A_3.

٢. أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.

٣. أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1)P(A/A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.2*0.05}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.238$$

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2)P(A/A_2)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.3*0.02}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.2857$$

$$P(A_3/A)=\frac{P(A_3)P(A/A_3)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(A/A_k)}=\frac{0.5*0.01}{(0.2*0.05)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)}=0.476$$

يظهر من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو أن تكون A_3 هي التي حررت الفاتورة.

٢. مجموع الاحتمالات $P(A_1/A) + P(A_2/A) + P(A_3/A) = 1$ لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

٣. احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

$$P(A)=\sum P(A_k)P(A/A_k)=(0.2*0.005)+(0.3*0.02)+(0.5*0.01)=0.012$$

خلاصة

باستخدام نظرية المجموعات كأساس للترميز في مجال الاحتمالات يمكن الحصول على صياغة أكثر دقة للمفاهيم المختلفة. بهذه الطريقة نستخدم:

رمز التقاطع ∩ بدلا عن عبارة "و" مثال: احتمال "الوجه ٢ و ٥" في رميتي نرد: $P(\text{"2"} \cap \text{"5"}) = P(2) * P(5)$

رمز الإتحاد U بدلا عن عبارة" أو" مثال: احتمال الوجه ٢ أو ٥ في رمية نرد $P(\text{"5"}U\text{"2"}) = P(5) + P(2)$

رمز المتمم C_A أو $\bar{A}$ بدلا عن عبارة "عكس A "؛ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

من خلال هذا الترميز يمكن أن نعبر بسهولة عن القواعد الخمسة الأساسية لحساب الاحتمالات.

- $P(A\cap B) = P(A) * P(B/A)$

=> $P(B/A) = P(A\cap B) / P(A)$ (بشرط $P(A) > 0$)

- $P(A\cap B) = P(A) * P(B)$ عندما يكون الحدثان مستقلان

- $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

- $P(AUB) = P(A) + P(B)$ عندما يكون الحدثان متنافيان أي: $(P(A\cap B) = 0)$

<u>مسألة.</u> نرمي قطعة نقدية مرتين، نسمي A "مرتين كتابة" وB "كتابة في المرة الأولى"، عبر عن الحدث:

A ، B ، $\bar{A}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ ، $B - A$

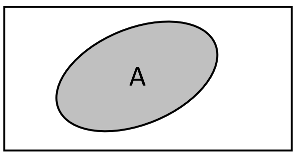
$A = \{PP\}$, $B = \{PP, FP\}$, $\bar{A} = \{PF, FP, FF\}$,

$A \cap B = \{PP\}$, $A \cup B = \{PP, FP\}$, $A - B = \Phi$, $B - A = \{FP\}$

ملحق

التعبير الهندسي عن الاحتمالات

قبل الشروع في حل مسألة مركبة للاحتمالات يستحسن تحليلها باستعمال أشكال هندسية توضح عناصر المسألة (الأحداث) والعلاقات بينها. يستخدم لهذا الغرض شجرة الاحتمال (أنظر الملحق) ومخطط فين. تبين شجرة الاحتمال الأحداث المتنافية التي تنتج عن التجربة الواحدة أو المكررة وذلك من خلال أغصان تتفرع من أصل، أما مخطط فين فيستخدم لتمثيل الأحداث الفرعية دوائر داخل مستطيل يمثل التجربة.

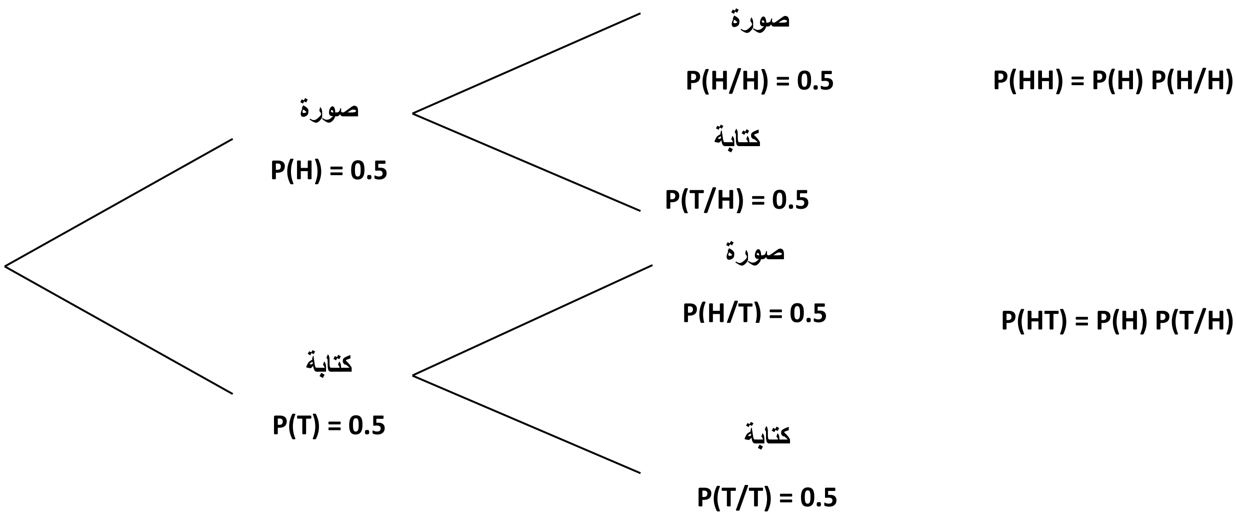


رسم1 مخطط فين

يراعى في رسم الشجرة أن يكون مجموع احتمالات كل تفريعة يساوي الواحد. التفريعة هي بمثابة شجرة فرعية تحتوي أحداث متنافية، لكونها تمثل النتائج المحتملة لتجربة جزئية.

مثال. نرمي قطعة نقدية مرتين. أحسب احتمال الحصول على مرتين صورة.

$P(face \cap face) = P(face) * P(face/face) = 0.5 * 0.5 = 0.25.$



في مفهوم الحدث العشوائي

يجب الملاحظة أن كلمة حدث عشوائي لا تعني أن الحدث لا يخضع لأي قانون، بل المقصود أننا نتحدث عن حدث لا نعلم مسبقا ما إذا كان سيقع أو لا يقع. الهزيمة التي وقعت في الحرب وأي هزيمة كانت لها أسبابها وليست محض مصادفة عمياء. والحقيقة أن لا شيء في الطبيعة يقع بالمصادفة. فلا معنى لكلمة مصادفة إلا أننا لم نقصد وقوع الشيء. فعندما أقول التقيت بفلان صدفة، فهذا يعني أنني لم أقصد ولم أخطط لمقابلته. لكن هناك أسباب أدت إلى هذه الملاقاة منها أنني سلكت طريقا معينا ... كذلك إذا رمينا مكعب نرد ٦ مرات فإننا لا نعلم إذا كنا سنحصل على مرة واحدة الوجه (٥). لذلك قيمة P(X) (مثلا P(٥) =1/6) هي قيمة نظرية، لكن إذا رمينا مكعب عدد كبير جدا من المرات (١٠٠٠ مرة مثلا) فنتوقع أن عدد مرات الحصول على الوجه (٥) سيكون قريبا جدا من العدد 1000/6. موضوع علم الاحتمالات هو البحث في قوانين الأحداث العشوائية، ولذلك أطلق عليه اسم "هندسة الحظ".