الدوال الخاصة والمتغيرات العقدية
Special functions and Complex Variables

المصادر:-

1- الدوال العقدية وتطبيقاتها
تأليف:- خالد أحمد ، د. هاني جابر

2- Complex variables and application
by:- RueL. V. Churchill

3- Complex analysis — تحليل عقدي
by:- Lars. V. Ahlfors

المصادر المساعدة

1- Theory of equations
by:- J. V. Uspensky

2- Applied mathematices for engineers and physicsts
by:- Louis Apipes

3- Complex Variables
by:- Murray. R. Spiegel

Complex number system   ب- نظام الاعداد العقدية

لو حاولنا حل المعادلة التالية $x^2+1=0$ لايجاد قيمة x فانّنا نجد أنه لا يوجد عدد حقيقي x يمكن أن يحقق المعادلة أعلاه ، ومن هنا كانت الحاجة الى أدخال نظام جديد للاعداد يسمى بنظام الاعداد العقدية أو المعقدة.

أن أي زوج من الاعداد الحقيقية تكتب بالصيغة (a,b) حيث a هو العنصر الأول و b هو العنصر الثاني يمثل نوع جديد من الاعداد يسمى بالاعداد العقدية التي تعني أن $(a,b)=a+ib$ حيث i تسمى الوحدة الخيالية وتأخذ القيمة

$$i=\sqrt{-1} \Rightarrow i^2=-1$$

واذا كانت $z=a+ib$ حيث z يمثل العدد العقدي فأن a يمثل الجزء الحقيقي من العدد z و b يمثل الجزء الخيالي للعدد z وأن الرمز z يمكن أن يأخذ قيمة أي عدد معقد أو أي مجموعة من الاعداد المعقدة ولذلك فان z تدعى بالمتغير المعقد ، ولكي نستطيع أستعمال الاعداد العقدية يجب أن نضع تعريفاً لكل من العمليات الأربعة مع المساواة .

١- تعريف المساواة للاعداد العقدية :-

أي عددين عقديين مثل (a,b) و (c,d) يساوي احدهما الآخر اذا كان فقط $a=c$ ، $b=d$

$$(a,b)=(c,d) \Rightarrow a+ib=c+id$$

مثال 1/

$$(2,\sqrt{12})=\left(\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}} \;,\; 2\sqrt{3}\right)$$

$$2=\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

مثال 2/

$$(1,-1)\neq(-1,1)$$

لأن

$$1\neq-1$$

$$-1\neq1$$

٢- جمع الأعداد العقدية

أن مجموع اي عددين عقديين يعطي عدد عقدي كما موضح أدناه

$$(a, b) + (c, d) = (a+c\, , b+d)$$

مثال ٣/

$$(1, -1) + (2, 1) = (1+2\, , -1+1) = (3, 0)$$

$$(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$$

$$(3, 2) + (-3, -2) = (0, 0)$$

٣- ضرب الأعداد العقدية

ضرب اي عددين عقديين مثل (a, b) و (c, d) يعطي عدد عقدي ثالث هو $(ac - bd\, , ad + bc)$ أي أن

$$(a, b)\cdot(c, d) = (a+ib)\cdot(c+id)$$

$$= ac - bd + i\,(bc + ad)$$

$$= (ac - bd\, , bc + ad)$$

مثال ٤/

$$(2, 3)\cdot(1, 2) = (-4, 7)$$

$$(1, -1)\cdot(1, 1) = (2, 0)$$

$$(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0)$$

٤- طرح الأعداد العقدية

طرح اي عددين عقديين مثل (a, b) و (c, d) يعطي عدد عقدي ثالث هو $(a-c\, , b-d)$ أي أن

$$(a, b) - (c, d) = (a-c\, , b-d)$$

مثال/

$$(2, 3) - (1, 2) = (1, 1)$$

٥- قسمة الأعداد المعقدة

أن قسمة العدد المعقد (a,b) على العدد المعقد (c,d) يؤدي الى الحصول على العدد المعقد (x,y) حيث

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

$$y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

على أن $(c,d) \neq (0,0)$

البرهان /

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (x,y)$$

$$(a,b) = (x,y)(c,d)$$

$$a+ib = (x+iy)(c+id)$$

$$= xc - yd + i(xd+yc)$$

$$\therefore a = xc - yd \qquad \text{تضرب في } c$$

$$b = xd + yc \qquad \text{تضرب في } d$$

$$ac = xc^2 - \cancel{ycd}$$

$$bd = xd^2 + \cancel{ycd}$$

بالجمع

$$ac+bd = xc^2 + xd^2$$

$$ac+bd = x(c^2+d^2)$$

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$$

لحذف x نضرب ① في d و ② في c

$$ad = \cancel{xcd} - yd^2$$

$$\mp bc = \mp \cancel{xcd} \mp yc^2$$

بالجمع

$$ad - bc = -yd^2 - yc^2 = -y(d^2+c^2)$$

$$bc - ad = y(d^2+c^2) \qquad \text{تضرب في } (-1)$$

$$y = \frac{bc-ad}{d^2+c^2}$$