Chapter Five الفصل الخامس

دوائر التيارات العابرة

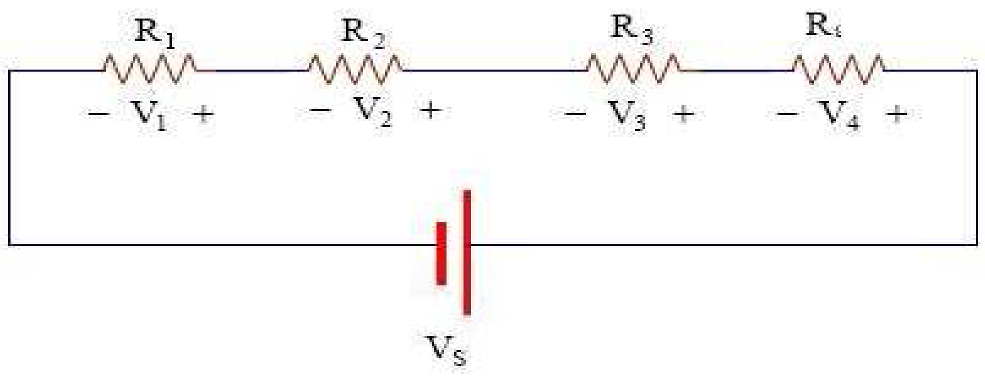
Transient Current Circuits

Sequence:43

- المقدمة.
- دائرة مقاومة ومحاثة ومتسعة / الجزء الرابع .

المقدمة

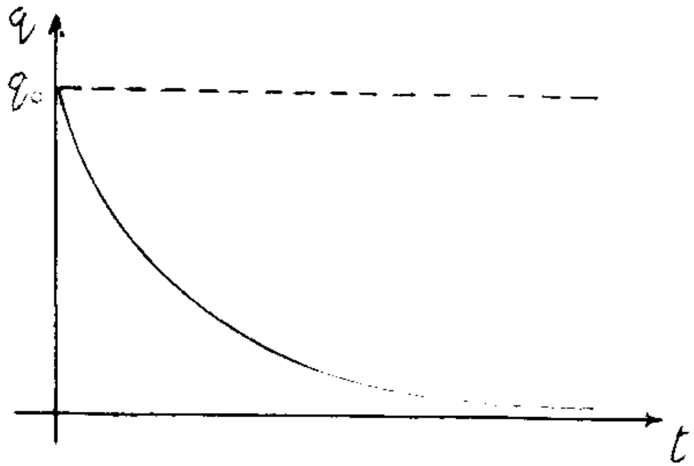
- يعتبر قانون كيرشهوف من القوانين الرئيسية للدائرة الكهربائية وهو ينص على ان المجموع الجبري للجهود فيي اي دائرة او مسار مغلق يساوي صفراً . في اي مسار مغلق يكون جهد المصدر يساوي الجهد المطبق على مقاومات المسار المتوالية.
- يعرف الجهد المطبق بأنه الجهد المطبق على المقاومات ونتيجة لمرور التيار في المقاومات فأنه ينشأ جهد معاكس في القطبية بالنسبة لاتجاه المصدر الرئيس للدائرة وبالتالي فأنه يعمل على هبوط جهد المصدر الى الصفر وهذا ما حققه كيرشهوف والشكل التالي يوضح قطبية كل من المصدر والجهد الناشيء على المقاومات .



دائرة مقاومة ومحاثة ومتسعة RLC – Circuit

$$\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) \rangle \left(\frac{1}{LC}\right) \quad \Rightarrow R \rangle 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- ***الحالة الأولـى :(تفريغ المتسعة)*** في هذه الحالة تكون قيمة
- (β) بيتا حقيقية وتسمى حالة الدائرة بالدائرة غير المتذبذبة،
- وبذلك فأن الحل للمعادلة (76) يكون أسياً تناقصياً تقترب فيه قيمة الشحنة من الصفر بعد مرور زمن لا نهائي من غلق الدائرة.
- ولايجاد قيمة الثابتين (A) و (B) في كل من المعادلتين
- (76) و (77) نستعمل القيم البدائية لكل من الشحنة
- والتيار على التوالي، في الزمن البدائي (t=0) ، حيث
- ان ($q=q_o$) و (i=0) . اذ تمثل (q_o) الشحنة الموجودة
- على المتسعة قبل بدء عملية التفريغ وبذلك نحصل على :



شكل (28): يمثل علاقة الشحنة مع الزمن عند تفريغ المتسعة.

$$q_\circ = A + B \qquad ...... (78)$$

$$(\beta - \alpha) A = (\beta + \alpha) B \qquad ...... (79)$$

- وبحل المعادلتين الاخيرتين (78) و (79) ، نحصل على :

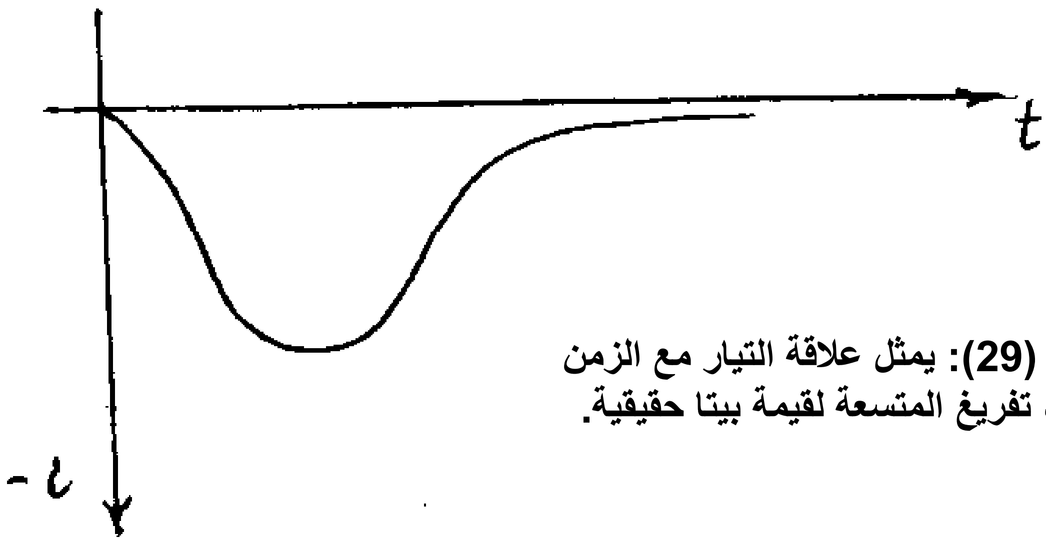
$$A = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} q_\circ \qquad , \qquad B = \frac{\beta - \alpha}{2\beta} q_\circ \qquad \text{...... (80)}$$

- وعند استعمال هاتين القيمتين لكل من (A) و (B) في المعادلتين (76) و (77) نحصل على المعادلتين التاليتين لكل من الشحنة والتيار في هذه الحالة:

$$q = \frac{q_\circ}{2\beta} e^{-\alpha t} [(\alpha + \beta) e^{\beta t} - (\alpha - \beta) e^{-\beta t}] \qquad \text{...... (81)}$$

$$i = -\frac{q_\circ}{2\beta} (\alpha^2 - \beta^2) e^{-\alpha t} [e^{\beta t} - e^{-\beta t}] \qquad \text{...... (82)}$$

- ويمكن تمثيل المعادلة (82) بيانياً
- فنحصل على الشكل البياني (29):



شكل (29): يمثل علاقة التيار مع الزمن عند تفريغ المتسعة لقيمة بيتا حقيقية.

- *************

$$\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) \langle \left(\frac{1}{LC}\right) \Rightarrow R \langle 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- ***الحالة الثانيـة (تفريغ المتسعة):*** في هذه الحالة تكون قيمة
- (β) بيتا خيالية وبذلك تعتبر حالة الدائرة هي دائرة متذبذبة.
- ***********
- وبذلك يمكن تمثيل الشحنة على المتسعة في هذه الحالة كما يلي :

$$q = A_\circ e^{-\alpha t} \sin (\omega_\circ t + \varphi) \quad ...... (83)$$

- وللحصول على علاقة خاصة بالتيار العابر المار في الدائرة الكهربائية في هذه الحالة وذلك من خلال أجراء عملية التفاضل للمعادلة (83) فنحصل على :

$$i = \frac{dq}{dt} = A_\circ e^{-\alpha t} [\ \omega_\circ \cos (\omega_\circ t + \varphi) - \alpha \sin (\omega_\circ t + \varphi)] \quad ...... (84)$$

- وبأستعمال القيم البدائية لكل من الشحنة
- والتيار في الزمن البدائي (t=0) ، حيث
- ان $(q=q_o)$ و (i=0) وبذلك نحصل على :

$$A \sin \varphi = q_0$$

$$\omega_0 \cos \varphi - \alpha \sin \varphi = 0$$

- وعند حل المعادلتين الاخيرتيين نحصل على قيمة الثابت (A) وكما موضح في العلاقة التالية:

$$A = \frac{\sqrt{\omega_\circ^2 + \alpha^2}}{\omega_\circ} q_\circ \quad , \quad \tan\varphi = \frac{\omega_\circ}{\alpha} \qquad \text{...... (85)}$$

- وعند التعويض عن قيمة (A) في المعادلتين (83) و (84) نحصل على العلاقتين التاليتين لكل من الشحنة والتيار :

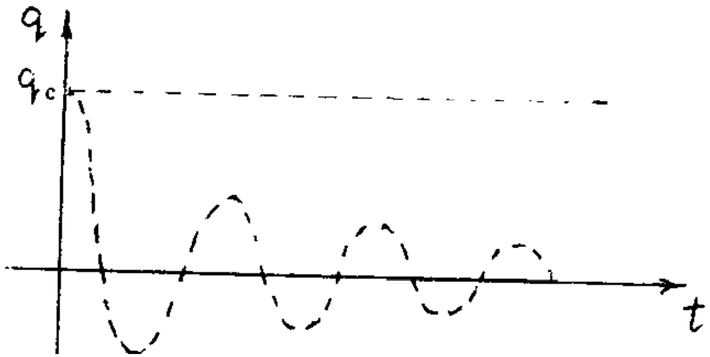
$$q = \frac{\sqrt{\omega_\circ^2 + \alpha^2}}{\omega_\circ} q_\circ e^{-\alpha t} \sin(\omega_\circ t + \varphi) \qquad \text{...... (86)}$$

-

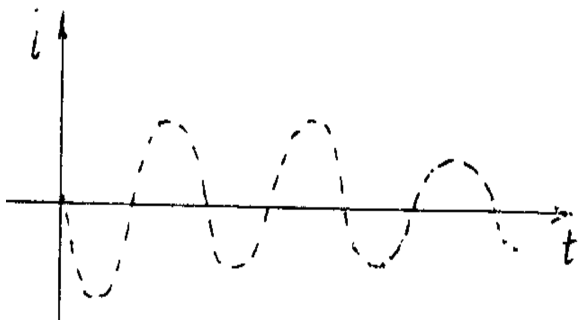
$$i = -\frac{\omega_0^2 + \alpha^2}{\omega_0} q_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

$$i = i_\circ e^{-\alpha t} \sin \omega_\circ t \qquad \text{...... (87)}$$

- ويمكن تمثيل المعادلتين (86) و (87) بيانياً فنحصل
- على الشكلين البيانيين (30) و (31)، واللذان يمثلان دالتان جيبيتان متضائلتان مع الزمن.



شكل (30): يمثل علاقة الشحنة مع الزمن.



شكل (31): يمثل علاقة التيار مع الزمن.

- ***الحالة الثالثة: (تفريـغ المتسعة)*** في هذه الحالة تكون قيمة
- (β) مساوية للصفر وتسمى الحالة بالحالة الحرجة ويقال

$$\left(\frac{R^2}{4L^2}\right) = \left(\frac{1}{LC}\right) \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- للدائرة بأنها في دائرة تضاؤل حرج. وللحصول على العلاقة الخاصة بالشحنة المتبقية على المتسعة بعد مرور زمن مقداره (t) من غلق المفتاح نعود للمعادلة (76)، ونفرض في بداية عملنا ان قيمة بيتا لا تساوي صفراً وانما تقترب من الصفر. ولذلك يأخذ الحدان الآسيان في المعادلة سابقة الذكر الشكل التالي:

$$e^{\beta t} = 1 + \beta t - \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \ldots$$

$$e^{-\beta t} = 1 - \beta t + \frac{\beta^2 t^2}{2!} - \frac{\beta^3 t^3}{3!} + \ldots.$$

- وبما ان قيمة بيتا صغيرة جداً حيث افترضنا ان قيمتها تقترب من الصفر لذلك فاننا سوف نهمل كل الحدود التي تحتوي على مربع قيمة بيتا والحدود التي تليها في العلاقتين اعلاه وبهذا نحصل على :

$$e^{\beta t} \approx 1 + \beta t$$

$$e^{-\beta t} \approx 1 - \beta t$$

- وبتعويض العلاقتين الاخيرتيين في المعادلة (76) نحصل على :

$$q = e^{-\alpha t}\left[(A + B) + (A - B) \beta t \right] \quad \text{......} (88)$$

- أما التيار العابر في هذه الحالة فيمكن الحصول عليه بأجراء عملية التفاضل للمعادلة (88) فنحصل على :

$$i = \frac{dq}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t}\left[(A + B) + (A - B) \beta t \right] + e^{-\alpha t} (A - B) \beta \quad \text{......} (89)$$

- ولايجاد قيمة الثابتين (A) و (B) في كل من المعادلتين (88) و (89) نستعمل القيم البدائية لكل من الشحنة والتيار في الزمن البدائي (t=0) ، حيث ان ($q=q_o$) و (i=0) وبذلك نحصل على :

$$\begin{aligned} A + B &= q_0 \\ \alpha (A + B) &= \beta (A - B) \end{aligned} \quad \text{......} (90)$$

- أو أن :

$$(A - B) = \frac{\alpha}{\beta} q_0 \quad \text{......} (91)$$

- وعند التعويض عن المقدار (A+B) من المعادلة (90) والمقدار (A-B) من المعادلة (91) في المعادلتين (88) و (89) نحصل على :

$$q = e^{-\alpha t} \{ q_0 + \frac{\alpha}{\beta} q_0 \beta t \}$$

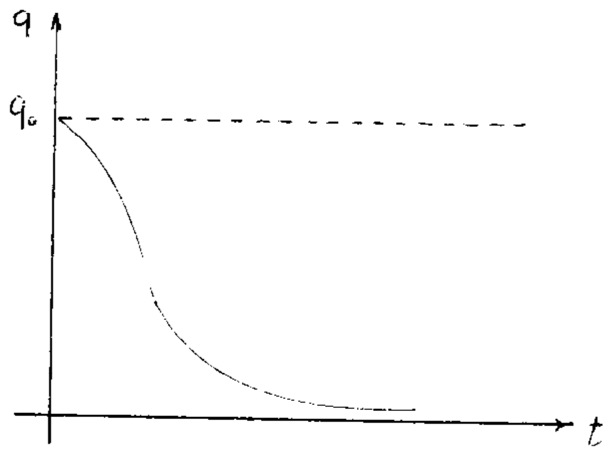
- المعادلة (92) تمثل الشحنة المتبقية على المتسعة
- كدالة للزمن.

$$q = q_\circ e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \qquad ...... (92)$$

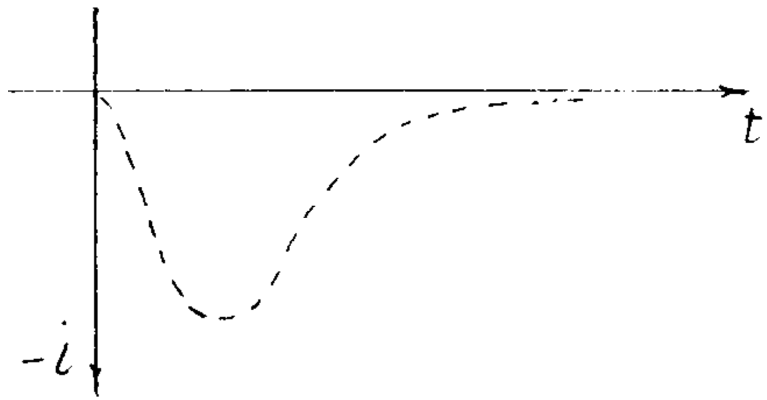
$$i = - \alpha e^{-\alpha t} [q_0 + \frac{\alpha}{\beta} q_0 \beta t] + e^{-\alpha t} [\frac{\alpha}{\beta} q_0 \beta]$$

- المعادلة (93) يمثل التيار العابر المار في دائرة
- RLC عند تفريغ المتسعة كدالة للزمن. ودلالة الاشارة
- السالبة هنا هي كما دلت عليه في المعادلة (82) وأن الشكلين أدناه (32) و (33) يوضحان المعادلتين (92) و (93) بيانياً.

$$i = - \alpha^2 q_\circ e^{-\alpha t} t \qquad ...... (93)$$



شكل (32): يمثل علاقة الشحنة مع الزمن.



شكل (33): يمثل علاقة التيار مع الزمن.

مثـــــــــال : في دائرة RLC اذا كان $\left(R = 447.2\Omega \;,\; L = 10\,H \;,\; C = 200\;\mu\text{F}\right)$

وربطت جميعها مع مصدر للقوة الدافعة الكهربائية ثابتة المقدار قيمتها $\left(\varepsilon = 50\,volts\right)$ **وبعد مرور زمن كافٍ من غلق مفتاح الدائرة الكهربائية تم فصل المصدر. حدد حالة الدائرة ثم جد العلاقة الخاصة بالتيار بعد مرور زمن مقداره (t) من فصل المصدر عن الدائرة.**

- **الحـــــــل:**
- **من خلال النتيجة المجاورة فأن حالة الدائرة هي**
- **دائرة تضاؤل حرج.**

$$\because 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{10}{200\times10^{-6}}} = 447.2\Omega$$

$$\therefore R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- **وعليه فان معادلة التيار لهذه الحالة تعطى من المعادلة رقم (93)**
- **وكما يلي :**

$$i = -\alpha^2 \; q_o \; t \; e^{-\alpha t}$$

- **لذلك علينا حساب كلا من** α **و** q_o

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{447.2}{2\times10} = 22.36$$

$$q_o = \varepsilon C = 50\times200\times10^{-6} = 0.01\,Coul.$$

$$i = -(22.3)^2 \;(0.01)\; t\,\exp(-22.36\;t)$$

$$i = -4.999\; t\,\exp(-22.36\;t)$$

الخلاصة   Summary

- تضمنت المحاضرة النقاط المهمة التالية :
- - ايجاد الصيغة الرياضية لكلا من الشحنة والتيار المار في دائرة RLC في حالة تفريغ المتسعة وللحالات الثلاث لقيم بيتا وهي (قيمة حقيقية وخيالية وصفر) .
- الحالات الثلاث لدائرة RLC في حالة تفريغ المتسعة هي:
- 1) دائرة متضائلة 2) دائرة تذبذبية 3) دائرة تضاؤل حرج.
- توضيح بالرسم البياني لكل من الشحنة والتيار لحالات الدائرة الثلاث.
- - يتم تحديد معادلتي الدائرة (الشحنة والتيار) من خلال اختبار قيمة بيتا لتلك الدائرة.
- مثـــــال .
- أختبـــار.

Start Formative Assessment