جامعة البصرة

كلية العلوم/ قسم الرياضيات

محاضرات

أسس الرياضيات مقرر ر103

أعداد

م.م فهد كامل نشمي

بسمه تعالى

مقدمة:

إن أي بناء محكم لأبد أن يقوم على أسس صحيحة ومتينة وإلا فأن نهاية ذلك البناء ستؤول الى الخراب لا محال ولا يختلف في هذا الحكم الأبنية المادية عن الأبنية المعنوية او الأبنية التي تتخذ من الذهن مقراً لها ومن العقل بناءاً لها اذا اتضحت هذه المقدمة نقول

ان علم الرياضيات هو بناءٌ عظيم جداً لما له من التميز في حل المشاكل الكثيرة والمعقدة والتي كانت عائق في تطور المجتمعات فالرياضي الحقيقي له من القدرة ما ليس لغيرة في حل المشاكل.

يقول العالم المعروف تشارلز داروين (1809_1882)

(قد اسفت بشدة كوني لم أذهب بعيداً بما يكفيني لافهم على الأقل شيئاً قليلاً من المبادئ الأساسية الكبرى للرياضيات لآن الرجال الذين توصلوا اليها يبدو أن لديهم حاسه إضافية-حاسة السادسة-)

ويقول كارل فريدريك جاوس (1777_1855)

(إن السحر الأخاذ لهذا العلم السامي لا يمكن أن يكشف عن جماله إلا لأولئك الذين لديهم الشجاعة للتعمق فيه)

ومن هذا المنطق وبعد معرفة قيمة العلم الذي نسعى لدراسة أسسه لابد اولاً وقبل كل شيء ان نَعرف ماهو المراد بالرياضيات،

الرياضيات بناء فكري منتظم يشد بعضه بعضاً متناسق أساسه فكرة المجموعة وحجر البناء فيه مفهوم البنية .

عليه وبعد تعريف الرياضيات نحاول في هذه المحاضرات ان نتعرف على أسس الرياضيات لنستطيع بعد ذلك انشاء الله ان نبني هذا البناء العظيم في اذهاننا لكي يساعدنا في حل الكثير من المشاكل العلمية التي تواجهنا والتي قد يكون لحلها دخل في تطور المجتمع.

محاضرات أسس الرياضيات مقرر ر103

الفصل الأول

المنطق الرياضي

تعريف المنطق الرياضي : هو العلم الذي يدرس اشكال التعليلات الرياضية.

المجموعة :

ان مفهوم المجموعة من المفاهيم الأولية الغير قابلة للتعريف لان أي تعريف لها سوف يستخدم عبارة مرادفة لكلمة المجموعة نعم هنالك طرق للتعبير عن المجموعة

1-***الطريقة الجدولية :*** في هذه الطريقة تستخدم الاقواس المعقوفة للتعبير عن المجموعة فمثلاً مجموعة الاعداد الصحيحة $11,9,6$ يمكن كتابتها بالشكل $\{\, 11,9,6\}$

2- ***طريقة القاعدة*** : في هذه الطريقة يتم تعين خاصية تمتلكها جميع الأشياء في المجموعة ولا تمتلكها سواها . سنستخدم الرمز $P_{(x)}$ للأشارة الى جملة متعلقة بالمتغير x فمثلاً $\{5 = x, x$ هو عدد صحيح فردي$\}$.

مجموعة جميع الأشياء xالتي تحقق $p_{(x)}$ يرمز لها بالرمز $\{x \mid p_{(x)}\}$ وعلية فأن المجموعة $\{2,3,4,5\}$ممكن تسميتها

$\{x \mid 2 \leq x \leq 5$ عدد صحيح $x\}$

المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر ويرمز لها بالرمز$\emptyset$.

الانتماء :

تستخدم الحروف الكبيرة للدلالة على المجموعات وتستخدم الحروف الصغيرة للدلالة على العناصر فمثلا التعبير$a \in A$ تعني a يكون عنصراً في المجموعة A

والتعبير $b \notin A$ يعني b ليس عنصراً في المجموعة A

مثلاً $-2 \notin \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ وهكذا..................

الاحتواء : اذا كانت A,B مجموعتين يقال ان $A \subseteq B$ وتقرأ A جزئية من B اذا كان كل عنصر في A موجود في B مثلاً $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

المساواة: اذا كانت A,B مجموعتين يقال ان $A=B$ أذا كان $A \subseteq B$ و$B \subseteq A$.

الاحتواء الفعلي: التعبير $A \subset B$ يعني ان A مجموعة جزئية من B لكن A لا يمكن ان تساوي B ولذلك يقال A محتواة فعلياً في B مثلاً $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي جميع المجموعات قيد البحث مثلاً اذا كانت $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

و $A=\{6,7\}$ و $B=\{1\}$ و $C=\{3,4,5\}$

فأن المجموعه U تسمى مجموعة شاملة.

العبارة : هي جملة خبرية مفيدة وتكون أما صادقة او كاذبة ولايجوز ان تكون صادقة وكاذبة في آنٍ واحد ،مثلاً اذا كانت p عبارة صادقة فلا يمكن ان يقال آن p عبارة كاذبة.

ملاحظة:(1) اذا كانت p عبارة صادقة فأن $\sim P$ وتقرأ نفي p عباره كاذبة

p	$\sim p$
T	F
F	T

(2)العبارة $\sim(\sim p)$ هي العبارة p

العبارات المركبة :

العبارة المركبة هي المكونة من اكثر من عبارة تربط بينهما إحدى أدوات الربط وهي :

1. أداة الوصل ويرمز لها بالرمز $\wedge$ وتعني "و"
ملاحظة : اذا كانت p و q عبارتان فأن العبارة المركبة $p \wedge q$ تكون صادقه في حاله واحدة وهي اذا كانت p و q صادقتين

p	q	$p \wedge q$
T	F	F
F	T	F
T	T	T
F	F	F

2. أداة الفصل ويرمز لها بالرمز $\vee$ وتعني "أو"

ملاحظة : اذا كانت p و q عبارتين فأن العبارة المركبة $p \vee q$ تكون كاذبه في حاله واحدة وهي اذا كانت p و q كاذبتين

p	Q	$p \vee q$
T	T	T
F	T	T

T	F	T
F	F	F

3. الاشتراط : اذا كانت p و q عبارتين فأن العبارة المركبة اذا كان p فأن q يرمز لها بالرمز $p \to q$ حيث تسمى العبارة p بالفرضية وتسمى q بالنتيجة والعبارة المركبة ($p \to q$) تكون كاذبة اذا كان p صادقة و q كاذبة

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

ملاحظة: العبارات الاتية تعطي نفس المعنى

1. $p \to q$
2. p هي شرط كافٍ الى q
3. q شرط ضروري الى p

بعض الأمثلة :

1. اذا كان الطالب مجتهداً فأن النجاح حليفهُ.
2. اذا كان الانسان من المصلين فأنه يتجنب الفحشاء والمنكر.

3. العبارة ثنائية الاشتراط (شرطية ثنائية)

اذا كانت p و q عبارتين فأن العبارة المركبة (p اذا وفقط اذا q) والتي يرمز لها بالرمز $p \leftrightarrow q$ تكون صادقة في حالة كون p و q صادقتين او كاذبتين .

ملاحظات :

1. العبارة $p \leftrightarrow q$ تعني $p \to q \wedge q \longrightarrow p$
2. العبارة $p \leftrightarrow q$ تعني p شرط كافي وضروري الى q و q شرط كاف وضروري الى p

التكافؤ المنطقي : لتكن كل من p و q عبارة يقال أن العبارة p تكافؤ العبارة q اذا وفقط اذا كان جدول صدق العبارة p هو نفسة جدول صدق العبارة q ويرمز للتكافؤ بالرمز $p \cong q$

مثال :لتكن $p: p \to q$

و $q: \sim p \vee q$ فأن $p \cong q$

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ملاحظات

a) لاي عبارة P تكون $p \cong p$

b) $p \leftrightarrow q \cong (p \to q) \wedge (q \to p)$

c) لاية عبارة p : 1. $p \vee p \cong p$

2. $p \wedge p \cong p$

التتولوجي (تحصيل الحاصل)

اذا كانت العبارة صادقة بغض النظر عن قيمة صدق مكوناتها فتسمى تتولوجي (تحصيل حاصل) مثل $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ملاحظة : ان كون $p \vee \sim q$ هو تحصيل حاصل يسمى في بعض الكتب بقانون الوسط المرفوع .

ملاحظة : لتكن كل من p و q عبارة فأن $p \cong q$ اذا وفقط اذا كانت $p \leftrightarrow q$ تحصيل حاصل

قانون القياس : لتكن كل من R و Q و Pعبارة

فإن العبارة $[P \to Q \wedge Q \to P] \to (P \to R)$

هي تتولوجي .

التناقض : اذا كانت العبارة المركبة كاذبة بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها تسمى تناقضاً مثلاً $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge\sim p$
T	F	F
F	T	F

ملاحظة: العبارة Q تكون تناقضاً اذا وفقط اذا كانت Q~ هي تتولوجي

ملاحظة : لتكن p عبارة ما فأن

1. $p \wedge I \cong p$ حيث I هو رمز تحصيل الحاصل
2. $p \wedge O \cong O$ حيث O هو رمز التناقض
3. $p \vee I \cong I$
4. $p \vee O \cong p$

ملاحظات

1. العبارة $q \to p$ تسمى معكوس العبارة $p \to q$ بحيث ان $p \to q \ncong q \to p$
2. العبارة $\sim q \to \sim p$ تسمى معكوس إيجابي للعبارة $p \to q$ حيث ان $p \to q \cong \sim q \to \sim p$

جبر العبارات:

لتكن p عبارة فأن

1. **خاصية التحايد**

a) $p \vee p \cong p$

b) $p \wedge p \cong p$

2. **خاصية التجميع**

a) $(P \vee Q) \vee R \cong P \vee (Q \vee R)$

b) $(P \wedge Q) \wedge R \cong P \wedge (Q \wedge R)$

3. **خواص التبادل**

a) $P \vee Q \cong Q \vee P$

b) $P \wedge Q \cong Q \wedge P$

4. **خواص التوزيع**

a) $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

b) $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

5. **خواص العبارات المحايدة**

a) $P \vee O \cong P$

b)$P \wedge I \cong P$

c)$P \vee I \cong I$

d)$P \wedge O \cong O$

حيث I هو التتولوجي وO هو تناقض .

6)**خواص المتممات**

a)$P \vee \sim p \cong I$

b)$P \wedge \sim P \cong O$

c)$\sim (\sim P) \cong P$

d)$\sim I \cong O \qquad , \sim O \cong I$

7.**قوانين دي موركن**

a)$\sim (p \wedge Q) \cong \sim p \vee \sim Q$

b) $\sim (p \vee Q) \cong \sim p \wedge \sim Q$

تمرين: اثبت صحة قوانين دي موركن باستخدام جدول الصدق ؟

المسورات :

تعريف الجملة المفتوحة : لتكن A مجموعة ما وليكن $p_{(x)}$ تعبير ما في متغير x فأن $p_{(x)}$ يسمى جملة مفتوحة في x معرفة على A اذا وفقط اذا كانت $p_{(x)}$ عبارة صادقة او كاذبة لكل $a \in A$

تعريف المسور الجزئي : لتكن $p_{(x)}$ جملة مفتوحة فيx على المجموعة A العبارة

$(\exists x \in A, p_{(x)}$ صادقه) التي تقرأ (يوجد x ينتمي الى A بحيث $p_{(x)}$ صادقة) تسمى مسور جزئي او عبارة مسورة جزئياً.

الرمز ∃ يقرأ يوجد ويسمى المسور الجزئي .

ملاحظة : ان العبارة ($p_{(x)}$ و $\exists x \in A$) تكون صادقه اذا كانت مجموعة الحل T_p غير خالية أي $T_p \neq \emptyset$

تعريف مجموعة الحل : لتكن $p_{(x)}$ جملة مفتوحة في x معرفه على مجموعة A ولتكن $a \in A$, اذا كانت $p_{(a)}$ عبارة صادقة فيسمى (a) حلاً للجملة المفتوحة $p_{(x)}$ وان مجموعة كل الحلول الى $p_{(x)}$ تسمى مجموعة الحلول للجملة .

ملاحظة : سنستخدم الرمز T_p لمجموعة الحلول الى الجملة $p_{(x)}$

امثلة:

(1) العبارة $(\exists\, n \in N, 3n + 1 > 2)$ عبارة صادقة لان $n = 1$ مثلاً يحقق المتراجحة .

(2) العبارة $(\exists\, x \in \mathbb{Z}\,, x^2 + 1 \geq 3)$ عبارة صادقه لان $x = 2$ تحقق المتراجحة .

تعريف : لتكن $p_{(x)}$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A وان العبارة

(لكل $x \in A$ تكون $p_{(x)}$ صادقة) تسمى عبارة مسورة كلياً وبالرموز تكتب $\forall x \in A\,, p(x)$

الرمز $\forall$ يقرأ لكل ويسمى المسور الكلي .

ملاحظة : العبارة $\forall x \in A, p(x)$

تكون صادقة اذا وفقط اذا كانت $T_p = A$

امثلة :

(1) العبارة $(\forall\, n \in N\,, n > -2)$ عبارة صادقة

(2) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,, x^2 + 1 > 0$ عبارة صادقة

نفي القضايا المحتوية على المسورات :

اذا كانت *A* مجموعة ما و *P(x)* جملة مفتوحة في *x* معرفة على *A* فأن :

1) $\sim[\forall x \in A\,, p(x)] \cong \exists\, x \in A\,, \sim p(x)$

2)$\sim[\exists\, x \in A\,, P(x)] \cong \forall\, x \in A\,, \sim P(x)$

مثال : انفِ العبارة الاتية

$(\exists\, x \in \mathbb{R}\,, \forall\, y \in \mathbb{R}\,, y + x = y)$

الحل /

$\sim(\exists x \in \mathbb{R}\,, \forall\, y \in \mathbb{R}\,, y + x = y)$

$\sim(\exists x \in \mathbb{R})\,, \sim(\forall y \in \mathbb{R}\,, y + x = y)$

$\forall x \in \mathbb{R}\,, \sim(\forall y \in \mathbb{R}\,)\,, \sim(y + x = y)$

$\forall x \in \mathbb{R}\,, \exists y \in \mathbb{R}\,, \sim(y + x = y)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \,, \exists y \in \mathbb{R}\,, y + x \neq y$

التعليل المنطقي :

تعريف : لتكن $S_1, S_2, \dots \dots, S_n$ مجموعة من العبارات ولتكن s عبارة ممكن استنتاجها من $S_1, S_2, \dots \dots, S_n$.

فأن العبارة (S تستنتج من $S_1, S_2, \dots \dots, S_n$) تسمى مجادلة و $S_1, S_2, \dots \dots, S_n$ تسمى المقدمات او الفرضيات و S تسمى النتيجة

وسنرمز للمجادله كما يلي $S_1, S_2, \dots \dots, S_n \vdash S$ ، والمجادله اما ان تكون صائبه او مغالطة (غير صائبة).

ملاحظات :

(1) ان قيمة صدق المجادلة $S_1, S_2, \dots \dots, S_n \vdash S$ لا تعتمد على قيم صدق معينة للعبارات المطروحة في المجادلة .

مثال/

بعض الرياضيون فلاسفة : *S1*

احمد رياضي : *S1*

احمد فيلسوف S النتيجة

على الرغم من صدق العبارة *S1* و *S2* فأن النتيجة S غير صائبه (مغالطة) لانه ليس كل الرياضيين فلاسفة.

2) المجادلة $P1,P2,\dots\dots,Pn \vdash p$ تكون صائبة اذا وفقط اذا كانت العبارة $(p_1 \wedge p_2 \dots\dots \wedge p_n) \rightarrow p$ تتولوجي

البرهان الرياضي :

تعريف :اذا كانت المجادلة $S1,S2,\dots\dots,Sn \vdash S$ صائبة عندئذ تسمى برهاناً.

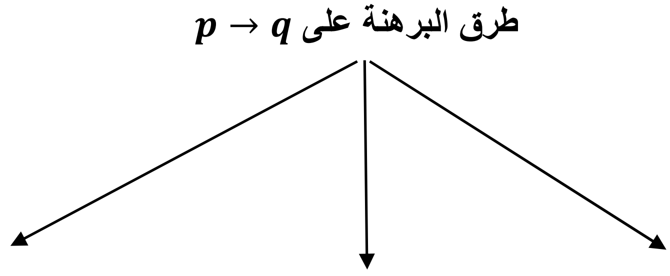
ملاحظة : من أهم الأمور التي يجب على طالب الرياضيات اتقانها هي كيفية البرهان ولذا سوف نبين للطالب كيفية البرهنة على العبارات المركبة ونبدأ :

اولاً: كيفية البرهنة على العبارة المركبة $p \rightarrow q$

ملاحظة : ان العبارة $p \rightarrow q$ هي النتيجة التي نسعى لاثباتها

توجد ثلاثة طرق للبرهنه على العبارة $p \rightarrow q$ وكما سنبينه بالشكل الآتي اجمالاً:

طرق البرهنة على $p \rightarrow q$



الطريقة المباشرة المعاكس الإيجابي التناقض

والآن سوف نشرح الطرق الثلاثة بالتفصيل :

1.الطريقة المباشرة (قاعدة البرهان الاشتراطي)

وتتلخص هذه الطريقة بفرض العبارة p صادقة ومن ثم بأستخدام p مع المبرهنات السابقة او البديهيات نستنتج q.

مثال / برهن على

a عدد زوجي $\longrightarrow$ a^2 هو عدد زوجي

p q

البرهان : نفرض ان a عدد زوجي

المطلوب اثباته : a^2 عدد زوجي

بعبارة أخرى $a^2 = 2(u)$ حيث $u \in \mathbb{Z}$

بما ان a عدد زوجي

$\longleftarrow$ $a = 2k$ حيث k عدد صحيح

بتربيع الطرفين نحصل على $a^2 = 4k^2$

$\longleftarrow$ $a^2 = 2(2k^2)$

بما إن $2k^2 \in \mathbb{Z}$ نفرض $u = 2k^2$

وعليه $a^2 = 2u$ اذاً a^2 عدد زوجي

ملاحظة : في البرهان أعلاه استخدمنا التتولوجي

$$[(p \rightarrow S_1) \wedge (S_1 \rightarrow S_2) \wedge \dots \dots \wedge (S_n \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$$

حيث ان

p: a عدد زوجي

$S_1: a = 2k$

$S_2: a^2 = 4k$

q: a^2 عدد زوجي

2.طريقة المعاكس الإيجابي

من الممكن في هذه الطريقة ان نبرهن عبارة $(p \to q)$ وذلك عن طريق برهان العبارة $\sim q \to \sim p$ بسبب

$$\sim q \to \sim p \cong p \to q$$

مثال / برهن العبارة الاتية

aعدد زوجي $\to$ a^2 عدد زوجي

البرهان : سوف نستخدم طريقة المعاكس الإيجابي

p: عدد زوجيa^2 , q: عدد زوجيa

$\sim p$: عدد فرديa^2 , $\sim q$: عدد فرديa

أي اننا سوف نبرهن العبارة $\sim q \to \sim p$

نفرض a عدد فردي

المطلوب اثباتة : a^2 عدد فردي

بعبارة أخرى $a^2 = 2u + 1$ حيث u عدد صحيح

بما ان a عدد فردي $\longleftarrow$ $a = 2k + 1$

حيث ان kعدد صحيح

نربع الطرفين

$$a^2 = (2k+1)^2$$

$$a^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

بما ان $2k^2 + 2k$ عدد صحيح يمكن ان نفرضه يساوي u

أي $u = 2k^2 + 2k$

وعليه $a^2 = 2u + 1$ $\longleftarrow$ a^2 عدد فردي

3. **البرهان بطريقة التناقض**

في هذه الطريقه لكي نبرهن العبارة اذا كان.....فأن $(p \to q)$

نقوم بنفي العبارة بالكامل أي$\sim(p \to q)$

وبما ان $p \to q \cong \sim p \vee q$

فأن نفي عبارة اذا كان p فأن q يكافئ

$$\sim (p \to q) \cong \sim(\sim p \vee q)$$

$$\sim (p \to q) \cong p \wedge \sim q$$

الغرض من هذا النفي أي $\sim(p \to q)$ الحصول على التناقض ومن خلال تناقض العبارة

$\sim(p \to q)$ نثبت صدق العبارة $(p \to q)$ المراد اثبات صدقها ،لان التناقض يعني ان العبارة كاذبة وعليه اذا كانت العبارة كاذبة فان نفي العبارة عبارة صادقة.

لكن السؤال المهم كيف يمكننا الحصول على التناقض ؟

نحصل على التناقض بأحد طرق ثلاث

الأولى :اذا حصلنا على العبارة q اثناء البرهان فقد حصل التناقض في العبارة $\sim(p \to q)$ بسبب $p \wedge \sim q \wedge q$ وعليه تكون العبارة $(p \to q)$ صادقة.

الثانية : اذا حصلنا على العبارة $\sim p$ اثناء البرهان فقد حصل التناقض في العبارة $\sim(p \to q)$ بسبب $p \wedge \sim q \wedge \sim p$ وعليه تكون العبارة $(p \to q)$ صادقة.

الثالثة : اذا حصل اثناء البرهان تناقض مع حقيقة رياضية فهذا يعني ان ما فرضناه $\sim(p \to q)$ كان عبارة كاذبة وعليه تكون العبارة

$(p \to q)$ صادقة.

مثال/ برهن على $x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0$

$$P: x \neq 0$$

$$Q: x^{-1} \neq 0$$

أي نفرض أن $\sim(P \to Q)$ صادقة

وبما ان $\sim(P \to Q) \cong P \wedge \sim Q$

فأن $P \wedge \sim Q$ صادقة

أي ان $x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$

بما أن $x . x^{-1} = 1$

و $x^{-1} = 0$

فأن $x . x^{-1} = x . 0 = 0$

وعليه نحصل على 1=0 وهذا تناقض لان $1\neq 0$

اذن العبارة $(p \longrightarrow Q) \sim$ كاذبة

وعليه $p \longrightarrow Q$ صادقة (تم البرهان)

برهان الجمل من نوع $P \leftrightarrow Q$

بما ان $P \leftrightarrow Q \cong (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow p)$

توجد ثلاث طرق للبرهنه على $P \leftrightarrow Q$

اولاً: نبرهن $P \longrightarrow Q$ ومن ثم نبرهن $Q \longrightarrow P$

ثانياً: نبرهن $Q \longrightarrow P$ ومن ثم نبرهن $P \longrightarrow Q$

باستخدام المعاكس الإيجابي أي نبرهن $\sim P \longrightarrow \sim Q$

ثالثاً: ننتقل من P الى Q من خلال سلسله من الجمل المتكافئة

$P \leftrightarrow S_1$

$S_1 \leftrightarrow S_2$

$S_2 \leftrightarrow S_3$

$S_3 \leftrightarrow Q$

هذه الطريقة يدعمها التتولوجي التالي

$$[(P \leftrightarrow S_1) \wedge (S_1 \leftrightarrow S_2) \wedge \dots \dots (S_n \leftrightarrow Q)] \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

برهان الجمل من $\forall x, p_{(x)}$

لبرهان الجمل من نوع $\forall x, p(x)$ نفترض ان x يمثل عنصر اختياري (لاعلى التعيين) من المجموعة الشاملة ثم نبرهن على $p_{(x)}$

صادقة وتكون الجملة $\forall\, x, p_{(x)}$ صادقة

برهان جمل من نوع $\exists x, p_{(x)}$

كي ننبرهن على $\exists x, p(x)$ فأننا نبرهن على أنه يوجد عنصر x في المجموعة الشاملة الذي يجعل $p_{(x)}$ صادقة.

مثال/ برهن على ان $\exists f$ (f مستمره $\wedge$ f غير قابلة للاشتقاق)

البرهان/ الدالة $f(x) = |x|$ تكون مستمرة وغير قابله للاشتقاق

برهان جمل من نوع $(P \vee R) \to Q$

بالاعتماد على التتولوجي

$$[(P \to Q) \wedge (R \to Q)] \to [(P \vee R) \to Q]$$

أي يجب ان نبرهن على أن $P \to Q$ و $R \to Q$ وهذا معناه ان Q ممكن استنتاجها من R أو من P.

مثال/ برهن على ان $(a = 0 \vee b = 0) \to ab = 0$

P R Q

البرهان:

الحالة الأولى يجب ان نبرهن أنه $a = 0 \to ab = 0$

P Q

افرض ان a=0

$a.b = 0.b = 0$

الحالة الثانية : يجب ان نبرهن أنه $b = 0 \leftrightarrow ab = 0$

افرض ان b=0

ab=a.0=0

تم برهان

تمارين الفصل الأول

1.اي من الجمل الاتية تمثل عبارة وضح ذلك مع ذكرالسبب

(a) $x < 5$

(b) يوجد عدد طبيعي x بحيث $x < 3$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(d) اذا كان x و y عددين حقيقيين فأن

$$x + y = y + x$$

(h) هذه جمله كاذبة

2. جد قيمة الصدق للعبارات الاتية

(a) (π عدد غير نسبي)~ حيث π هي النسبة الثابتة)

(b) 5 عدد حقيقي↔ $\frac{2}{3}$ عدد طبيعي

(c) باريس عاصمة فرنسا أو $4 = \sqrt{25}$

3. اكتب كلاً من الجمل الاتية بالشكل (اذا كانت p فأن q) وبين المقدمة و التالية (أي الفرضية والنتيجة).

(a) لا يوجد تحليل الى n طالما n عدد اولي

(b) المربع هو مستطيل

(c) العدد الصحيح هو عدد نسبي

4. عبر عما يلي بأستخدام $(\vee, \wedge, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow)$

(a) اذا كان p و q عددين صحيحين و $q \neq 0$ فيكون $\frac{p}{q}$ عدداً نسبياً

(b) اذا كان a^2 عدداً صحيحاً فأن a عدد زوجي او عدد فردي

5. اي العبارات التالية هي تتولوجي وضح ذلك باستخدام جبر العبارات

1- $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

2- $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

3- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

6. بين باستخدام جبر العبارات ان $[(p \rightarrow q) \wedge p] \wedge \sim q$ تناقض

7. بين باستخدام جدول الصدق ان

1- $p \rightarrow (q \wedge r) \cong (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

2- $\sim (p \rightarrow q) \cong p \rightarrow \sim q$

3- $p \rightarrow q \cong \sim p \rightarrow \sim q$

8. وضح بمثال الحقيقة التاليه

$$\exists y \, \forall x \, , p(x, y) \ncong \forall x \, \exists y \, , p(x, y)$$

9. عبر عما يلي بأستخدام الرموز المنطقية

1- يوجد p ويوجد q بحيث $pq = 32$
2- لكل x , اذا كان x عدداً طبيعياً فأن x عدد صحيحاً
3- لكل x ولكل y $\quad y + x = x + y$
4- يوجد x بحيث x عدد اولي و x عدد زوجي
5- كل عدد زوجي ليس فردياً

10. انف العبارات الاتية:

1- $\forall x\ \forall y\ \exists z\ , x + y + z = 18$
2- يوجد y بحيث لكل x , $xy \leq 2$
3- $\exists x\ , [p(x) \to Q(x)]$

11. برهن ان اذا كان a عدداً زوجياً و b عدداً زوجياً فأن $a + b$ عدداً زوجياً

12. برهن على ان $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي

13. $a < b \ \leftrightarrow a + c < b + c$ حيث a, b, c اعداد حقيقية

امثلة/ جبر العبارات / بين أي من العبارات الاتيه هي تحصيل حاصل

(1) $[\, P \wedge (P \to Q)] \to Q$

$\cong \sim [P \wedge (P \to Q)] \vee Q$

$\cong \sim P \vee \sim (P \to Q) \vee Q$

$\cong \sim P \vee \sim (\sim P \vee Q) \vee Q$

$\cong \sim P \vee P \wedge \sim Q \vee Q$

$\cong I \wedge I \cong I$

(2) $(P \to Q) \to (Q \to P)$

$\cong \sim (p \to Q) \vee (Q \to P)$

$\cong \sim (\sim P \vee Q) \vee (\sim Q \vee P)$

$\cong (P \wedge \sim Q) \vee (\sim Q \vee P)$

$\cong (P \vee \sim Q \vee P) \wedge \sim Q \vee \sim Q \vee P$

$\cong (P \vee \sim Q) \wedge (P \vee \sim Q)$

$\cong P \vee \sim Q \ncong I$

ملاحظة : هذه المجموعه من التمارين لاتغني عن التمارين الموجودة في كتاب أسس الرياضيات الجزء الأول .

الفصل الثاني

جبر المجموعات

تعاريف مهمة:

1-**اتحاد المجموعات** :اذا كانت A و B مجموعه فأن اتحاد A مع B يعرف كالآتي

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

2-**تقاطع المجموعات** : اذا كانت A و B مجموعه فأن تقاطع A مع B يعرف كلآتي

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

3-**متمم المجموعة** : لتكن A مجموعة نعرف متمم المجموعه كالآتي

$$A^c = \{x \mid x \in U , x \notin A\}$$

حيث U هي المجموعة الشامله A^c هو متمم المجموعه.

4-**الفرق بين المجموعتين** : اذا كانت A و B مجموعة فأن الفرق بين A و B يعرف كالآتي

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

5-**الفرق التناظري** : لتكن A و B مجموعة فأن اتحاد المجموعتين

$A - B$ و $B - A$ يسمى الفرق التناظري بين A و B أي $A \, \Delta \, B = (A - B) \cup (B - A)$

حيث Δ هو رمز الفرق التناظري

6- **حاصل الضرب الديكارتي**: يعرف حاصل الضرب الديكارتي بين مجموعتين (A و B مثلاً) بالتعريف الآتي

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

7- يقال عن مجموعتين بأنهما منفصلتان اذا كان تقاطعهما مجموعة خاليه

أي A و B مجموعتين منفصلتين $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

مثال/ لتكن A={1,2,3,4,5} أي $A = \{x \in \mathbb{N} , 0 < x < 6\}$

$B = \{3,4,5,6,7\}$ أي $B = \{x \in \mathbb{N} , 2 < x < 8\}$

جد $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \, \Delta \, B$

الحل /

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} , 0 < x < 8\}$$

$$A \cap B = \{3,4,5\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} , 2 < x < 6\}$$

$$A - B = \{1,2\}$$

$$A - B = \{x \in \mathbb{N} , 0 < x < 3\}$$

$$A \, \Delta \, B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \, \Delta \, B = \{x \in \mathbb{N} , 0 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{N} , 5 < x < 8\}$$

$$A \, \Delta \, B = \{x \in \mathbb{N} , 0 < x < 3 \vee 5 < x < 8\}$$

مبرهنات الاتحاد:

لتكن A و B مجموعه فأن

1 − $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$

2 − $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

3 − قانون التحايد $A \cup A = A$

4 − قانون التبادل $A \cup B = B \cup A$

5 − $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

6 − $A \cup \emptyset = A$ و $A \cup U = U$ حيث U هي المجموعة الشاملة.

7 − $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

حيث ان $n(A)$ يمثل عدد عناصر المجموعه A

ملاحظة : جميع المبرهنات اعلاة مطلوبة بمعنى انها مطلوبة كقوانين ومطلوبة كمبرهنات لذلك سوف نقوم ببرهان واحدة ونترك الباقي على الطالب

سوف نقوم ببرهان مبرهنه (2) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

مبرهنه: اذا كانت A و B مجموعه فأن

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$$

البرهان: لكي نبرهن المبرهنة أعلاه لابد ان نعلم كيف يمكن ان نتعامل مع عبارة **($\longleftrightarrow$)** وعليه سوف نقوم بالاتي

بما ان عبارة

$$A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B \cong (A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B) \wedge$$
$$A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$$

لذلك لابد من برهان العبارتين

$$(A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B) \wedge (A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B)$$

لنبدأ بالعبارة الأولى

$A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$

نفرض $A \subseteq B$

المطلوب اثباته ان $A \cup B = B$

أي انه لابد من اثبات $A \cup B \subseteq B$ و $B \subseteq A \cup B$

لاثبات ان $A \cup B \subseteq B$ و $B \subseteq A \cup B$

نفرض ان $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

المطلوب $x \in B$

الآن بما ان $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

من تعريف الاتحاد $x \in A \vee x \in B$

وبما ان $A \subseteq B$ (مفروض)

وعليه $x \in A \subseteq B \vee x \in B$

$$x \in B \vee x \in B \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow A \cup B \subseteq B$$

هذا اولاً

ثانياً: لابد ان نثبت ان $B \subseteq A \cup B$

نفرض $x \in B$

مطلوب $x \in A \cup B$

بما ان $x \in B$

من تعريف الاتحاد نحصل على ان

$x \in A \cup B$

$\Leftarrow B \subseteq A \cup B$

من اولاً وثانياً نحصل على $A \cup B = B$

اذاً تم برهان العبارة $A \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B$

الآن لابد ان نبرهن ان $A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$

نفرض ان $A \cup B = B$

المطلوب اثباته $A \subseteq B$

نفرض $x \in A$

المطلوب اثباته $x \in B$

بما ان $x \in A$ و $A \subseteq A \cup B$ (من تعريف الاتحاد)

$\Leftarrow x \in A \cup B$

وبما ان $A \cup B = B \Leftarrow x \in B$

$\Leftarrow A \subseteq B$

تم برهان العبارة $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

مبرهنات التقاطع : لتكن كل من من A و B مجموعة فأن

1- $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$

2- $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

3- $A \cap A = A$

4- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ خاصية تجميعيه

5- $A \cap B = B \cap A$ خاصية ابدالية

6- $A \cap \emptyset = \emptyset$ و $\mathrm{A} \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$

قانون توزيع الاتحاد على التقاطع

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

مبرهنات التمام : لتكن كل من A و B مجموعه فأن

$A \subseteq B \longrightarrow B^c \subseteq A^c - 1$

$(A^c)^c - 2$

$A - B = B^c - A^c - 3$

$\emptyset^c = U\ , U^c = \emptyset - 4$

$A \cup A^c = U\ , A \cap A^c = \emptyset - 5$

قانون دي موركن

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

برهان المبرهنة (1) من مبرهنات التمام

$$A \subseteq B \to B^c \subseteq A^c$$

البرهان

نفرض $A \subseteq B$

المطلوب اثباته $B^c \to A^c$

نفرض $x \in B^c$

المطلوب اثباته $x \in A^c$

بما ان $x \notin B \Leftarrow x \in B^c$

وبما ان $B^c \subseteq A^c \Leftarrow x \in A^c \Leftarrow x \notin A \Leftarrow A \subseteq B$

تعريف :لتكن كل من A و B مجموعه فأن $A - B = A \cap B^c$

$$A - B = \{x \mid x \in A\ \wedge x \in B^c\}$$

مبرهنات الفرق التناظري

$A\Delta\emptyset = A - 1$

$A = B \leftrightarrow A\Delta B = \emptyset - 2$

اسرة المجموعات:

تعريف : المجموعة التي كل عنصر فيها هو بحد ذاته مجموعة تسمى اسرة المجموعات او (جملة من المجموعات).

تعريف مجموعة الأجزاء :

لتكن A مجموعة , فأن مجموعة جميع المجموعات الجزئية الى المجموعة A تسمى بمجموعة أجزاء المجموعة A ويرمز لها بالرمز $p(A)$ حيث أن $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$
.

مثال/ لتكن $A = \{1,2,3\}$ فأن $p(A)$ تساوي المجموعه الاتية

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

مبرهنة : لتكن A مجموعة ما , اذا كان $n(A) = m$ فأن

$$n(p_{(x)}) = 2^m \text{ حيث } m \in \mathbb{N}$$

البرهان : سنبرهن على هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي نفرض ان $p_{(m)}$ تمثل العبارة التاليه

$$n(A) = m \to n(p(A)) = 2^m$$

1- لاحظ ان $p_{(0)}$ صادقه

لا نه اذا كان $m = 0$ فأن $n(A) = 0$ وهذا يعني ان المجموعه A لا تحتوي على أي عنصر أي ان $A = \emptyset$ وبما ان $\emptyset$ هي مجموعه جزئيه من أي مجموعه فاننا سوف نحصل على ان المجموعة الجزئيه الوحيده منA هي $\emptyset$ وعليه

$$n(P(A)) = 1$$

أي ان $n(P(A)) = 2^0$

اذاً $n(A) = 0 \to n(P(x)) = 2^0$

أي ان $p(0)$ صادقة

2- $p(1)$ صادقة

اذا كان $m = 1$ فأن $n(A) = 1$

لنفرض ان $A = \{a\}$ ففي هذه الحاله تكون المجموعات الجزئية للمجموعة A هي A و $\emptyset$ وعليه أي ان $n(P(A)) = 2$

$$n(P(x)) = 2^1$$

3-نفرض ان $p(k)$ صادقه أي ان

$$n(A) = K \to n(p(x)) = 2^k$$

الآن نفرض ان $n(A) = k + 1$

المطلوب $n\big(p(x)\big) = 2^{k+1}$

بما ان $n(A) = k + 1$ أي ان A تحتوي على $k + 1$ من العناصر

$A = \{a_1, a_2, \dots \dots \dots a_k, a_{k+1}\}$

نفرض ان $B = \{a_1, a_2, \dots \dots \dots, a_k\}$

واضح ان $B \subseteq A$ وان $n(B) = k$

وحسب فرضية الاستقراء الرياضي ينتج $n\big(P(B)\big) = 2^k$

الآن لتكن W مجموعة جزئية من A اذاً يوجد احتمالان:

الاحتمال الأول المجموعة W لاتحتوي على العنصر a_{k+1} وهذا يعني ان $W \subseteq B$.

الاحتمال الثاني ان المجموعة W تحتوي على العنصر a_{k+1} أي ان

$W = D \cup \{a_{k+1}\}$ حيث $D \subseteq B$ وهذا يعني ان:

$W \subseteq A \longrightarrow W \subseteq B \;\vee\; W = D \cup \{a_{k+1}\}$ حيث $D \subseteq B$

بما ان D هي مجموعه جزئيه من B اذاً مجموعه كل المجاميع الجزئية من B هي المجموعة التي يكون عدد عناصرها 2^k وللتوضيح

بما ان مجموعة كل المجاميع الجزئية من B

عددها حسب فرضية الاستقراء هو 2^k

$D_1 \cup \{a_{k+1}\} = C_1$

$D_2 \cup \{a_{k+1}\} = C_2$

.

.

.

$D_{2^k} \cup \{a_{k+1}\} = C_{2^k}$

حيث ان $D_1, D_2, \dots \dots . D_{2^k}$ هي كل المجاميع الجزئيه من B وعليه فأن عدد المجاميع الناتجه من $D \cup \{a_{k+1}\}$ هو 2^k

$$n\big(P(A)\big) = 2^k + 2^k = 22^k = 2^{k+1}$$

اذاً $p(k+1)$ صادقه وعليه $P(m)$ صادقه لكل $m \in \mathbb{N}$

مبرهنة: لتكن كل من A و B مجموعة فأن:

a) $A \subseteq B \leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$
b) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
c) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

ملاحظة :كل مبرهنه يتم إعطائها في هذه المحاظرات ويوجد لها برهان في كتاب أسس الرياضيات ج1 هذا يعني ان البرهان مطلوب.

عائلة المجموعات المرقمة:

تعريف: لتكن F عائلة مجموعات (اسرة مجموعات) ولتكن I مجموعة ما فأذا كان لكل عنصر $i \in I$ يوجد عنصر وحيد A_i فيF فتسمى المجموعة I بالمجموعة الدالة والعنصر i بالدليل للمجموعة A_i وأن F تسمى عائلة المجموعات المرقمة ويرمز لها بالرمز $\{A_i\}_{i\in I}$.

ملاحظة : اذا كانت المجموعة الدالة I منتهية فنحصل على جملة منتهية من المجموعات اما اذا كانت I غير منتهية فنحصل على جملة غير منتهية من المجموعات.

مثال / ليكن $A_i = (i, \infty)$ و $i \in \mathbb{N}$ فأن $\{A_i\}_{i\in I}$ تكون جملة غير منتهية من المجموعات، اما اذا كان $i \in B$ بحيث ان B={1,2,3} فأن $\{A_i\}_{i\in I}$ تكون جملة منتهية من المجموعات .

تعميم الاتحاد والتقاطع

تعريف : لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ اسرة مجموعات مرقمة فأن اتحاد المجموعات A_i هي مجموعة تتألف من جميع العناصر التي تنتمي على الأقل الى احدى المجموعات A_i من اسرة المجموعات ويرمز لها بالرموز $\bigcup_{i\in I} A_i$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists\, j \in I \ni x \in A_i\}$$

مبرهنة : لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جمله من مجموعات مرقمة ما

(1) اذا كان $A_i \subseteq B\ , \forall i \in I$ فأن $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$
(2) اذا كان $B \subseteq A_i\ \forall\, i \in I$ فأن $B \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

ملاحظة: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I \ \ni x \in A_i\}$

سوف نبرهن النقطه (1)

نفرض ان $A_i \subseteq B\ \forall\, i \in I$

المطلوب اثباته $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$

نفرض ان $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

المطلوب اثباته $x \in B$

من الفرض $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$

$\exists\, j \in I \ni x \in A_j \leftarrow$

وبما ان $A_j \subseteq B$

$x \in B \leftarrow$

أي ان $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$

مبرهنه (تعميم قانون دي موركن)

لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جملة مجموعات مرقمة فأن

$$1)\ \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$$

$$2)\ \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} {A_i}^c$$

برهان (1) لكي نثبت ان $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$

لابد من اثبات مايلي اولاً $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$

وثانياً $\bigcap_{i\in I} {A_i}^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$

الآن لاثبات $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$

نفرض ان $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$

$x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \leftarrow$

$x \notin A_i \quad \forall\ i \in I \ \leftarrow$

$x \in {A_i}^c\ \forall\, i \in I \ \leftarrow$

$x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}^c \leftarrow$

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} {A_i}^c \ \leftarrow$

ثانياً لاثبات ان $\bigcap_{i\in I} {A_i}^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$

نفرض ان $x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$

$x \in {A_i}^c\ \forall\ i \in I \ \leftarrow$

$$x \notin A_i \ \forall\, i \in I \ \leftarrow$$

$$x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \,\forall\, i \in I \leftarrow$$

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \quad \leftarrow$$

$$\bigcap_{i\in I} {A_i}^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \ \leftarrow$$

من اولاً وثانياً نحصل على

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$$

مبرهنة (تعميم قانون التوزيع)

لتكن كل من $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$

اسرة مجموعات مرقمه فأن

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in i\times j}\left(A_i \cap B_j\right) \qquad (1)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}\left(A_i \cup B_j\right) \qquad (2)$$

الفصل الثالث

العلاقات

تعريف: لكل a, b تسمى المجموعة $\{a, \{a, b\}\}$ بالزوج المرتب a, b ويرمز له بالرمز (a, b) حيث يسمى a بالمسقط الأول و b بالمسقط الثاني.

ملاحظات

(1) $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$

(2) المجموعة المتكونة من ثلاثة عناصر مرتبة تسمى بالثلاثي المرتب فأذا فرضنا ان المجموعة تحتوي على العناصر a, b, c فيرمز لها بالرمز (a, b, c) وتعرف كالآتي

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

(3) اذا كانت المجموعه تحتوي على n من العناصر المرتبة $a_1, a_2, \dots \dots . . a_n$ فأننا إنحصل على النوني المرتب والذي يرمز له بالرمز $(a_1, a_2, \dots . . a_n)$ ويعرف كالأتي

$$(a_1, a_2, \dots . . a_n) = ((a_1, a_2, \dots \dots a_{n-1}), a_n)$$

الضرب الديكارتي (الكارتيزي) : لتكن كل من A و B مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B يعرف بالشكل

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

تمرين : هل ان $A \times B = B \times A$ اذا كان الجواب بنعم برهن ذلك واذا كان الجواب (لا) اعطي مثال ؟

ملاحظات

1- اذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر وان المجموعة B تحتوي على n من العناصر فأن المجموعة $A \times B$ تحتوي على mn من العناصر.

2- اذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعه غير المنتهية فأن المجموعة $A \times B$ ايضاً تكون غير منتهية.

3- اذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعه خالية فأن المجموعة $A \times B$ تكون مجموعة خالية.

مبرهنة: لتكن كل من A,B مجموعة غير خالية فأن

$$A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$$

البرهان : *H.W*

مبرهنة: اذا كانت كل من A, B, C, D مجموعة فأن

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times B)$

c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

برهان (*a*) المطلوب

$A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

و $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

نفرض $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

المطلوب اثباته $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

بما ان $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\longrightarrow \quad x \in A \wedge y \in B \cap C$

$\longrightarrow \quad x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$

$\longrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\longrightarrow \quad (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times B$

$\longrightarrow \quad (x, y) \in A \times B \cap A \times C$

$\longrightarrow \quad A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C) \ldots\ldots..(1)$

نفرض $(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\longrightarrow \quad (a, b) \in (A \times B) \wedge (a, b) \in (A \times C)$

$\longrightarrow \quad a \in A \wedge b \in B \wedge a \in A \wedge b \in C$

$\longrightarrow \quad a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C)$

$\longrightarrow \quad a \in A \wedge \big(b \in (B \cap C)\big)$

$\longrightarrow (a,b) \in A \times (B \cap C)$

$\longrightarrow \quad (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C) \ldots\ldots.(2)$

من (1) و (2) $\quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ملاحظة: *(b)* و*(c)* *H.W*

تعميم حاصل الضرب الديكارتي:

لتكن كل من $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ مجموعة فأن حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ يعرف بالشكل الآتي

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) : a_i \in A_i \ \ 1 \le i \le n\}$$

تعريف : لتكن كل من A و B مجموعة فأن أي مجموعة جزئية من $(A \times B)$ تسمى علاقه.

ملاحظات:

(1) اذا كانت R علاقه من المجموعة A الى المجموعة B فأن $R \subseteq A \times B$

(2) اذا كان (x,y) عنصراً في R فاننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز xRy ويقرأ x يرتبط مع y بالعلاقة R. واذا لم يكن (x,y) عنصراً في R أي ان $(x,y) \notin R$ فيكتب بالصورة $x\not R y$ ويقرأ x لا يرتبط مع y بالعلاقه R.

مثال/ اذا كانت $A = \{1,5\}\, , B = \{2,4,6\}$

و R علاقه من A الى B معرفة بالشكل الاتي

$R = \{(x,y) \mid x < y\}$ جد R ؟

الحل/

$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$

$R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (5,6)\}$

بعض العلاقات الخاصة

العلاقة الذاتية : لتكن A مجموعة ما تسمى المجموعة التي عناصرها جميع الأزواج المرتبة (x,y) في $A \times A$ حيث $x = y$ بـ العلاقة الذاتيه على A ويرمز لها بالرمز I_A أي ان

$$I_A = \{(x,y) \mid x \in A\, , y \in A \ \ni x = y\}$$

مثال/ اذا كانت A مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ فأن

$$I_{\mathbb{N}} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$$

$$= \{(0,0),(1,1),\ldots\ldots\ldots\}$$

عكس العلاقة : لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B تسمى العلاقة من B الى A والمعرفة بالشكل الآتي

$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ بعكس العلاقة .

يلاحظ ان $R^{-1} \subseteq B \times A$

ملاحظة : $(x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$

مبرهنة: لتكن R علاقة على A فأن

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

البرهان : $H.W$

مثال / لتكن T علاقة معرفة على المجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كالاتي

$$T = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

$$T^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

المنطلق والمدى للعلاقة :

تعريف : لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B

1) تسمى مجموعة العناصر الاولى من الأزواج المرتبة في R (منطلق العلاقة R) ويرمز لها $dom\ R$ أي ان

$$dom\ R = \{\, x \mid \exists\, y \in B \ \ni (x, y) \in R\}$$

2) تسمى مجموعة العناصر الثانية من الأزواج المرتبة (x,y) في R (مدى العلاقه R) ويرمز لها $ran\ R$ أي ان

$$ran\ R = \{y \mid \exists\, x \in A \ \ni (x, y) \in R\}$$

واضح من التعريف ان $dom\ R \subseteq A$

$ran\ R \subseteq B$

مبرهنة: اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعه B فأن

a) $dom\ R = ran\ R^{-1}$

b) $ran\ R = dom\ R^{-1}$

البرهان / $H.W$

قصر العلاقة:

تعريف: لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B ,
ولتكن $D \subseteq B$, $C \subseteq A$ فأن المجموعة $R \cap (C \times D)$
تسمى بقصر العلاقة R من C الى D.

ملاحظة :

1) اذا كانت $A = B$, $C = D$ فأن R تكون علاقه على A .
2) ان $R \cap (C \times C)$ تسمى بقصر العلاقة R على C ونرمز لها R/C

مثال / لتكن $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ عدد زوجي}\}$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ عدد فردي}\}$$

ولتكن $C = \{2,4,6\}$, $D = \{1,3,5\}$

فاذا كانت R علاقة من A الى B معرفه كالآتي

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ تقبل القسمة على } y\}$$

فأن قصر العلاقة R من C الى D هي المجموعة

$$R \cap (C \times D) = \{(2,1), (4,1), (6,1), (6,3)\}$$

تركيب العلاقات

تعريف : اذا كانت R علاقة من X الى Y و S علاقة من Y الى Z فأن SoR (تركيب العلاقة R مع S) تعرف كما يلي

$$SoR = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists\, y \in Y \ \ni (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

مبرهنة : لتكن R علاقة على المجموعة A , فأن

$$I_A oR = RoI_A = R$$

مبرهنة : لتكن R , S , T علاقات على المجموعة A

a) $(ToS)oR = To(SoR)$

$(S \cup T)oR = (SoR) \cup (ToR)$ (b

$(S \cap T)oR \subseteq (SoR) \cap (ToR)$ (c

$R \subseteq S \rightarrow (ToR) \subseteq (ToS)$(d

$R \subseteq S \rightarrow (RoT) \subseteq (SoT)$ (e

$(SoR)^{-1} = R^{-1}o\, S^{-1}$ (f

$(SoR) \cap T = \emptyset \leftrightarrow (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset$ (h

المبرهنات من a الى H.W f

سوف نقوم ببرهان (h)

$$(SoR) \cap T = \emptyset \leftrightarrow (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset$$
$$(SoR) \cap T = \emptyset \rightarrow (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset$$
$$\wedge (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset \rightarrow (SoR) \cap T = \emptyset \quad (H.W)$$

البرهان :

$$(SoR) \cap T = \emptyset \rightarrow (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset$$

سوف نستخدم طريقه التناقض

اي $(SoR) \cap T = \emptyset \wedge (ToR^{-1}) \neq \emptyset$

بما ان $\exists (a,b) \in (ToR^{-1}) \cap S \leftarrow (ToR^{-1}) \cap S \neq \emptyset$

حيث ان $(a,b) \in ToR^{-1} \wedge (a,b) \in S \leftarrow a,b \in A$

$$\exists\, c \in A \ni (c,b) \in T \wedge (a,c) \in R^{-1} \wedge (a,b) \in S$$
$$(c,b) \in T \wedge (c,a) \in R \wedge (a,b) \in S \leftarrow$$
$$(c,b) \in T \wedge (c,b) \in (SoR) \leftarrow$$
$$(c,b) \in (SoR) \cap T \leftarrow$$

وهذا تناقض $(SoR) \cap \neq \emptyset$

اذاً $(SoR) \cap T = \emptyset \rightarrow (ToR^{-1}) \cap S = \emptyset$

ملاحظة الاتجاه الثاني H.W

أنواع العلاقات:

العلاقة الانعكاسية : لتكن R علاقه على المجموعة A فتسمى R علاقة انعكاسية اذا كان

$$\forall\, x \in A\, , (x,x) \in R$$

ملاحظة : اذا كانت R علاقة انعكاسية على المجموعه A فأن العلاقة الذاتية I_A تكون المجموعة جزئية من R $\quad I_A \subseteq R$

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الطبيعية$\mathbb{N}$ ولتكن كل من R_1, R_2

علاقه على A معرفه كالآتي

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$$

الحل/ العلاقة R_1 ليست انعكاسية لانه لايوجد أي عدد طبيعي يكون اقل من نفسه أي ان

$$\forall\, x \in \mathbb{N}\,, x \nless x$$

أما العلاقة R_2 فتكون علاقة انعكاسيه لان $\forall\, x \in \mathbb{N}\,, x \leq x$

العلاقة المتناظرة : لتكن R علاقه على المجموعة A فتسمى R علاقه متناظرة اذا كان

$$\forall\, x,y \in A\,, (x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R$$

مبرهنة : لتكن R علاقة على مجموعة A فأن R علاقة متناظرة على A اذا وفقط اذا كان

$$R = R^{-1}$$

البرهان : *H.W*

مثال/ لتكن R_1, R_2 علاقة معرفة على $A = N - \{0\}$

$$R_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid x \text{ يقبل القسمة على } y\,\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid x + y = 10\,\}$$

الحل/ العلاقه R_1 غير متناظرة وذلك لانه لو فرضنا ان

$$x = 3, y = 6$$

فأن$(3,6) \in R_1$ بينما $(6,3) \notin R_1$

اما العلاقة R_2فأنها علاقة متناظرة لانه اذا كان

$$x + y = 10$$

$$y + x = 10$$

اي انه اذا كان $(x,y) \in R_2$

فأن $(y,x) \in R_2$

العلاقة المتعدية : لتكن R علاقة على مجموعه A , فتسمى R علاقة متعدية اذا كان

$$\forall\, x,y,z \in A, \big((x,y)\in R \wedge (y,z)\in R\big) \longrightarrow (x,z)\in R$$

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ولتكن R علاقة معرفة على A كالآتي

$$R = \{(x,y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x+2y = 10\}$$

الحل / ليست علاقة متعدية لانة اذا فرضنا ان

$$x = 2\,, y = 4\,, z = 3$$

فأن $2+2(4) = 10$ و $4+2(3) = 10$

لكن $2+2(3) \neq 10$

العلاقة ضد متناظرة :

لتكن R علاقة على المجموعة A تسمى علاقه ضد متناظرة اذا كان

$$(x,y)\in R \wedge (y,x)\in R \longrightarrow x = y$$

ملاحظة : العبارة (العلاقة R ليست علاقة متناظرة) لاتعني ان R علاقة ضد متناظرة.

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الطبيعية N ولتكن T علاقة معرفة على N كالآتي

$$T = \{(x,y)\in N\times N \mid x \le y\}$$

فأن T علاقة ضد متناظرة على N لان

$$x \le y \wedge y \le x \to x = y$$

مبرهنة : لتكن R علاقة على المجموعة A فأن R علاقة ضد متناظرة اذا وفقط اذا كان

$$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$$

البرهان : H.W

<u>علاقات التكافؤ والتجزئة</u>

تعريف: لتكن R علاقة على المجموعة A فأن R تسمى علاقة تكافؤ اذا كانت

a) انعكاسية b) علاقة متناظرة c) علاقة متعدية

مثال/لتكن كل من R_1 , R_2 علاقة معرفة على $\mathbb{R}$كالآتي

$$R_1 = \{\, (x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = y \,\}$$
$$R_2 = \{\, (x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x < y \,\}$$

R_1 علاقة تكافؤ , R_2 ليست علاقة تكافؤ لان R_2 ليست علاقة انعكاسية.

مبرهنة : اذا كانت كل من T و S علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن $S \cap T$ تكافؤ على A

البرهان : نفرض ان T و S علاقة تكافؤ على المجموعة A.

المطلوب اثباته: $S \cap T$ علاقة تكافؤ على A

أي ان $S \cap T$ علاقه انعكاسيه ومتناظرة ومتعديه على المجموعه A

(1) نفرض $x \in A$, المطلوب اثباته $(x,x) \in S \cap T$

بما ان $S\,,T$ علاقة انعكاسية أي ان

$\forall\, x \in A\,, (x,x) \in S \ \wedge (x,x) \in T$

اي ان $(x,x) \in S \cap T$

$\longleftarrow$ $S \cap T$ علاقة انعكاسية

(2) نفرض ان $(x,y) \in S \cap T$

المطلوب $(y,x) \in S \cap T$

بما ان $(x,y) \in S \cap T$

$\longleftarrow$ $(x,y) \in S \ \wedge (x,y) \in T$

بما ان $S\,,T$ علاقة متناظرة

$\longleftarrow$ $(y,x) \in S \wedge (y,x) \in T$

$\longleftarrow$ $(y,x) \in S \cap T$

$\longleftarrow$ $S \cap T$ علاقة متناظرة

(3) نفرض ان $(x,y) \in S \cap T \wedge (y,x) \in S \cap T$

المطلوب اثباته $(x,z) \in S \cap T$

$\longleftarrow$ $(x,y) \in S \wedge (x,y) \in T \ \wedge (y,z) \in S \wedge (y,z) \in T$

بما ان $S\,,T$ علاقه متعدية

$\longleftarrow$ $(x,z) \in S \wedge (x,z) \in T$

$\longleftarrow$ $(x,z) \in S \cap T$

$\longleftarrow$ $S \cap T$ علاقة متعدية

من (1) و (2) و (3)

$S \cap T$ علاقة تكافؤ

مبرهنة : اذا كانت R علاقه تكافؤ على مجموعة A فأن

$RoR = R$

البرهان :H.W

صفوف التكافؤ:

تعريف : لتكن R علاقة تكافؤ على أي مجموعة غير خالية A وليكن a عنصراً ما في A تسمى المجوعة التي عناصرها جميع العناصر في A والتي ترتبط مع العنصر a بالعلاقة R بـ (صف التكافؤ المحتوي a) ويرمز لها بالرمز $[a]$ او A_a

أي أن $A_a = [a] = \{x \in A \mid (x,a) \in R\}$

مثال/ لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ وان R علاقة معرفة على A كالآتي

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$$

الحل/ يمكن بسهولة اثبات ان R علاقة تكافؤ واما صفوف التكافؤ فهي

$$[1] = \{x \in A \mid (x,1) \in R\} = \{1,3\}$$
$$[2] = \{x \in A \mid (x,2) \in R\} = \{2\}$$
$$[3] = \{x \in A \mid (x,3) \in R\} = \{3,1\}$$
$$[4] = \{x \in A \mid (x,4) \in R\} = \{4\}$$

نلاحظ ان $[1] = [3]$

وعليه فأن صفوف التكافؤ هي $[4]$, $[2]$, $[1]$

<u>**خواص صفوف التكافؤ**</u>

مبرهنة : لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A وليكن a,b أي عنصرين في المجموعة A فأن

1) $a \in [a]$
2) اذا كان $b \in [a]$ فأن $[a] = [b]$
3) $(a,b) \in R \leftrightarrow [a] = [b]$
4) $[a] \cap [b] \neq \emptyset \longrightarrow [a] = [b]$

برهان /(2) نفرض ان $b \in [a]$

المطلوب اثباته $[a] = [b]$

اي ان $[a] \subseteq [b]$

و $[b] \subseteq [a]$

(1) نفرض $x \in [a]$ المطلوب اثباته $x \in [b]$

$\longrightarrow (x,a) \in R$

بما ان $b \in [a] \longrightarrow (b,a) \in R$

بما ان R علاقة متناظرة $\longleftarrow (a,b) \in R$

بما ان R علاقة متعدية $\longleftarrow (x,b) \in R$

$\longleftarrow x \in [b] \longleftarrow [a] \subseteq [b]$

(2) نفرض $y \in [b]$ المطلوب اثباته $y \in [a]$

$\leftarrow (y,b) \in R$

بما ان $b \in [a] \leftarrow (b,a) \in R$

بما ان R متعدية اذاً $(y,a) \in R$

$\leftarrow y \in [a]$

$\leftarrow [b] \subseteq [a]$

وعليه من (1) و (2) $[a] = [b]$

بقية الخواص واجب.

التجزئة

تعريف: لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جملة من المجموعات الجزئية الغير خالية من المجموعه A فأن $\{A_i\}_{i\in I}$ تسمى تجزئة للمجموعه A اذا حققت الشروط التالية

$$(1)\ \forall\, i,j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \vee \ \ A_i = A_j$$
$$(2)\ A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الصحيحة

وان X مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية

و Y مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية

فنلاحظ ان كلا من X وy مجموعه جزئية غير خالية من المجموعة A وان

$$X \cap Y = \emptyset \quad \wedge \quad X \cup Y = A$$

وعليه فالمجموعة { X ,Y } تجزئة للمجموعة A

مبرهنة : لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A ولتكن $\{[a]\}_{a\in A}$ جملة جميع صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R فان $\{[a]\}_{a\in A}$ تجزئة للمجموعة A.

البرهان : نفرض ان R علاقة تكافؤ على المجموعة A بحيث $A \neq \emptyset$
و $\{[a]\}_{a\in A}$تمثل أسرة صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقه R المرقمة.

المطلوب اثباتة: $\{[a]\}_{a\in A}$ تجزئة للمجموعة A.

بعبارة أخرى لابد ان نحقق الشرطين بعد اثبات ان $\{[a]\}_{a\in A}$ مجموعه جزئيه غير خالية

1) $\forall\, a,b \in A\,, A_a \cap A_b = \emptyset \;\vee A_a = A_b$

2) $A = \bigcup_{a\in A} A_a$

واضح ان $[a] \subseteq A \quad \forall\, a \in A\,,$

وبما ان R علاقة انعكاسية

اذاً $(a,a) \in R$

من المبرهنه سابقة *(لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعه غير خالية A وليكن a,b أي عنصرين في A فأن $[a]$ $a \in$)

$a \in [a] \leftarrow [a] \neq \emptyset$ لكل $a \in A$

الآن لاثبات الشرط الأول نفرض ان

$$\exists\, a,b \;\in A \;\ni [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

من مبرهنه سابقة [لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة غير خالية A وليكن a,b أي عنصرين في A فأن

$[\,[a] \cap [b] \neq \emptyset \to [a] = [b]$

وبهذا نستنتج بانه لكل $a,b \;\in A$ أما $[a] \cap [b] = \emptyset$

$\vee\, [a] = [b]$

الشرط الثاني أي لابد ان نثبت ان $A = \bigcup_{a\in A} A_a$

ملاحظة: $A_a = [a]$

أي انه لابد من اثبات

1) $A \subseteq \bigcup_{a\in A} A_a$

و

2) $\bigcup_{a\in A} A_a \subseteq A$

(1) نفرض ان $x \in A$

من المبرهنه سابقة * نحصل على ان $x \in A_x\; A \subseteq \bigcup_{a\in A} A_a \longleftarrow x \in \bigcup_{a\in A} A_a \longleftarrow$

(2) للبرهان على ان $\bigcup_{a\in A} A_a \subseteq A$

نلاحظ ان $A_a \subseteq A \quad \forall a \in A$

من المبرهنة سابقة (لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جملة من المجموعات مرقمة ما فأنه اذا كان

$\forall\, i \in I \quad A_i \subseteq B$ فأن $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$)

نحصل على ان $\bigcup_{a\in A} A_a \subseteq A$

من (1) و(2) نحصل على $\bigcup_{a\in A} A_a = A$

مبرهنة : اذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت $\{A_i\}_{i\in I}$ تجزئة للمجموعه A فانه يوجد علاقة تكافؤ على A بحيث ان صفوف التكافؤ بالنسبة الى هذه العلاقه هي $\{A_i\}_{i\in I}$ نفسها.

البرهان : H.W

مجموعة القسمة :

تعريف : لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A فأن مجموعة جميع صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R تسمى مجموعة القسمة.

مثال/ لتكن A هي مجموعة طلبة كلية العلوم وR علاقة معرفة على A كما يلي

$$R = \{(x,y) \in A \times A \mid \text{الطالب } (x) \text{ والطالب } (y) \text{ ينتميان الى نفس القسم}\}$$

العلاقة R هي علاقة تكافؤ على المجموعة A لانه

1) R انعكاسية لانه كل طالب ينتمي الى كلية العلوم فأن الطالب ونفسه ينتميان الى القسم نفسه
$$\forall\, x \in A\,, (x,x) \in A$$
2) R متناظرة لانه اذا كان الطالب (x) والطالب (y) ينتميان القسم نفسه فأن الطالب (y) والطالب (x) ينتميان الى القسم نفسه.
$$\forall\, x,y \ \in A\,, (x,y) \in R \to (y,x) \in R$$
3) R متعدية لانه اذا كان الطالب (x) والطالب (y) ينتميان الى القسم نفسه والطالب *(y)* والطالب *(z)* ينتميان الى القسم نفسه فأن الطالب *(x)* والطالب *(z)* ينتميان الى القسم نفسه.
$$\forall\, x,y,z\,, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \to (x,z) \in R$$

بسبب العلاقة R (علاقة التكافؤ) سوف تتجزأ المجموعة A الى مجاميع هذه المجاميع هي مجاميع جزئيه غير خالية من A اتحادها يعطي المجموعه A وتقاطعها يساوي المجموعة الخالية وتسمى كل واحدة منها بصف التكافؤ وفي مثالنا سوف تتجزأ مجموعة كل طلبة كلية العلوم الى مجاميع صغيرة هي اقسام كلية العلوم (الرياضيات و الفيزياء و الكيمياء وعلوم الحياة وعلم الارض و علم البيئة)

أي أن

A/R = { الرياضيات , الفيزياء , الكيمياء , علم الحياة , علم الأرض , علم البيئة *}*

فقسم الرياضيات مثلاً في المجموعة A/R يمثل عنصر اما في المجموعة A فهو مجموعة جزئيه , ويسمى بصف التكافؤ.

ملاحظة: مضمون المثال هو من إفادات استاذنا الدكتور رعد صالح .

علاقات الترتيب

علاقات الترتيب الجزئي

تعريف : لتكن R علاقة على المجموعة A فأن R تسمى علاقة ترتيب جزئي على A اذا كانت

1) R علاقة انعكاسية 2) R علاقة ضد متناظرة 3) R علاقة متعدية

تعريف : لتكن R علاقة على المجموعة R , A تسمى عملية ترتيب حدي اذا كانت

(1) R غير انعكاسية (2) R ضد متناظرة (3) R متعدية

مبرهنة: اذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A فتكون R^{-1} علاقة ترتيب جزئي على A.

البرهان H.W

مبرهنة: لتكن R علاقة على مجموعة غير خالية A فأن R علاقة ترتيب جزئي على A اذا و فقط اذا كان

$$R \cap R^{-1} = I_A \qquad \wedge \qquad RoR = R$$

البرهان: نفرض

$$R \cap R^{-1} = I_A \qquad \wedge \qquad RoR = R$$

المطلوب اثباتة : R علاقة ترتيب جزئي

اولاً: من تعريف العلاقة الذاتية يكون

$\forall\, x \in A\,, (x,x) \in I_A$

$\leftarrow$ $\forall\, x \in A\,, (x,x) \in R \cap R^{-1}$

اي أنة $\forall\, x \in A\,, (x,x) \in R$

$\leftarrow$ R علاقة انعكاسية

ثانياً نفرض ان $(a,b) \in R \;\wedge (b,a) \in R$

المطلوب اثباتة: $a = b$

بما ان $(a,b) \in R$ (بالفرض)

من تعريف R^{-1} $\leftarrow$ $(b,a) \in R^{-1}$

وبما ان $(b,a) \in R$ بالفرض $\leftarrow$ $(b,a) \in R \cap R^{-1}$

$\leftarrow$ $(b,a) \in I_A$ $\leftarrow$ $a = b$

ثالثاً: نفرض ان $(a,b) \in R \;\wedge (b,c) \in R$

المطلوب ان $(a,c) \in R$

بما ان $RoR = R$

$\leftarrow$ $(a,b) \in RoR \;\wedge (b,c) \in RoR$

ومن تعريف تركيب العلاقات نستنتج مايلي

$\exists\, x \in A \;\ni (a,x) \in R \wedge (x,b) \in R$
$\exists\, y \in A \ni (b,y) \in R \;\wedge (y,c) \in R$
$(x,b) \in R \wedge (b,y) \in R \rightarrow (a,y) \in RoR$
$\rightarrow (a,y) \in R$
$(a,y) \in R \wedge (y,c) \in R \rightarrow (a,c) \in RoR$
$\rightarrow (a,c) \in R$

من اولاً وثانياً وثالثاً نحصل على ان R علاقة ترتيب جزئي (الاتجاه المعاكس $H.W$)

تعريف: لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن R علاقة على المجموعة A فأن الثنائي (A,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئياً اذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على A.

مثال/ مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ تكون مرتبة جزئياً بالعلاقه $(\leq)$ اقل او يساوي بمعنى انه اذا كانت R علاقة معرفة على $\mathbb{Z}$ بالشكل الآتي

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$$

فأن R انعكاسية , ضد متناظرة , متعديه

وبالتالي R تكون علاقه ترتيب جزئي

وعليه $(\mathbb{Z}\,,\mathrm{R})$ مجموعة مرتبة جزئياً

تعاريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً بالعلاقة R.

1) يسمى العنصر b في المجموعة A بأصغر عنصر بالنسبة للعلاقة R اذا وفقط اذا كان
$b\; R\; a \quad \forall\, x \in A$
2) يسمى العنصر a في المجموعة A بالعنصر الأكبر في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا وفقط اذا كان
$$x\; R\; a \quad \forall\, x \in A$$
3) يسمى العنصر m في المجموعة A بعنصر اعظمي في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $\quad m\; R\; x \;\; \wedge \;\; m \neq x$
4) يسمى العنصر n في المجموعة A عنصراً اصغرياً في المجموعة بالنسبة للعلاقة R اذا كان لايوجد عنصر x في A بحيث
$$x\; R\; n \quad \wedge \quad x \neq n$$

ملاحظات

1- اصغر عنصر في المجموعة هو عنصراً اصغري ولكن العكس غير الصحيح.
2- كل مجموعة منتهية مرتبة جزئياً تمتلك على الأقل عنصراً اعظمي وعلى الأقل عنصراً اصغري.

-3 اذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على مجموعة A فأن في المجموعة (A, R^{-1}) يكون $x \geq y$ اذا وفقط اذا كان في المجموعة (A, R) $x \leq y$ وعليه فأن

$a \in A$ يكون عنصراً اعظمياً في (A, R) اذا وفقط اذا كان a عنصراً اصغرياً في (A, R^{-1}) وبالعكس يكون a اكبر عنصر في (A, R^{-1}) اذا وفقط اذا كان a عنصراً اصغرياً في (A, R)

مثال/ لتكن $A = \{3,6,9,12,15\}$ ولتكن كل من R_1, R_2 علاقة معرفة على A كالآتي

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \geq y\}R$$

جد اصغر عنصر واكبر عنصر (العنصر الأكبر) والعنصر الاعظمي والعنصر الاصغري للمجموعة A ؟

الحل/ بالنسبة للعلاقة R_1

العدد. 3 يكون اصغر عنصر $3 \leq x \quad \forall\, x \in A$

العدد 15 يكون العنصر الأكبر $x \leq 15 \quad \forall\, x \in A$

العدد 3 هو عنصر اصغري $x \leq 3 \;\wedge x \neq 3$

العدد 15 هو عنصر اعظمي $15 \leq x \;\wedge\; x \neq 15$

العلاقة $H.W\ R_2$:

تعريف : لتكن (A,R) مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من المجموعة A يسمى العنصر a في المجموعة A:

1) قيداً اعلى للمجموعة B في A اذا حققت الشرط التالي

$$\forall\, x \in B\,, a \geq x \;\; (a\,R\,x)\; \forall\, x \in B)$$

وفي هذه الحالة نقول ان B مقيدة من الأعلى.

2) قيداً ادنى للمجموعة B في A اذا حقق الشرط التالي:

$$\forall\, x \in B\,, a \leq x \;\; (a\,R\,x \;\; \forall\, x \in B)$$

وفي هذه الحاله نقول ان B مقيدة من اسفل.

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الحقيقية وR علاقة ترتيب جزئي على A معرفه بالشكل الاتي

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$$

ولتكن $B = [2,3]$

فأن $5 \in A$ قيداً اعلى للمجموعة B

و $1 \in A$ قيداً ادنى للمجموعة B

تعريف : لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من A يسمى العنصر x في A (اصغر قيد اعلى) للمجموعة B في A اذا كان

1) x هو قيد اعلى للمجموعة B.
2) $x \leq y$ لكل قيد اعلى y للمجموعة B. ويرمز له بالرمز $\sup(B)$

تعريف: لتكن A مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن B مجموعة جزئية من A يسمى العنصر x في A (اكبر قيد ادنى) للمجموعة B في A اذا حقق ما يلي

1) xهو قيد ادنى للمجموعة B.
2) $x \geq y$ لكل قيد ادنى y للمجموعة B. ويرمز له بالرمز $\inf(B)$.

ملاحظات:

لتكن (A, R) مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن $B \subseteq A$

1- اذا كان $\sup(B)$ موجود فهو وحيد. كذلك اذا كان $\inf(B)$ موجوداً فهو وحيد.
2- bيكون قيد اعلى للمجموعة B في $(A, \leq)$ اذا وفقط اذا كان b قيد ادنى للمجموعة b في $(A, \geq)$
3- $b = sup(B)$ في $(A, \leq)$ اذا وفقط اذا $b = inf(B)$ في $(A, \geq)$.

مثال/ لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية و

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$$

ولتكن $B = [-1,5]$

فأن $sup(B) = 5$ و $inf(B) = -1$

يلاحظ في مثل هذا المثال ان $\sup(B) = 5$ و $inf(B) = -1$ ينتميان الى المجموعة B

لكن لو اخذنا $C = (-1,5)$

فأن $sup(C) = 5$ و $\inf(C) = -1$

وعليه فأن $\sup(C)$ و $\inf(C)$ لا ينتميان الى C.

ونستنتج من هاتين الحالتين ان sup قد يكون عنصر في المجموعة وقد لايكون وكذلك الحال بالنسبة الى inf.

س $H.W$/ جد sup وinf للمجموعة

$$B = \left\{\frac{1}{n}\ , n \in \mathbb{N}\right\} \qquad\qquad \mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots \dots \dots\}$$

المجموعة المرتبة كلياً

تعريف: لتكن $(A, \precsim)$ مجموعة مرتبة جزئياً فيقال عن العنصرين x, y في A بانهما قابليين للمقارنة اذا كان $y \precsim x$ او $x \precsim y$

وما عدا ذلك فانهما غير قابليين للمقارنة.

مثال/ لتكن $(\mathbb{Z}, \precsim)$ مجموعة مرتبة جزئياً حيث ان $\mathbb{Z}$ هي مجموعة الاعداد الصحيحة و $\precsim$ هي علاقة الأقل او يساوي الاعتيادية نلاحظ ان كل عنصرين x, y في $\mathbb{Z}$ يكونان قابلين للمقارنة

وذلك لانه اما ان يكون $y \le x$ او $x \le y$

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ولتكن R علاقة معرفة على A كالآتي

$$R = \{(x, y) \in A \times A \ni y \text{ يقبل القسمة على } x\}$$

نلاحظ انه ليس كل عنصرين في A قابلين للمقارنة لانه اذا اخذنا عنصرين مثل 3,5 فأن 3 لا يقبل القسمه على 5 وكذلك 5 لاتقبل القسمة على 3 وعليه 3 و5 غير قابلتين للمقارنة

تعريف: لتكن . $(A, \precsim)$ مجموعه مرتبة جزئياً تسمى A مجموعة مرتبة كلياً اذا كان كل عنصرين في A قابلين للمقارنة.

ملاحظة: كل مجموعة جزئية من مجموعه مرتبة كلياً تكون ايضاً مرتبة كلياً.

س/ هل ان عكس الملاحظ اعلاة صحيح ام لا ؟

الجواب لا والدليل هو المثال الآتي

لتكن $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,\ B = \{2,4,8\}$

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid y \text{ يقبل القسمة على } x\}$$

لاحظ انه ليس كل عنصرين في A قابلين للمقارنة فمثلاً 2,3 نلاحظ ان 2 لا تقبل القسمة على 3 وكذلك 3 لا تقبل القسمة على 2 وعليه (A, R) ليست مجموعه مرتبة كلياً.

اما بالنسبة للمجموعة B فكل عنصرين في B قابلين للمقارنة وعليه $(B, R/B)$ تكون مرتبة كلياً.

الفصل الرابع

التطبيقات

التطبيق (الدالة):

تعريف: لتكن كل من *A,B* مجموعة, التطبيق من *A* الى *B* هو ثلاثي مرتب *(f,A,B)* حيث *f* هي مجموعة جزئية من $A \times \mathrm{B}$ مع تحقيق الخواص الآتية:

1) لكل $x \in A$, يوجد $y \in B$ بحيث $(x, y) \in f$
2) اذا كان $(x, y_1) \in f$ و $(x, y_2) \in f$ فأن $y_1 = y_2$

ملاحظات

(2) كل علاقة تحقق الشرط الثاني تسمى علاقة دالية.

(3) من المعتاد كتابة الدالة بـ $f\colon A \longrightarrow B$ بدلاً (f, A, B) .

(4) الشرطان (1) و(2) ممكن ان يضما بشرط واحد هو لكل $x \in A$ يوجد عنصر وحيد $y \in \mathrm{B}$ بحيث $(x, y) \in f$

(5) يسمى x بالمتغير المستقل و y متغير المعتمد (لان قيمة y تعتمد على قيمة x) اذا كان $y = f_{(x)}$

(6) اذا كانت $f\colon A \longrightarrow B$ دالة تسمى المجموعة *A* مجال الدالة وتسمى المجموعة *B* بـالمجال المقابل.

مثال/ لتكن $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6\}$

ولتكن f علاقة كالآتي

$$f = \{(1,2), (3,4), (5,2), (7,6)\}$$

عندئذ يكون الثلاثي (f, A, B) تطبيقاً من A الى B وذلك لان كل

عنصر في A يرتبط مع عنصر وحيد في B.

ملاحظة: اذا كان $(x, y) \in f$ فأن y يسمى صورة x وان x يسمى اصل صورة y ويعبر عن ذلك بالرموز $y = f(x)$.

تعريف: ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيقاً تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع صور عناصر المجموعة A بـ مدى التطبيق ويرمز لها بالرمز $ranf$ وبعبارة أخرى.

$$ran(f) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A \ni y = f_{(x)}\}$$

ملاحظة : اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فأن

1) $domf = A$
2) $ran(f) \subseteq B$

تعريف: ليكن $f: A \to B$ تطبيقاً من المجموعة A الى المجموعة B فأن المجموعة التي عناصرها جميع الأزواج (x, y) في $A \times B$ تسمى بيان التطبيق واذا رمزنا لبيان التطبيق بالرمز G فأن: $G = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$

ملاحظة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فأن

1) $G \subseteq A \times B$ 2) $G = f$

حيث G هي بيان التطبيق.

مبرهنة :اذا كانت المجموعة A تحتوي على m من العناصر وان المجموعة B تحتوي على n من العناصر فأن المجموعة B^A تحتوي على (n^m) من العناصر. حيث B^A هي المجموعة التي عناصرها جميع التطبيقات من A الى B.

<u>**التطبيق الشامل**</u>

تعريف: يسمى التطبيق $f: A \to B$ تطبيقاً شاملاً اذا وفقط اذا كان $ranf = B$

وبعبارة أخرى $\forall\, y \in \mathrm{B}\,, \exists\, \mathrm{x} \in \mathrm{A} \ni \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$

مثال/ ليكن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل الاتي

$$f = \{(x, y) \mid y = 5x + 1\}$$

بين هل أن f تطبيقاً شاملاً أم لا؟

الحل/

مسودة

$x = \frac{y-1}{5}$

مبيضة

$= 5x + 1$

$- 1 = 5x$ نختار $x = \frac{y-1}{5}$

$$f_{(x)} = 5x + 1$$

$$f_{(x)} = 5\left(\frac{y-1}{5}\right) + 1 \longleftarrow$$

$$f_{(x)} = y$$

اذاً التطبيق f تطبيقاً شاملاً.

مثال/ لتكن $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

وان $B = \mathbb{R}$

فيكون التطبيق (f, A, B) تطبيقاً غير الشامل وذلك لان

$$ran(f) = \{y \in B \mid y \geq 0\}$$

أي ان $ran(f) \neq B$

<u>التطبيق المتباين</u>

تعريف: يسمى التطبيق $f: A \longrightarrow B$ تطبيقاً متباين اذا حقق الشرط التالي

$$f_{(x_1)} = f_{(x_2)} \longrightarrow x_1 = x_2 \qquad \forall\, x_1, x_2 \in A$$

أي أن العناصر المختلفة في المجال يجب ان تكون صورها مختلفة في المجال المقابل أي ان
$x_1 \neq x_2 \to f_{(x_1)} \neq f_{(x_2)}$

مثال/ لتكن $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 5\}$ و $B = \mathbb{R}$

وليكن $f: A \to B$ تطبيقاً معرفاً بالشكل الآتي

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$$

فهل ان f تطبيقاً متبايناً ام لا ؟

الحل/ f ليس تطبيقاً متبايناً

وذلك بسبب $-2 \neq 2$

لكن $f(-2) = f(2) = 4$

التطبيق التقابل: يسمى التطبيق $f: A \to B$ تطبيقاً تقابلاً اذا حقق الشرطين التالين

1- f تطبيق شاملاً
2- f تطبيقاً متايناً.

مثال/ لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بالشكل الاتي

$$f = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$$

بين اذا كان f تطبيقاً تقابل ام لا ؟

الحل /(1) مسودة | مبيضة

$y = 2x + 1$

$y - 1 = 2$

$x = \frac{y-1}{2}$

نختار $x = \frac{y-1}{2}$

$f_{(x)} = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1$

$\to f_{(x)} = y$

اذاً التطبيق f تطبيقاً شاملاً.

2) نفرض $f_{(x_1)} = f_{(x_2)} \ni x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$\to 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$
$\to 2x_1 = 2x_2$
$\to x_1 = x_2$

اذاً التطبيق f متباين

من (1) و(2) f تطبيق تقابل.

تساوي التطبيقات:

تعريف: ليكن كل من $g: C \to D$, $f: A \to B$ تطبيقاً فان التطبيقين يكونان متساويان اذا وفقط اذا كان

1) $A = C$ 2) $D = B$ 3) $f = g$

مبرهنة: ليكن كل من $g: A \to B$ و $f: A \to B$ تطبيقاً فأن f=g اذا وفقط اذا كان

$\forall\ x \in A,\ \ f_{(x)} = g_{(x)}$.

البرهان H.W

أنواع التطبيقات

1) **التطبيق الذاتي**: يسمى التطبيق $f: A \to A$ بالتطبيق الذاتي على A اذا وفقط اذا كان $f_{(x)} = x\ ,\forall\ \ x \in A$ ويرمز للتطبيق الذاتي بالرمز I_A.

ملاحظة : التطبيق الذاتي I_A هو تطبيق متباين وشامل لذا هو تقابلي.

2) **التطبيق الثابت**: يسمى التطبيق $f: A \to B$ بالتطبيق الثابت اذا وفقط اذا وجد عنصر b في B بحيث

$$\forall\ x \in A\ , f_{(x)} = b$$

مثال/ ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معروفاً بالشكل الاتي

$$f: \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ |\ f_{(x)} = 2\}$$

فأن f تطبيق ثابت لانه $\forall\ x \in \mathbb{R}\ , f_{(x)} = 2$

ملاحظة: ليكن $f: A \to B$ تطبيقاً ثابتاً.

1) اذا كانت المجموعة A محتوية على اكثر من عنصر فيكون التطبيق غير متباين.
2) اذا كانت المجموعة B محتوية على أكثر من عنصر فيكون التطبيق غير شامل.

3) تطبيق الاحتواء

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة B فيسمى التطبيق $f: A \to B$ بتطبيق الاحتواء اذا وفقط اذا كان

$$f_{(x)} = x\ ,\forall\ x \in A$$

مثال/ لتكن $A = \mathbb{N}\ ,\ B = \mathbb{Z}$

ولتكن f تطبيق من $\mathbb{N}$الى $\mathbb{Z}$ معرفة كالآتي

$$f\ = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\ |\ y = x\}$$

بما أن $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ وأن $f_{(x)} = x\ \ ,\ \ \forall\ x \in A$

فأن $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ تطبيق الاحتوائي.

4) التطبيق المميز لمجموعة

لتكن *B* مجموعة جزئية من المجموعة *A* ولتكن *c={0,1}* وأن *f* علاقة من *A* الى *C* معرفة بحيث

$$f_{(x)}=\begin{cases}0 & x\in B\\ 1 & x\in A-B\end{cases}$$

فيسمى التطبيق f $(f:A\to C)$ بالتطبيق المميز الى B في A.

مقصور العلاقة :

ليكن $f:A\to B$ تطبيقاً ولتكن C مجموعة جزئية من A فالتطبيق $g:C\to B$ المعرف بحيث

$$g_{(x)}=f_{(x)}\,,\ \forall\, x\in C$$

يسمى بمقصور f على C وسيرمز لها بالرمز $(f/C\,,C,B)$ أي أن $g=f/C$

مثال/ لتكن f علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كالآتي

$$f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid f_{(x)}=x^2\}$$

ولتكن g علاقة معرفة من $\mathbb{N}$ الى $\mathbb{Z}$ معرفة كالآتي

$$g=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\mid g_{(x)}=x^2\}$$

بما ان $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ وان $f_{(x)}=g_{(x)},\forall\, x\in\mathbb{N}$

فأن التطبيق $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ هو مقصور f على $\mathbb{N}$.

تمديد تطبيق :

ليكن $f:A\to B$ تطبيق وليكن $A\subseteq D$, فان التطبيق $g:D\longrightarrow B$ يسمى بتمديد f من A الى D اذا تحقق الشرط التالي:

$$g_{(x)}=f_{(x)}\,,\forall\, x\in A$$

أي ان $g/A=f$

مثال/ في المثال السابق التطبيق $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هو تمديد التطبيق $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ على $\mathbb{R}$.

التطبيقات العددية: يسمى التطبيق $f:A\to B$ تطبيقاً عددياً اذا كانت B مجموعة عددية أي ان المجال المقابل للتطبيق مجموعة عددية.

ملاحظة: مجموعه الاعداد الطبيعية ومجموعة الاعداد الصحيحة ومجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد الحقيقية هي مجموعات عددية.

المتتالية:

تعريف: لتكن A مجموعة ما التطبيق $f: \mathbb{Z}^+ \to A$ يسمى المتتالية في A ويرمز لها بالرمز $\{f_n\}$ أو $f_1, f_2, f_3, , \dots \dots$

حيث ($\mathbb{Z}^+$ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة)

$$f_n = f_{(n)} \, , n \in \mathbb{Z}^+$$

ملاحظة: اذا كانت $A = \mathbb{R}$ فتسمى المتتالية بمتتالية من الاعداد الحقيقية.

مثال/ كل من $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, $\{(-1)^n\}$ متتالية حقيقية.

التبديل:

تعريف: لتكن A مجموعة غير خالية كل تطبيق تقابلي مجاله ومجاله المقابل المجموعة A يسمى تبديل.

مثال/ لتكن $A = \{1,3,5\}$

وان $f: A \to A$ معرفة بحيث

$$f(1) = 3 \, , f(3) = 5 \, , f(5) = 1$$

بما أن $f: A \to A$ تقابل

اذاً التطبيق $f: A \to A$ هو تبديل الى A .

التطبيق القانوني:

لتكن A مجموعة ما ولتكن R علاقة تكافؤ على A فالتطبيق

$f: A \to A/R$ المعرف بحيث $f_{(x)} = [x]$ يسمى بالتطبيق القانوني.

مثال/ ليكن $A = \mathbb{Z}$ ولتكن R علاقة معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \text{عدد زوجي } (y - x)\}$$

واضح ان R علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$ وان

$$Z/R = \{[0], [1]\}$$

التطبيق $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/R$ المعرف بحيث $f(n)=[n]$ يكون تطبيقاً قانونياً فمثلاً

$$f(2)=[2]=[0]$$

$$f(5)=[5]=[1]$$

لاحظ أن $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/R$ تطبيق شامل وغير متباين.

ملاحظة: اثبات R علاقة تكافؤ وإيجاد صفوف التكافؤ واجب.

تطبيقات في اكثر من متغير:

تعريف: التطبيق في متغرين هو تطبيق مجاله حاصل ضرب ديكارتي لمجموعتين.

ملاحظة: اذا كان f تطبيقاً مجاله حاصل ضرب ديكارتي لمجموعتين A,B فان صورة العنصر (a,b) في $A\times B$ يرمز لها $f(a,b)$ ويسمى $f(a,b)$ بقيمة التطبيق (a,b).

مثال/ ليكن $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بحيث

$$f(x,y)=\frac{1}{3}\,\pi\,x^2\,,\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

التطبيق f هو تطبيق في متغيرين مجاله هو المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

تطبيق المسافة: لتكن A مجموعة ولتكن

$$R^*=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$$

فأن التطبيق $d:A\times A\to R^*$ يسمى تطبيق مسافة اذا تحققت الشروط التالية لكل $a,b,c\in A$

1) $d(a,b)=0\ \leftrightarrow a=b$

2) $d(a,b)=d(b,a)$

3) $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)$.

d يسمى قياس على A.

مثال/ لتكن A مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولتكن d علاقة من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ الى R^* معرفة بحيث $d(a,b)=|a-b|$

هل ان $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ تطبيق مسافه ام لا ؟

الحل/ لاثبات $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ تطبيق مسافة لابد من تحقيق الشروط الثلاثة الواردة في التعريف

1) $d:(a,b)=0\leftrightarrow a=b$ ؟

نفرض $a = b$

المطلوب $d(a,b) = 0$

$\leftarrow \quad d(a,b) = |a - b|$

$\leftarrow \quad d(a,b) = 0$ لان $a = b$ بالفرض

الآن نفرض $d(a,b) = 0$

المطلوب $a = b$

بما ان $|a - b| = 0 \leftarrow d(a,b) = 0$

من تعريف القيمة المطلقة (القيمة المطلقة لا تساوي صفر إلا اذا كان داخل القيمة المطلقة يساوي صفر)

$$a = b \leftarrow a - b = 0$$

اذاً الشرط الأول متحقق.

2) $d(a,b) = d(b,a)$ ؟

$$d(a,b) = |a - b| = |-(b - a)| = |-1||b - a|$$
$$= |b - a| = d(b,a)$$

3) $d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$ ؟

$$d(a,b) = |a - b| = |a - c + c - b|$$

من خواص القيمة المطلقة $|a - c + c - b| \le |a - c| + |c - b|$

$$\rightarrow |a - b| \le |a - c| + |c - b| \rightarrow d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$$

المساقط:

تعريف: ليكن كل من A_1, A_2 مجموعة, فأن التطبيق

$$P_i: A_i \times A_i \rightarrow A_i \qquad (i = 1,2)$$

المعرف بحيث: $\quad P_i(a_1, a_2) = a_i \qquad (i = 1,2)$

يسمى بمسقط الحاصل الديكارتي $A_1 \times A_2$ على A_i.

ملاحظة:

1) اذا كان i=1 نحصل على التطبيق $P_1: A_1 \times A_2 \rightarrow A_1$

بحيث $P_1(a_1, a_2) = a_1$

واذا كان i=2 نحصل على التطبيق $P_2: A_1 \times A_2 \rightarrow A_2.$

بحيث $P_2(a_1, a_2) = a_2$

2) التطبيق $P_i: A_1 \times A_2 \to A_i$ يكون شاملاً وغير متباين.

3) من الممكن تعميم الفكرة الى n من المجموعات كما يلي

لتكن كل من $A_1, A_2, \dots \dots \dots, A_n$ مجموعة والتطبيق

$$P_i: A_1 \times A_2 \times \dots \dots .. \times A_n \to A_i$$

المعرف بحيث

$$P_i(a_1, a_2, \dots ., a_n) = a_i \quad (i = 1,2, \dots \dots .4)$$

يسمى مسقط الحاصل الديكارتي $A_1 \times A_2 \times \dots \dots A_n$ على A_i.

مثال/ التطبيق $p_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بحيث

$$Pi(x_1, x_2) = x_i \qquad (i = 1,2)$$

هو مسقط $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$.

مبرهنة: ليكن كل من $f: A \to B$ و $g: B \to C$ تطبيقاً فأن gof يكون تطبيقاً.

البرهان: نفرض f و g تطبيقاً. المطلوب اثباته: gof تطبيقاً أي ان

المطلوب اثباته (1) $\forall\, x \in A\, , \exists\, z \in C \;\ni (x, z) \in gof$

$(x_1, z_1) \in gof \wedge (x_1, z_2) \in gof \to z_1 = z_2$ (2)

1) نفرض $x \in A$

بما أن $f: A \to B$ تطبيق (بالفرض)

فأن $\exists\, y \in B \;\ni (x, y) \in f$

وبما ان $g: B \to C$ تطبيق

$$\exists\, z \in C \;\ni (y, z) \in g$$

اي انه $\exists\, y \in B \ni (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$

وينتج من تعريف تركيب العلاقات ان $(x, z) \in gof$

اذاً نستنتج ان $\forall\, x \in A\, \exists\, z \in C \;\ni (x, z) \in gof$

2) نفرض ان

$$(x, z_1) \in gof \wedge (x, z_2) \in gof$$

المطلوب اثباته: $z_1 = z_2$

من تعريف تركيب العلاقات نجد انه اذا كان

$$(x,z_1) \in gof \ \rightarrow \exists\ y_1 \in B \ni (x,y_1) \in f \wedge (y_1,z_1) \in g$$

$$(x,z_2) \in gof \rightarrow \exists\ y_2 \in B \ni (x,y_2) \in f \wedge (y_2,z_2) \in g$$

بما ان $f: A \rightarrow B$ تطبيق فأن

$$(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$$

$\leftarrow (y_1,z_2) \in g$ وبما أن $g: B \rightarrow C$ تطبيق فانه

$$(y_1,z_1) \in g \wedge (y_1,z_2) \in g \rightarrow z_1 = z_2$$

وعلية نجد انه

$$(x,z_1) \in gof \wedge (x,z_2) \in gof \rightarrow z_1 = z_2$$

من (1) و(2) نستنتج ان $gof: A \rightarrow C$ تطبيقاً.

نتيجة: ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ تطبيقاً فانه لكل $x \in A$

$$gof_{(x)} = g\big(f_{(x)}\big)$$

البرهان: H.W

مثال/ ليكن $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تطبيقاً بحيث $\forall\ x \in \mathbb{N}\ ,\ f_{(x)} = 4x^2$

وان $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ايضاً تطبيق بحيث $\forall\ x \in \mathbb{N}\ , g_{(x)} = 3x + 1$

جد gof ؟

الحل: $\forall\ x \in \mathbb{N}\ , \mathrm{g}of_{(x)} = \mathrm{g}\big(f_{(x)}\big)$

$$= \mathrm{g}(4x^2)$$

$$= 12x^2 + 1$$

لاحظ ان gof هي تطبيق من $\mathbb{N}$ الى $\mathbb{N}$.

مبرهنة: ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ تطبيقاً

1) اذا كان كل من f و g تطبيقاً متبايناً فأن gof تطبيق متباين ايضاً.
2) اذا كان كل من f و g تطبيقاً شاملاً فأن gof تطبيق شامل ايضاً.
3) اذا كان كل من f و g تقابلاً فأن gof تقابل ايضاً.

البرهان:

(1) نفرض ان f و g تطبيق متبايناً

المطلوب اثباته: gof تطبيقاً متبايناً

نفرض ان كلاً من x_1 و x_2 عنصراً في المجموعة A بحيث

$$(gof)_{(x_1)} = (gof)_{(x_2)}$$

المطلوب اثباته: $x_1 = x_2$

من التعريف تركيب التطبيقات نجد ان $g\left(f_{(x_1)}\right) = g\left(f_{(x_2)}\right)$

بما ان g تطبيق متباين

$$g(f_{(x_1)}) = g(f_{(x_2)}) \rightarrow f_{(x_1)} = f_{(x_2)}$$

وبما ان f تطبيق متباين

$$f_{(x_1)} = f_{(x_2)} \rightarrow x_1 = x_2$$

اذاً gof تطبيقاً متبايناً.

2) نفرض f و g تطبيق شامل

المطلوب اثباته gof تطبيق شامل

نفرض $z \in C$

المطلوب اثباته $\exists\, x \in A \ni z = g\left(f_{(x)}\right) = (gof)_{(x)}$

بما ان g تطبيق شامل فيوجد $y \in B$ بحيث $g_{(y)} = z$

وكذلك f تطبيق شامل $\exists\, x \in A \ni f_{(x)} = y$

أي انه $\exists\, x \in A \ni z = g\left(f_{(x)}\right) = (gof)_{(x)}$

اذاً gof تطبيق شامل.

مبرهنة: ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ تطبيقاً فانه

1) اذا كان التطبيق gof متبايناً فأن f تطبيق متباين ايضاً
2) اذا كان التطبيق gof شاملاً فأن g تطبيق شامل.

البرهان $H.W$.

نتيجة: ليكن كل من $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ تطبيق فأذا كان التطبيق gof تقابلاً فأن f يكون تطبيق متبايناً وان g يكون شاملاً.

ملاحظة عكس النتيجة أعلاه لا يكون صحيحاً دائماً (أي انه اذا كان f تطبيقاً متبايناً و g تطبيقاً شاملاً فأن gof تطبيق تقابل) لايكون صحيح بصورة عامة والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال/ ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً بحيث $f_{(x)} = x$

وليكن $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ تطبيقاً بحيث $g_{(x)} = x^2$

فأن $gof: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ تطبيق بحيث

$$gof(x) = x^2$$

لاحظ ان f تطبيق متباين و g تطبيق شامل بينما gof لا يكون تطبيق متباين لان $gof(-2) = gof(2)$ لكن $2 \neq -2$

التطبيق النظير

اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فأن العلاقة النظيرة f^{-1} من B الى A قد تحقق شروط التطبيق اولاً تحقق. كما انه اذا كان $f^{-1}: B \to A$ تطبيقاً فليس من الضروري ان يكون $f: A \to B$ تطبيقاً كما يتضح من الأمثلة الاتية.

مثال/ لتكن $A = \{5,7,9\}$, $B = \{-2,4\}$

وان $f = \{(5,-2), (7,-2), (9,4)\}$ و $f^{-1} = \{(-2,5), (-2,7), (4,9)\}$

واضح ان f تطبيق لانه لكل عنصر في A يوجد عنصر وحيد في B بحيث $(x,y) \in f$ اذا كان $x \in A$ و $y \in B$

f^{-1} ليس تطبيقاً لان $-2 \in B$ يرتبط بعنصرين من A وهذا يناقض تعريف التطبيق.

مثال/ لتكن $A = \{3\}$, $B = \{2,4,6\}$ وان $f = \{(3,2), (3,4), (3,6)\}$ و $f^{-1} = \{(2,3), (4,3), (6,3)\}$ واضح ان f ليس تطبيقاً لان $3 \in A$ ترتبط بأكثر من عنصر في B وهذا يناقض تعريف التطبيق.

f^{-1} تطبيق لانه يحقق شروط التطبيق.

تعريف: يقال عن تطبيق $f: A \to B$ انة عكوس اذا كان $f^{-1}: B \to A$ تطبيقاً.

ملاحظة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً و $f^{-1}: B \to A$ تطبيقاً فأن $f^{-1}: B \to A$ يسمى بالتطبيق النظير.

مبرهنة: يكون التطبيق $f: A \to B$ عكوساً اذا وفقط اذا كان $f: A \to B$ تقابلاً.

البرهان: نفرض ان $f: A \to B$ تطبيق عكوس.

المطلوب اثباتة ان $f: A \to B$ تقابلاً.

بعبارة أخرى لابد ان نثبت ان f متباين وشامل

نفرض ان $x_1, x_2 \in A$ $\qquad f_{(x_1)} = f_{(x_2)}$

المطلوب اثباته هي $x_1 = x_2$

نفرض ان $f_{(x_1)} = f_{(x_2)} = y$

$\leftarrow \quad (x_1, y) \in f^{-1} \wedge (x_2, y) \in f$

من تعريف العلاقة العكسية يكون

$$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$$

وبما ان f تطبيق عكوس $\leftarrow$ f^{-1} تطبيق

$$(\mathrm{y}, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} \to x_1 = x_2$$

اذاً $f: A \to B$ تطبيق متباين

بقي ان نبرهن ان f تطبيق شامل

نفرض ان $y \in B$

المطلوب $\exists\, x \in A \ni f_{(x)} = y$

بما ان $f^{-1}: B \to A$ تطبيق

$\leftarrow \exists\, x \in A \ni f^{-1}(y) = x$

$\leftarrow (y, x) \in f^{-1}$

$\leftarrow \exists\, x \in A \ni (x, y) \in f$

$\leftarrow \exists\, x \in A \ni f_{(x)} = y$

وعليه يكون التطبيق $f: A \to B$ تطبيقاً شاملاً

وبما أن f تطبيق شامل ومتباين فأن f تطبيق تقابل.

نفرض ان $f: A \to B$ تقابل

المطلوب اثباته ان $f: A \to B$ عكوس أي ان $f: B \to A$ تطبيق.

(1) نفرض ان y عنصر في B

المطلوب اثباته $\exists\, x \in A \ni f^{-1}(y) = x$

بما أن $f: A \to B$ تطبيق شامل.

$\exists\, x \in A \ni f_{(x)} = y \qquad \leftarrow$

$\exists\, x \in A \ni (x, y) \in f \qquad \leftarrow$

بما ان $(y, x) \in f$ فأن $(y, x) \in f^{-1}$
اذاً $\exists\, x \in A \ni (y, x) \in f^{-1}$
اي ان $dom f^{-1} = B$

(2) نفرض ان $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$

المطلوب اثباته $x_1 = x_2$

بما ان $(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$

$\leftarrow \quad (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$

$\leftarrow \quad f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$

$\leftarrow \quad f_{(x_1)} = f_{(x_2)}$

وبما ان $f: A \to B$ تطبيق متباين

$\leftarrow x_1 = x_2$

من (1) و(2) نحصل على ان $f^{-1}: B \to A$ تطبيق.

مبرهنة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً عكوساً فأن $f^{-1}: A \to B$ يكون تقابلاً.

مبرهنة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً عكوساً فأن

(1 $f^{-1} o f = I_A$ (2 $f o f^{-1} = I_A$

تعريف: ليكن $f: A \to B$ تطبيقاً ولتكن C مجموعة جزئية من A فأن المجموعة المتكونه من عناصر المجموعة B التي كل عنصر فيها هو صورة على الأقل لاحد عناصر المجموعة C تسمى صورة المباشرة للمجموعة C بفعل التطبيق $f: A \to B$.

ويرمز له بالرمز $f_{(c)}$ وبعبارة أخرى

$$f_{(c)} = \{ y \in B \mid \exists\, x \in C \ni y = f_{(x)} \}$$

مثال/ ليكن $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً بحيث

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, f_{(x)} = x^2 + 2$$

ولتكن $C = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ فأن

$$f_{(C)} = \{2, 3, 11\}$$

مبرهنة: ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ولتكن كل من A,B مجموعة جزئية من المجموعه X فأذا كان A=B $f_{(A)} = f_{(B)}$.

ملاحظة اذا كان: $f_{(A)} = f_{(B)}$ فليس من الضروري ان A=B.

[أعط مثال يوضح ذلك H.W]

مبرهنه: لتكن كل من Y و X مجموعة وليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ولتكن f^* علاقه من $P(X)$ الى $P(Y)$ معرفة كالآتي

$$f^* = \{(A, B) \in P(X) \times P(Y) |\, f(A) = B\}$$

فأن $f^*: P(X) \to P(Y)$ يكون تطبيقاً. H.W

مبرهنة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً وان كل من C, D مجموعة جزئية من A فأن

1) $f_{(C \cup D)} = f_{(C)} \cup f_{(D)}$
2) $f_{(C \cap D)} \subseteq f_{(C)} \cap f_{(D)}$
3) $f_{(C-D)} \supseteq f_{(C)} - f_D$

البرهان H.W

تعريف: ليكن $f: A \to B$ تطبيقاً ولتكن D مجموعة جزئية من B فان مجموعة جزئية العناصر في A. التي تنتمي صورة كل عنصر عنها =ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(D)$. بعبارة أخرى

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f_{(x)} \in D\}$$

مثال/ اذا كان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً

بحيث $f_{(x)} = x^2 + 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

فأن
$$f^{-1}(17) = \{x \in A \mid f_{(x)} = 17$$
$$= \{x \in A \mid x^2 + 1\}$$
$$= \{-4,4\}$$

كذلك
$$f^{-1}(\{5,10\}) = \{x \in A \mid f_{(x)} \in \{5,10\}\}$$
$$= \{x \in A \mid x^2 + 1 = 5 \vee (x^2 + 1 = 10)\}$$
$$= \{-2,2,-3,3\}\}$$

مبرهنة: ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً ولتكن كل من *C,D* مجموعة جزئية من المجموعة *Y* فاذا كان *C=D* فان

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$$

ملاحظة: اذا كان $f^{-1}(C) = f^{-1}(D)$ فليس من الضروري ان يكون C=D.

مبرهنة: اذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً وان كلاً من C,D مجموعة جزئية من B فأن

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad (1$$
$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \quad (2$$
$$f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D) \quad (3$$

البرهان/ H.W

التطبيقات المحافظة على الترتيب والتشاكل.

تعريف: لتكن كل من B,A مجموعة مرتبة جزئياً فيسمى التطبيق $f: A \to B$ تطبيقاً محافظاً على الترتيب او تطبيقاً متزايداً اذا وفقط اذا كان $x \precsim y \to f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

ملاحظة: في بعض الأحيان يستعمل الرمز $\precsim$ ليدل على علاقة الترتيب الجزئي على A وكل زوج مرتب (x, y) في العلاقة يكتب بالصورة $(x \precsim y)$ ويقرأ x يسبق y ويكتب ايضاً $x \precsim y$ للدلالة على أن $x \precsim y \wedge x \neq y$.

مثال/ لتكن Z_0 (مجموعة الاعداد الصحيحية الفردية) مرتبة جزئياً بالعلاقة $(\leq)$ (اقل او يساوي), ولتكن Z_e (مجموعة الاعداد الصحيحية الزوجية) مرتبة جزئياً بالعلاقة $(\leq)$ (اقل او يساوي)

وليكن $f: Z_0 \to Z_e$ تطبيقاً معرفاً بحيث

$$f(x) = x + 1 \quad \forall\, x \in A$$

لاحظ ان $x_1 \leq x_2 \to x_1 + 1 \leq x_2 + 1$

$$x_1 \leq x_2 \to f_{(x_1)} \leq f_{(x_2)} \quad \forall\, x_1, x_2$$

وعليه يكون التطبيق $f: Z_0 \to Z_e$ محافظ الترتيب.

تعريف: لتكن كل من A, B مجموعة مرتبة جزئياً فيسمى التطبيق $f: A \to B$ متزايداً فعلاً اذا وفقط اذا كان

$$x < y \to f_{(x)} < f_{(y)} \quad \ni x, y \in A$$

مثال/ ليكن $B = \mathbb{R}$ و $A = \mathbb{N}$ ولتكن كل من $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ مرتبة بالعلاقة $(\leq)$ وليكن $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تطبيقاً معرفاً بحيث $f_{(x)} = 3x^2 + 1$ فأن التطبيق f متزايد فعلاً وذلك لان

$$x < y \to 3x^2 + 1 < 3y^2 + 1 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$$
$$x < y \to f_{(x)} < f_{(y)}$$

تعريف/ لتكن كل من A وB مجموعة مرتبة جزئياً يسمى التطبيق $f: A \to B$ تشاكلاً (isomorphism) اذا وفقط اذا كان

1) $f: A \to B$ تقابل

2) $\forall\, x, y \in A\ x \precsim y \leftrightarrow f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

مثال/ ليكن $A = \mathbb{N}$ مرتباً بالعلاقة $(\leq)$ وليكن $B = \overline{\mathbb{Z}}_e$ مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية السالبة مرتبة بعلاقة الترتيب الاعتيادي $(\geq)$ وليكن $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{Z}}_e$ تطبيقاً معرفاً بحيث

$f_{(n)} = -2n$

1) بما أن f تطبيق شامل ومتباين فهو اذاً تقابل. *H.W*

2) $n_1 \leq n_2 \leftrightarrow -2n_1 \geq -2n_2$

$n_1 \leq n_2 \leftrightarrow f_{(n_1)} \geq f_{(n_2)}$

أي ان f تشاكل *(isomor phism)*

مبرهنة: لتكن كل من A و B مجموعة مرتبة وليكن $f: A \to B$ تشاكل فأن $x < y \to f_{(x)} < f_{(y)}$

البرهان: نفرض $f: A \to B$ تشاكل

المطلوب اثباته: $f: A \to B$ متزايد فعلاً

نفرض $x < y$

المطلوب $f_{(x)} < f_{(y)}$

بما ان $x < y \quad \leftarrow \quad x \precsim y\ \wedge x \neq y$

وبما أن $f: A \to B$ تشاكل

اذاً $x \precsim y \to f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

وأن $x \neq y \to f_{(x)} \neq f_{(y)}$

وعليه $\left(f_{(x)} \precsim f_{(y)} \wedge f_{(x)} \neq f_{(y)}\right) \to f_{(x)} \prec f_{(y)}$

اذاً $x < y \to f_{(x)} < f_{(y)}$

مبرهنة: ليكن كل من A, B مجموعة مرتبة جزئياً وليكن $f: A \to B$ تقابلاً فيكون $f: A \to B$ تشاكلاً اذا وفقط اذا كان كل من التطبيق $f: A \to B$ والتطبيق النظير $f^{-1}: A \to B$ تطبيقاً متزايداً.

البرهان: نفرض f تشاكل ونبرهن f و f^{-1} تطبيقاً متزايداً هذا اولاً

وثانياً نفرض f و f^{-1} تطبيقاً متزايداً ونبرهن f تشاكل.

اولاً نفرض f تشاكل

المطلوب اثباتة f و f^{-1} تطبيقاً متزايداً

بما أن f تشاكل ← تطبيقاً متزايداً

الآن لكي نبرهن ان التطبيق النظير $f^{-1}: B \to A$ متزايداً.

نفرض ان $z, w \in B$ بحيث $z \precsim w$

المطلوب اثباته $f^{-1}(z) \precsim f^{-1}(w)$

بما أن $f: A \to B$ تقابل فيوجد $x, y \in A$ بحيث

$$f_{(x)} = z \quad , \quad f_{(y)} = w$$

وعليه $f(x) \precsim f(y)$ (لانه بالفرض $z \precsim w$)

وبما أن $f: A \to B$ تشاكل

← $f_{(x)} \precsim f_{(y)} \to x \precsim y$

وبما أن $f: A \to B$ تقابل

← $x = f^{-1}\left(f_{(x)}\right)$ و $y = f^{-1}\left(f_{(y)}\right)$

← $x = f^{-1}(z)$ و $y = f^{-1}(w)$

اذاً $f_{(x)} \precsim f_{(y)} \to f^{-1}\left(f_{(x)}\right) \precsim f^{-1}\left(f_{(x)}\right)$

$$z \precsim w \to f^{-1}(z) \precsim f^{-1}(w)$$

اذاً $f^{-1}: B \to A$ تطبيقاً متزايداً.

ثانياً نفرض f و f^{-1} تطبيقاً متزايداً.

المطلوب اثباته: f تشاكل أي انه لابد ان نثبت ان f تقابل

و $\forall\, x, y \in A \quad x \precsim y \leftrightarrow f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

بما ان f بالفرض هي تقابل اذا بقي ان نبرهن انه

$$\forall\, x, y \in A \;\; x \precsim \mathrm{y} \leftrightarrow f_{(x)} \precsim f_{(y)}$$

بما ان f متزايد ← $x \precsim y \to f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

بقي ان نبرهن انه $f_{(x)} \precsim f_{(y)} \to x \precsim y$

الآن نفرض ان $x, y \in A$ بحيث $f_{(x)} \precsim f_{(y)}$

المطلوب اثباته $x \precsim \mathrm{y}$

بما ان $f^{-1}: A \to B$ تطبيق تزايد

$$\leftarrow \qquad f_{(x)} \precsim f_{(y)} \to f^{-1}(f_{(x)}) \precsim f^{-1}(f_{(y)})$$

وبما ان $f: A \to B$ تطبيق تقابل

وعليه $\quad f^{-1}(f_{(x)}) = x \quad , \quad f^{-1}(f_{(y)}) = y$

اذاً f تطبيق تشاكل.

مبرهنة: لتكن كل من A, B, C مجموعة مرتبة جزئياً

1) التطبيق الذاتي $I_A = A \to A$ يكون تشاكلاً.
2) اذا كان التطبيق $f: A \to B$ تشاكلاً فأن التطبيق النظير $f^{-1}: B \to A$ يكون تشاكلاً.
3) اذا كان كل من $f: A \to B$ و $g: B \to C$ تطبيق تشاكل فأن $gof: A \to C$ يكون تشاكلاً.

البرهان: H.W

تعريف: لتكن كل من A,B مجموعة مرتبة جزئياً فيقال بأن A متشاكل مع B (A is isomor phic with B) اذا وجد تطبيق تشاكل $f: A \to B$ ويكتب $A \cong B$ للدلالة على ان A متشاكلة مع B.

الفصل الخامس

في هذا الفصل سوف نوضح للطالب بعض المفاهيم من قبيل العدد الأساسي وقدرة المجموعة والمجموعة المنتهية والمجموعة غير المنتهية ومفهوم المجموعة القابلة للعد بالإضافة الى حساب الاعداد الأساسية.

وللتمهيد نطرح السؤال الآتي وهو

اذا كانت A و B مجموعتان كيف يمكننا معرفة ان A و B لها نفس العدد من العناصر؟

للجواب على هذا السؤال نقول تارة تكون A و B مجموعتان منتهيتان وتارة مجموهتين غير منتهيتين فأن كانت A و B مجموعتان منتهيتان نحسب عدد عناصر كل مجموعة ومن ثم نعلم هل عدد عناصر المجموعتين متساويين ام لا.

اما اذا كانت A و B مجموعتين غير منتهتين فأذا وجدنا تطبيق $f: A \to B$ وكان $f: A \to B$ تطبيق تقابل عند ذلك نقول ان عدد عناصر A يساوي عدد عناصر B.

تعريف: لتكن كل من A و B مجموعة يقال بأن A و B متقادرتان اذا وفقط اذا وجد بينهما تقابل $f: A \to B$ ونعبر عن ذلك بالرمز $A \sim B$.

ترميز: اذا كان لا يوجد أي تقابل بين المجموعتين A و B فتكتب

$A \nsim B$ وتقرأ A غير متقادرة مع B.

س/ ما معنى قدرة المجموعة ؟

ج/ قبل بيان معنى قدرة المجموعة لابد من بيان نقطة أساسية وهي لكي نفهم المفاهيم الرياضية بشكل دقيق لابد من فهم المعنى اللغوي للمفهوم ولكي نطبق هذه النقطة على المفهوم قدرة المجموعة نقول القدرة لغة تعني الطاقة وهنا نسأل ماذا يعني طاقة المجموعة وللاجابة على هذا السؤال لابد ان نعرف ماهي إمكانات المجموعة وما الذي يمكن ان تنطوي عليه ؟ الشيء الوحيد الذي تنطوي علية المجموعة هو العناصر وعليه فطاقة المجموعة ما هو الا تعبير آخر عن كمية العناصر الموجودة في المجموعة وعلية يمكننا تعريف قدرة المجموعة: هي كمية العناصر التي تحتويها.

تعريف: الاعداد الأساسية: هي قياس الى عدد العناصر في المجموعات.

ترميز: اذا كانت A مجموعة, فسوف نكتب $\#(A)$ لتدل على العدد الأساسي للمجموعة A فالخاصية الأساسية للاعداد الأساسية هي $(A \sim B) \to \#(A) = \#(B)$

تعريف: نقول ان $\propto$ عدد أساسي اذا وجدت مجموعة A بحيث

$\propto = \#(A)$.

ترميز: نرمز للعدد الأساسي للمجموعة الخالية $\emptyset$ بالرمز O أي أن $\#(\emptyset) = O$.

وللعدد الأساسي للمجموعة $\{\emptyset\}$ بالرمز 1

وللعدد الأساسي للمجموعة $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ بالرمز 2

وللعدد الأساسي للمجموعة $\{0,1,2, \dots, n-1\}$ بالرمز n

مثال/ لتكن $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ وليكن

$f: A \to B$ تطبيق معرف كالآتي

$$f_{(1)} = b \ , \ f_{(2)} = d \ , \ f_{(3)} = a \ , \ f_{(4)} = c$$

واضح ان f تطبيق تقابل وعليه $A \sim B$ أي ان A و B متقادرتان.

تعريف: لتكن A مجموعة يقال بأن A مجموعة اذا وفقط اذا كانت A متساوية القدرة مع مجموعة من الاعداد الطبيعية ذات الصورة $\{0,1,2,3 \ldots, n-1\}$ حيث n عدد طبيعيعد ذلك تسمى مجموعة غير منتهية.

ملاحظات:

1- العدد الأساسي للمجموعات المنتهية هو عدد العناصر التي تحتويها المجموعة.
2- تكون المجموعة A منتهية اذا كان لايوجد أي مجموعة جزئية من A ومتساوية القدرة مع A سوى A نفسها وعليه يمكن ان نعرف المجموعة غير المنتهية كما يلي تكون المجموعة A غير منتهية اذا وفقط اذا كانت A متاوية القدرة مع مجموعة جزئية فعلية منها.
3- يسمى العدد الأساسي $\propto$ عدداً منتهياً اذا كان هو العدد الأساسي لمجموعة منتهية , وماعدا ذلك فنسمية عدد أساسي غير منته. والعدد الأساسي المنتهي يسمى ايضاً عدد طبيعياً.
4- تكون المجموعة A منتهية اذا وفقط اذا كان

$$\# \ (A) \neq \# \ (A) + 1$$

وعليه اذا كانت $\propto = \# \ (A)$, A مجموعة منتهية فأن

$$\propto \neq \propto + 1$$

مبرهنة شرودر-برنشتين

لتكن كل من A و B مجموعة, اذا كانت A متساوية القدرة مع المجموعة جزئية من B و B متساوية القدرة مع المجموعة جزئية من A فأن A و B متقادرتان.

ملاحظة: ليكن $\propto$ و β عددين أساسيين فاذا كان

$$\propto \leq \beta \quad \text{و} \quad \beta \leq \propto$$

فأن $\propto = \beta$

حساب الاعداد الأساسية

1) جمع الاعداد الأساسية

ليكن كل من m , n عدداً اساسياً منتهياً فأننا نحصل على العدد الأساسي $m + n$ بأن نختار مجموعة M تحتوي على m من العناصر ومجموعة W تحتوي على n من العناصر بحيث $(M \cap W = \emptyset)$ ثم نحسب عدد العناصر في $M \cup W$

أي ان $m + n = \# \ (M \cup W)$ اذا كانت $M \cap W = \emptyset$.

وبالمثل ليكن كل من $\propto$ و β عدداً اساسياً فأن $\propto + \beta$ هو العدد الأساسي للمجموعة $(A \cup B)$ حيث

$A \cap B = \emptyset$ (3 $\quad \# (B) = \beta$ (2 $\quad \# (A) = \propto$ (1

ملاحظة: قد يحدث أن $\# (A)$ = ∝ , $\# (B)$ =β ولكن $A \cap B \neq \emptyset$ ولا يجاد ∝ +β نستخدم مبرهنة الاستبدال القياسي.

مبرهنة الاستبدال القياسي: لتكن $\{A_\propto\}_{\propto \in I}$ جملة المجموعات فهنالك جملة من المجموعات $\{A_\propto^*\}_{\propto \in I}$ بحيث

$\propto \neq \beta \to A_\propto^* \cap A_\beta^* = \emptyset$ (2 $\quad A_\propto^* \sim A_\propto \quad \forall \propto \in I$ (1

مثال/ يوضح مبرهنة الاستبدال القياسي

لتكن كل من $\propto_1, \propto_2$ عدد اساسياً.

ولتكن A_1 و A_2 مجموعة بحيث

$\# (A_1) = \propto_1 \quad , \quad \# (A_2) = \propto_2$

و $\qquad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

من مبرهنة الاستبدال القياسي يوجد A_1^* و A_2^* بحيث

$A_1^* \sim A_1$ و $A_2^* \sim A_2$ و $A_1^* \cap A_2^* = \emptyset$

فأن $\qquad \propto_1 + \propto_2 = \# (A_1^* \cup A_2^*)$

مثال/ لتكن $A = \{1,3,5, \dots \dots\}$
$B = \{0,2,4, \dots \dots\}$

لاحظ ان $\quad \# (\mathrm{A}) = N_0 \quad , \quad \# (A) = N_0$

بما أن $\quad A \cap B = \emptyset$

$$\# (A) + \# (B) = \# (A \cup B) = \# (\mathbb{N}) = N_0$$

ملاحظة :

(1) يرمز للعدد الأساسي لمجموعة الاعداد الطبيعية بالرمز N_0

$\# (\mathbb{N}) = N_0$

(2) $\quad N_0 + N_0 + \cdots = N_0$

(3) $\quad \# [n, n+1) = c$ حيث $n = 1,2,3, \dots .$

ملاحظة: لانستطيع تعريف عملية الطرح للاعداد الأساسية حيث لا يوجد نظير لعملية الجمع وعليه فالمعادلة $C + x = C$ لها الحلول التالية.

1) X أي عدد أساسي منته 2) $x = N_0$ 3) $x = C$

مبرهنة/ ليكن كل من $\propto$ و β وعدداً اساسياً فان الخواص الأتية تحقق

1) الخاصية التجمعية للجمع $\propto +(\beta+\gamma) = (\propto +\beta) + \gamma$
2) الخاصية التبديلية للجمع $\propto +\beta = \beta+\propto$

ملاحظة: لاحظ ان قانون الاختزال لايحقق في عملية جمع الاعداد الأساسية فمثلاً $N_0 + N_0 = N_0 = N_0 + 1$

لكن $N_0 \neq 1$

ضرب الاعداد الأساسية

ليكن كل من m و n عدداً طبيعاً فأننا نحصل على mn بأن نختار مجموعة M تحتوي m من العناصر ومجموعة w تحتوي n من العناصر ثم نحسب الأزواج المرتبة في $M \times w$ بالمثل اذا كان كل من $\propto$ و β عدداً اساسياً فحاصل ضربهما (يكتب $\propto$ β) هو العدد الأساسي الى المجموعة $A \times B$ حيث $\#(B) = \beta$ و

$\#(A) = \propto$.

مبرهنة: ليكن كل من $\propto$ و β و γ عدداً اساسياً فأن الخواص الاتية تحقق

1) الخاصية التجميعية للضرب $\propto(\beta\gamma) = (\propto\beta)\gamma$
2) الخاصية التبديلية للضرب $\propto\beta = \beta\propto$
3) قوانين التوزيع للضرب على الجمع

$$(\beta+\gamma)\propto = \beta\propto + \gamma\propto$$
$$\propto(\beta+\gamma) = \propto\beta + \propto\gamma$$

مبرهنة: اذا كان $N_0 = \#(\mathbb{N})$ $C = \#([0,1])$

فأن

1) $N_0 N_0 = N_0$

2) $N_0 C = C$

3) $CC = C$

ملاحظات

1) لاحظ انه لايمكننا تعريف القسمة للاعداد الأساسية حيث انة يوجد نظير لعملية الضرب

فالمعادلة $CX = C$ مثلاً لها حلول التالية

1) X أي عدد أساسي منة

2) $X = N_0$

3) $X = C$

2) لايتحقق قانون الحذف فيما يخص عملية الضرب فمثلاً

$$N_0 N_0 = N_0 = 1.N_0$$

ولكن $N_0 \neq 1$

كذلك $CC = CN_0$

لكن $C = N_0$

تعريف: المجموعة القابلة للعد

لتكن A مجموعة يقال ان A مجموعة قابلة للعد اذا وجد تطبيق $f: A \to \mathbb{N}$ بحيث ان f تطبيق تقابل بعبارة أخرى

$$A \text{ قابله للعد } \leftrightarrow f: A \to \mathbb{N} \text{ تقابل}$$

حيث $\mathbb{N}$ هي مجموعة الاعداد الطبيعية.

تم
بحمد الله