حل (١٠)

Chapter four

The Free Particle الجسيم الحر

* الجسيم الحر : هو الجسيم الذي لا يتعرض الى اي قوة خارجية، أي انه الجسيم الذي يتحرك في مجال ذو طاقة كامنة ثابتة ، اي ان انطلاق الجسيم ثابت ،

* لنفرض جسيم حر كتلته m يتحرك في بعد واحد ، فالمؤثر الهاملتوني له يكتب بالشكل :-

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V \quad \text{.......} (1)$$

(١) معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن للجسيم الحر :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U(x)}{dx^2} + V\,U(x) = E\,U(x) \qquad * -\frac{2m}{\hbar^2}$$

وتصغير المعادلة :-

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)U(x) = 0 \quad \text{.....} (2)$$

* اذا كان الجسيم حراً في كل حركة $\Leftarrow V = 0 \Leftarrow$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar}U(x) = 0 \quad , \text{ Let } \boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\therefore \frac{d^2U(x)}{dx^2} + k^2U(x) = 0 \quad \text{.......} (3)$$

* حل المعادلة (3) هو عبارة عن دالة الموجة المستوية وبالشكل :-

$$U(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{------} \quad (4)$$

Since, $E = T + V$ and $V = 0$

$$\Rightarrow E = T = \frac{P_x^2}{2m} \Rightarrow P_x^2 = 2mE$$

But $2mE = k^2\hbar^2 \Rightarrow P_x^2 = \hbar^2 k^2 \Rightarrow P_x = k\hbar$

So, $\boxed{k = \frac{P_x}{\hbar}}$

العلاقة (4) اعلاه ، تمثل حركة الجسيم الحر كليا باتجاه $+x$ و $-x$ وبزخم $P_x = \hbar k$.

* اذا كان الجسيم حراً كلياً ⟸ لا يمكن ايجاد الاحتمالية الكلية له ، وكما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^*(x)\, U(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-ikx} A e^{ikx} dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$$

ونفس النتيجة في حالة استخدام الجزء Be^{-ikx} من المعادلة رقم (4) .

* مما سبق ، يتضح انه لا وجود لحالة الجسيم الحر كلياً ، لذلك سندرس حالة اخرى وهي الجسيمات المقيدة . وهذه الحالة الجديدة هي الحركة جسيم ضمن بئر الجهد .

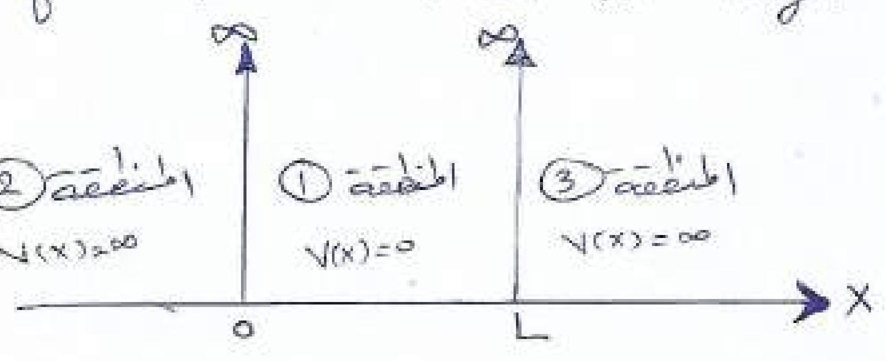
* بئر الجهد Potential Well : هو تمثيل رياضي لحركة جسيم في منطقة محددة يكون فيها الجهد ثابت ، (الجسيم حر الحركة) ، واذا اقترب الجسيم من حدود هذه المنطقة فسيتعرض الى قوة كبيرة بسبب وجود انحدار عالٍ في الجهد وهذه القوة تجبر الجسيم على العودة الى داخل المنطقة المسموحة للحركة . لذلك تمثل حافات بئر الجهد بجدران عالية وارتفاعها إما محدود أو ∞ .

---

(2) جسيم محصور في بئر جهد احادي البعد .

(أ) بئر الجهد ذو الجدران الصلبة

Square Potential Well with Rigid Walls



$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x<0 \\ 0 & : 0<x\leq L \\ \infty & : x>L \end{cases}$$

* عند وضع الجسيم الحر داخل بئر جهد لانهائي فأن الجسيم يصبح مقيداً ، اي انه يكون حراً فقط داخل بئر الجهد (المنطقة ①) .

* لأيجاد الدالة الذاتية والطاقة الذاتية لجسيم في بئر جهد ، نستخدم المعادلة (2) وكما يلي :-

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\,U(x) = 0$$

* في المنطقة $x<0$ والمنطقة $x>L$ ، الجهد $V(x)=\infty$ ، وهذا يعني ان الجسيم لا يمكنه تجاوز جدران البئر ولن يتواجد

أبداً في هاتين المنطقتين ، أي أن $U_2(x)=0$ و $U_3(x)=0$ «الدوال الموجية خارج بئر الجهد = صفراً لعدم تواجد الجسيم في خارج البئر».

* في المنطقة $0 \leq x \leq L$ «المنطقة ①» هي داخل بئر الجهد وهنا $V=0$ المعادلة (2) ستصبح كما في المعادلة رقم (3) مع استبدال $U(x)$ بـ $U_1(x)$:

$$\frac{d^2U_1(x)}{dx^2}+K^2U_1(x)=0 \quad \text{......}(5)$$

* حل المعادلة (5) هو نفسه تماماً المعادلة (4) ، أي أن :

$$U_1(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad \text{......}(6)$$

* نطبق الشروط الحدودية لإيجاد قيم الثوابت A و B «شرط الاستمرارية» :

$$U_1(0) = U_2(0)$$

But outside of potential well $U_2(0)=0$, So $U_1(0)=0$

$\Rightarrow$ eq. (6) will be $=0$:

$$A\underbrace{\sin(0)}_{=0}+B\underbrace{\cos(0)}_{=1}=0 \quad \Rightarrow A\neq 0 \text{ and } B=0$$

Also, $U_1(L) = U_3(L) = 0$ لنفس السبب السابق «لعدم تواجد الجسيم خارج بئر الجهد».

we have $B=0$, So eq. (6) will be:

$$A\sin(KL)=0 \Rightarrow KL=n\pi \Rightarrow \boxed{K=\frac{n\pi}{L}}$$

$$, \boxed{n=1,2,3,\text{.....}}$$

from $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2} \quad \text{------} (7)$$

المعادلة (7) هي طاقة جسيم مقيد الحركة في بئر جهد ذو جدران لانهائية م
وهي طاقة مكممة (منفصلة / متميزة / غير متصلة).

* بعد معرفة قيمة $B=0$ فأن معادلة (6) ستصبح :-

$$U_1(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{.......} (8)$$

المعادلة (8) تمثل الدالة الذاتية للجسيم الحر المقيد في بئر جهد عرضه L
وطاقته هي كما في المعادلة رقم (7).

* لأيجاد الثابت A سوف نطبق شرط المعايرة :-

$$\int_0^L U_1^*(x)\, U_1(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^L A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = 1$$

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = 1 \quad , \text{ But } \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow A^2 \int_0^L \left[\frac{1 - \cos\left(2 \frac{n\pi}{L} x\right)}{2}\right] dx = 1 \quad \text{--------} (*)$$

التكامل في (A)

$$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\left[\int_0^L dx - \int_0^L \cos\left(2\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[L - \frac{L}{2\pi n}\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\cdot\frac{2\pi n}{L}\cdot dx\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[L - \underbrace{\frac{L}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\Big|_0^L}_{=0}\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}L \text{ ------ } (*2)$$

نعوض (*2) في (*) ⇐

$$\frac{A^2 L}{2} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

$$\therefore \quad \boxed{u_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \text{ ------- } (9)$$

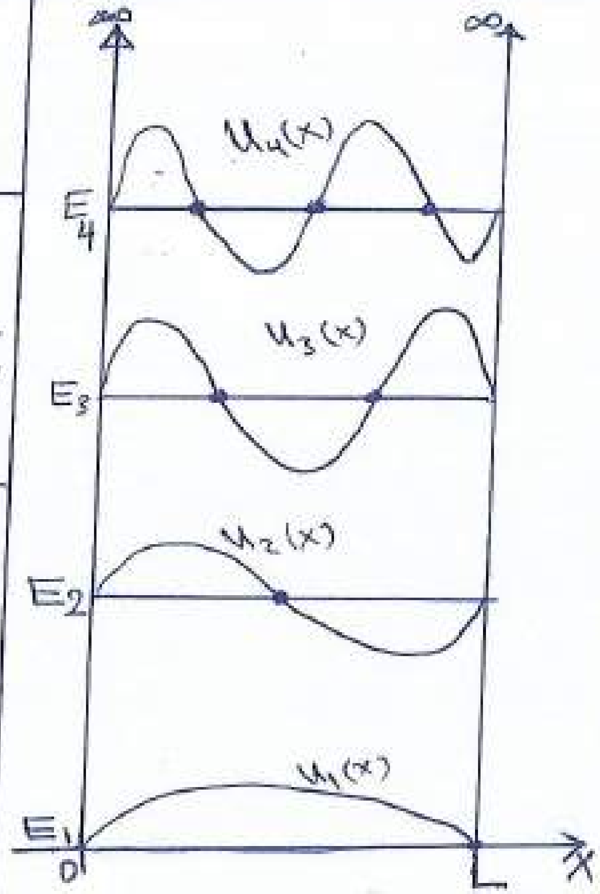
الصيغة النهائية لمعادلة الدالة الذاتية لجسيم حر داخل بئر الجهد .

* شرط المعايرة والتعامد orthonormalization Condition :

$$\int_0^L u_m^*(x)\, u_n(x)\, dx = \delta_{mn} \begin{cases} = 0 & : m \neq n \quad \text{تعامد} \\ = 1 & : m = n \quad \text{عيارية} \end{cases}$$

* الدالة الموجية المعتمدة على الموقع والزمن $\Psi(x,t)$ هي عبارة عن حاصل ضرب المعادلة (9) مع الجزء المعتمد على الزمن ، أي أن :

$$\boxed{\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-iE_n t/\hbar}} \text{ ------ } (10)$$

n	$U_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$	$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$	fig. of $U_n(x)$, $0\leq x\leq L$	nodes $(n-1)$	Parity
1	$U_1(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$	$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$		0	زوجي
2	$U_2(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$	$E_2=4\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}=4E_1$		1	فردي
3	$U_3(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$	$E_3=9E_1$		2	زوجي
4	$U_4(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right)$	$E_4=16E_1$		3	فردي

* تماثل الدالة هو عكس قيم المستوى ، وعدد العقد في المنحنى $= n-1$.
* فرق الطاقة بين مستويين متتاليين مثلاً $n=1$, $n=2$ ⇐

$$\Delta E_{21}=E_2-E_1$$
$$=4E_1-E_1=3E_1=\frac{3}{2}\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\quad,\quad \Delta E_{32}=?\ \text{and}\ \Delta E_{43}=?$$

Ex: Use the uncertainty principle to prove that the minimum energy of a particle in the potential well giving by: $E_{min} \approx \dfrac{\hbar^2}{2mL^2}$. $\left(\langle X^2 \rangle = \int_0^L X^2 U_n^*(x) U_n(x) dx = L^2 \right)$

Sol.

inside the well : $V = 0 \Rightarrow E = T = \dfrac{P_x^2}{2m}$

$$\Rightarrow E_{min} = \frac{(\Delta P_x)^2}{2m} \quad \ldots\ldots (a)$$

$$\Delta X \Delta P_x \simeq \hbar$$

$$\Delta P_x = \frac{\hbar}{\Delta X} \quad \ldots\ldots (b)$$

$$\langle X \rangle = \int_0^L U^*(x)\, x\, U(x)\, dx$$

$$= \int_0^L \underbrace{x}_{\text{فردي}} \underbrace{\left[\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin\left(\tfrac{n\pi}{L} x\right)\right]^2}_{\text{زوجي}} dx = 0$$

$$\langle X^2 \rangle = \int_0^L x^2 \left[\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin\left(\tfrac{n\pi}{L} x\right)\right]^2 dx = L^2$$

$$(\Delta X) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{L^2} = L \quad \ldots\ldots (c)$$

نعوض (c) في (b) ثم في (a) :-

$$E_{min} = \frac{\hbar^2 / L^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

* مقارنة بين النظرية الكلاسيكية والكمية :

النتائج الكمية	النتائج الكلاسيكية
① طاقة الجسيم تكون مكممة وحسب العلاقة رقم (7) بحيث يكون طيف الطاقة طيفاً متميزاً.	الجسيم ممكن ان يمتلك اي طاقة دون تحديد وذات طيف متصل مستمر.
② الطاقة الدنيا E_1 وهي لا تساوي صفراً	الجسيم ممكن ان يكون ساكناً وطاقته = صفر.
③ احتمالية تواجد الجسيم في اي مكان داخل البئر $\psi_1^*(x)\,\psi_1(x) = \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$	الاحتمالية كمية ثابتة.

* من العلاقة (7) ، ان الطاقة تتناسب مع $\frac{1}{L^2}$ ← عند زيادة عرض بئر الجهد فأن قيم الطاقة تتقارب اكثر. عندما تكون $L \to \infty$ فأن مستويات الطاقة تصبح متصلة وغير مكممة ، اي ان $\Delta E = 0$ وتشكل طيفاً مستمراً.

كذلك الحال بالنسبة لزيادة كتلة الجسيم m .

⟸ اذا $L \to \infty$ و/أو $m \to \infty$ فأن النتائج الكمية ستطابق النتائج الكلاسيكية.

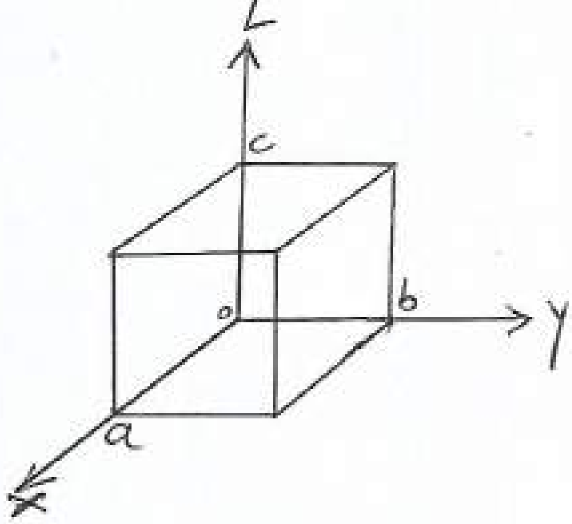
11

(٣) الجسيم الحر في صندوق الجهد ذي الأبعاد الثلاثة

Free particle in a Potential Box in three dimensions

* وهي الحالة العامة لحالة الجسيم الحر في صندوق الجهد في بعد واحد ، بحيث يمكن تصور صندوق ابعاد اضلاعه a, b, c على التوالي وان الجهد داخل الصندوق $V=0$ وخارج الصندوق $V=\infty$ مع استحالة تواجد الجسيم خارج هذا الصندوق .

* بما ان الجهد خارج الصندوق $V=\infty$ ⇐ الجسيم لا يتواجد خارج الصندوق
⇐ الدالة الموجية خارج الصندوق $u(\vec{r})=0$



* حل معادلة شرودنگر داخل الصندوق : نتبع نفس الخطوات لحالة الجسيم داخل بئر الجهد في بعد واحد مع الأخذ بالأعتبار هنا الابعاد الثلاثة X و Y و Z ⇐

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 u(\vec{r}) = E\, u(\vec{r}) \quad \text{-----}(11)$$

$$\text{Where } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z)$$

M : كتلة الجسيم ، وهنا كتبت بالحرف الكبير بدلاً من الحرف الصغير لكي تتميز عن معادلات بئر الجهد ذي البعد الواحد . وليس ان الكتلة تغيرت .

* نضرب طرفي المعادلة (11) بـ $-\frac{2M}{\hbar^2}$ ونرتب الحدود ونصفر المعادلة :-

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(r)}{\partial z^2} + K^2 U(r) = 0 \quad \text{------} (12)$$

$$\text{where } K^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} \Rightarrow K = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar} \quad \text{-----} (13)$$

$$E = T = \frac{P^2}{2M} = \frac{1}{2M}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) \quad \text{-------} (13)^*$$

من (13) و $(13)^*$:-

$$\left.\begin{array}{l} K^2 \hbar^2 = 2ME \\ \left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) = 2ME \end{array}\right\} \Rightarrow K^2 = \frac{\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow K_x^2 = \frac{P_x^2}{\hbar^2} = \alpha^2 \quad , \quad K_y^2 = \frac{P_y^2}{\hbar^2} = \beta^2 \quad , \quad K_z^2 = \frac{P_z^2}{\hbar^2} = \gamma^2$$

$\therefore$ eq (12) can be written as:

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(r)}{\partial z^2} + \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) U(r) = 0 \quad \text{----} (14)$$

* نستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل معادلة (14) :-

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = X_{(x)}\, Y_{(y)}\, Z_{(z)} \quad \text{----} \quad (15)$$

فعوض (15) في (14) وثم نقسم على حاصل ضرب الدوال الثلاث XYZ ($U(r)$) :-

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y_{(y)}}\frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} + \frac{1}{Z_{(z)}}\frac{\partial^2 Z_{(z)}}{\partial z^2} + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0 \quad \text{------} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{X_{(x)}}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 X(x) = 0\\
&\frac{1}{Y_{(y)}}\frac{\partial^2 Y_{(y)}}{\partial y^2} + \beta^2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \beta^2 Y_{(y)} = 0\\
&\frac{1}{Z_{(z)}}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \gamma^2 Z_{(z)} = 0
\end{aligned}\right\} \text{......} (17)$$

وكما مرّ سابقاً فأن الحل العام لكل معادلة تفاضلية اعلاه (معادلة (17)) هو :-

$$\left.\begin{aligned}
X_{(x)} &= A_1 \sin(\alpha x) + B_1 \cos(\alpha x)\\
Y_{(y)} &= A_2 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y)\\
Z_{(z)} &= A_3 \sin(\gamma z) + B_2 \cos(\gamma z)
\end{aligned}\right\} \text{-----} (18)$$

* وكما مرّ في الحالة السابقة لبئر الجهد في البعد الواحد ، عند تطبيق الشرط الحدودي الاول

$x=y=z=0$ فأن $B=0$ و $A\neq 0$ $\Leftarrow$

$$
\left.\begin{aligned}
X_{(x)} &= A_1 \sin(\alpha x) \\
Y_{(y)} &= A_2 \sin(\beta y) \\
Z(z) &= A_3 \sin(\gamma z)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (19)
$$

وبتطبيق الشرط الحدودي الثاني $x=a$, $y=b$, $z=c$ فإن :

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha a &= n_x \pi = l\pi \quad , l = 1,2,3,\ldots \\
\beta b &= n_y \pi = m\pi \quad , m = 1,2,3,\ldots \\
\gamma c &= n_z \pi = n\pi \quad , n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (20)
$$

OR $\quad \alpha = \frac{l\pi}{a} \quad , \beta = \frac{m\pi}{b} \quad , \gamma = \frac{n\pi}{c} \quad \cdots\cdots (21)$

* نعوض (21) في (19) ⇐

$$
\left.\begin{aligned}
X_{(x)} &= A_1 \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \quad ; \quad 0 \leqslant x \leqslant a \\
Y_{(y)} &= A_2 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad ; \quad 0 \leqslant y \leqslant b \\
Z_{(z)} &= A_3 \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right) \quad ; \quad 0 \leqslant z \leqslant c
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (22)
$$

⇐ الدالة الموجية غير المعتمدة على الزمن في الابعاد الثلاثة ستكون :

$$
\boxed{U_{lmn}(x,y,z) = \underbrace{A_1 A_2 A_3}_{= A_{3d}} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{c} z\right)} \cdots\cdots (23)
$$

وهي دالة حقيقية .

* ايجاد ثابت المعايرة A_{3d} :

$$\int_0^c\int_0^b\int_0^a U^*(x,y,z)\,U(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 1$$

$$A_{3d}^2 \int_0^c\int_0^b\int_0^a \sin^2\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{c}z\right) dx\,dy\,dz = 1$$

$$A_{3d}^2\left[\underbrace{\left(\int_0^a \sin^2\left(\frac{l\pi}{a}x\right)dx\right)}_{\frac{a}{2}}\underbrace{\left(\int_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy\right)}_{\frac{b}{2}}\underbrace{\left(\int_0^c \sin^2\left(\frac{n\pi}{c}z\right)dz\right)}_{\frac{c}{2}}\right] = 1$$

H.w. H.w.

$$A_{3d}^2\left[\frac{abc}{8}\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{3d} = 2\sqrt{\frac{2}{abc}}} \quad \text{-----}(24)$$

* لإيجاد القيم الذاتية للطاقة :

$$K^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2 \quad \text{-----}(25)$$

But $K^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$

$$E = \frac{\hbar^2}{2M}K^2$$

$$\therefore \boxed{E_{lmn} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2M}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)} \quad \text{------}(26)$$

* عندما يكون صندوق الجهد ذو ابعاد متساوية (مكعب) بحيث ان $a=b=c=L$:

$$\boxed{E_{lmn}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}\left(l^2+m^2+n^2\right) = E_{1(1d)}\left(l^2+m^2+n^2\right)} \quad \text{.....(27)}$$

∴ مستوى الطاقة E_{lmn} يعتمد على المقدار $(l^2+m^2+n^2)$.

في جميع الحالات التي تكون فيها الاعداد الكمية l,m,n مرتبة بشكل يعطي نفس القيمة للمقدار $(l^2+m^2+n^2)$ تكون طاقاتها متساوية ⇐ ان الدوال الموجية تتغير بينما لا يتغير مستوى الطاقة ⇐ نصف طاقة منحل بدرجة انحلال (g) .

درجة الانحلال (g): وتساوي عدد الترتيبات المختلفة للأعداد الكمية l,m,n التي تعطي نفس القيمة للمقدار $(l^2+m^2+n^2)$ وبالتالي تعطي نفس قيمة الطاقة .

ملاحظات:

* في الحالة التي تكون فيها $a=b=c=L$ ⇐ $A_{3d}=2\sqrt{\frac{2}{L^3}}$
* $E_{1(1d)}$ هي طاقة المستوى الارضي لبئر الجهد احادي البعد $=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$
* l,m,n هي اعداد صحيحة، وتقرأ وتكتب بالترتيب : l ثم m ثم n .
* $l \xrightarrow{\text{يقابل}} x \quad , \quad m\rightarrow y \quad , \quad n\rightarrow z$
* كل قيمة للأعداد l,m,n تمثل مستوى طاقة معين ،
* الجدول اللاحق يوضح مستويات الطاقة والدوال الموجية ودرجة الانحلال لجسيم في صندوق جهد مكعب طول ضلعه L .

قيم الاعداد l, m, n	قيمة المقدار $(l^2+m^2+n^2)$	$E_{lmn} = E_{1d}(l^2+m^2+n^2)$	الحالة المستقرة	الدالة الموجية $U_{lmn}(x,y,z)$ (eq.(23))	درجة الانحلال
$1, 1, 1$	3	$E_{111} = 3\,E_{1(1d)}$	المستوى الارضي	$U_{111} = A_{3d}\sin(\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)$	صفر
$2, 1, 1$ $1, 2, 1$ $1, 1, 2$	6	$\left.\begin{array}{l} E_{211} = \\ E_{121} = \\ E_{112} = \end{array}\right\} 6\,E_{1(1d)}$	المستوى المثار الأول	$U_{211} = A_{3d}\sin(2\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)$ $U_{121} = A_{3d}\sin(\frac{\pi}{L}x)\sin(2\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)$ $U_{112} = A_{3d}\sin(\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(2\frac{\pi}{L}z)$	3
$2, 2, 1$ $2, 1, 2$ $1, 2, 2$	9	$\left.\begin{array}{l} E_{221} = \\ E_{212} = \\ E_{122} = \end{array}\right\} 9E_{1(1d)}$	المستوى المثار الثاني	$U_{221} = A_{3d}\sin(2\frac{\pi}{L}x)\sin(2\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)$ $U_{212} = \ldots\ldots$ $U_{122} = \ldots\ldots$	3
$3, 1, 1$ $1, 3, 1$ $1, 1, 3$	11	$\left.\begin{array}{l} E_{311} = \\ E_{131} = \\ E_{113} = \end{array}\right\} 11E_{1(1d)}$	المستوى المثار الثالث	$U_{311} = A_{3d}\sin(3\frac{\pi}{L}x)\sin(\frac{\pi}{L}y)\sin(\frac{\pi}{L}z)$ $U_{131} = - - - - -$ $U_{113} = - - - - -$	3
H.W.	H.W.	H.W.	H.W.	H.W.	H.W.

٤ كثافة الحالات Density of States :

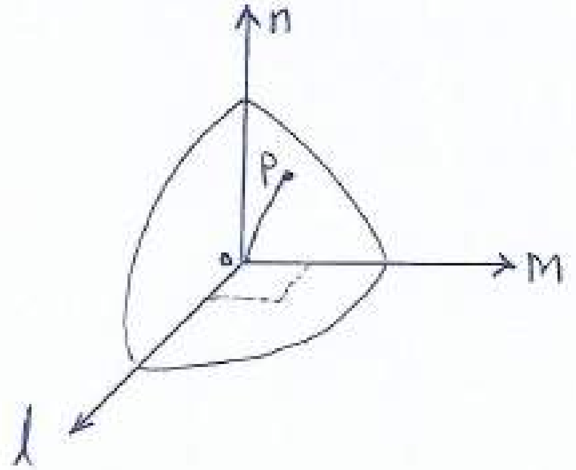
* ان مصطلح كثافة الحالات يشير الى كيفية ترتيب الحالات الكمية في نظام ما.
* تعرّف كثافة الحالات بأنها عدد الحالات الكمية لكل وحدة (مستوى) طاقة (تعريف رقم ١).
* كثافة الحالات مهمة جداً في تحديد الصفات البصرية للمواد وخصوصاً اشباه الموصلات (مثل انابيب الكاربون النانوية والنقاط الكمية).
* عندما يكون صندوق الجهد كبيراً جداً ← $\Delta E \neq 0$ ← طيف الطاقة متكمم ←
يمكن حساب عدد الحالات الكمية لمدى الطاقة باعتبار n , m , l محاور تمثل فضاءاً معيناً وكل نقطة في هذا الفضاء تمثل مستوى طاقة معين.
* نفرض ان : $l^2+m^2+n^2=R^2$ ⟸ عدد النقاط مثل نقطة P (التي لها الاحداثيات بأعداد كمية صحيحة موجبة) تقع على سطح كروي نصف قطره R مساوياً لعدد الحالات (ترتيب الاعداد l,m,n) المرافقة لذلك المستوى من الطاقة :

$$E_{lmn}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}\left(l^2+m^2+n^2\right)$$

$$=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ML^2}R^2 \Rightarrow R=\left(\frac{2ML^2E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{R=\frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{2ME}} \quad \text{-------} (1)$$

* لإيجاد عدد الحالات $N(E)$ في مدى طاقة بين 0 و E ← من الضروري حساب حجم جزء الكرة الموضح أدناه والذي يساوي $\frac{1}{8}$ من الحجم الكلي للكرة.



$$N(E) = \frac{1}{8}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right]$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi \left(R^2\right)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi \left[\frac{L^2}{\pi^2 \hbar^2}\,2ME\right]^{3/2}$$

$$\Rightarrow N(E) = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi \frac{L^3}{\pi^3 \hbar^3}\left(2ME\right)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi \frac{L^3}{\pi^3 \frac{h^3}{8\pi^3}}\underbrace{\left[(2M)^3\right]^{1/2}}_{=2\sqrt{2M^3}} E^{3/2}$$

و $L^3 = V =$ حجم المكعب

$$\therefore \boxed{N(E) = \frac{8}{3}\,\frac{\pi}{h^3}\,V\,\left(2M^3\right)^{1/2} E^{3/2}} \quad \text{-----}(2)$$

* للحصول على عدد الحالات الكمية ضمن مدى تفاضلي للطاقة dE ، أي بين E و $E+dE$ ، نفاضل العلاقة (2) بالنسبة للطاقة :-

$$g(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{d}{dE}\left[\frac{8}{3}\,\frac{\pi}{h^3}\,V\left(2M^3\right)^{1/2} E^{3/2}\right]$$

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3}\left(2M^3\right)^{1/2} E^{1/2} \quad \text{-------}(3)$$

* $g(E)$ تسمى كثافة الحالات . وهي تمثل عدد الحالات لوحدة مدى الطاقة dE عند الطاقة E . (التعريف الثاني).

* في بعض الأوقات تعرف كثافة الحالات بدلالة الزخم الخطي ويمكن كتابة العلاقة رقم (3) ضمن مدى الزخم dp بين p و $p+dp$ وكالآتي :-

$$\frac{dN(E)}{dE} = g(E) \longrightarrow dN(E) = g(E)\, dE$$

So can be writte: $dN(E) = g(p)\, dp$

$$g(p) = \frac{dN(E)}{dp}$$

$$= \frac{dN(E)}{dE}\,\frac{dE}{dp} \Rightarrow g(p) = g(E)\,\frac{dE}{dp} \quad \text{....(4)}$$

$$E = \frac{p^2}{2M} \longrightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{2p}{2M} = \frac{p}{M} \quad \text{....(5)}$$

الآن نعوض العلاقات (3) و(5) في (4) :-

$$g(p) = \frac{4\pi V}{h^3}\,(2M^3)^{1/2}\,\left(\frac{p^2}{2M}\right)^{1/2}\,\frac{p}{M}$$

$$\therefore \boxed{g(p) = \frac{4\pi V}{h^3}\, p^2} \quad \text{------(6)}$$

* كذلك تستخدم العلاقة (6) لعدد الأنماط للموجات الطولية المحصورة في الحجم V ، وفي هذه الحالة يفضل استخدام التردد بدلاً من الزخم ⟸ :-

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{c}{\nu}} = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow \frac{dp}{d\nu} = \frac{h}{c} \quad \text{---(7)}$$

حيث ان c تمثل سرعة الطور للموجة المتنقلة .

$$g(p)\,dp = g(\nu)\,d\nu \Rightarrow g(\nu) = g(p)\frac{dp}{d\nu} \quad ---(8)$$

الآن نعوض العلاقات (6) و(7) في (8) :-

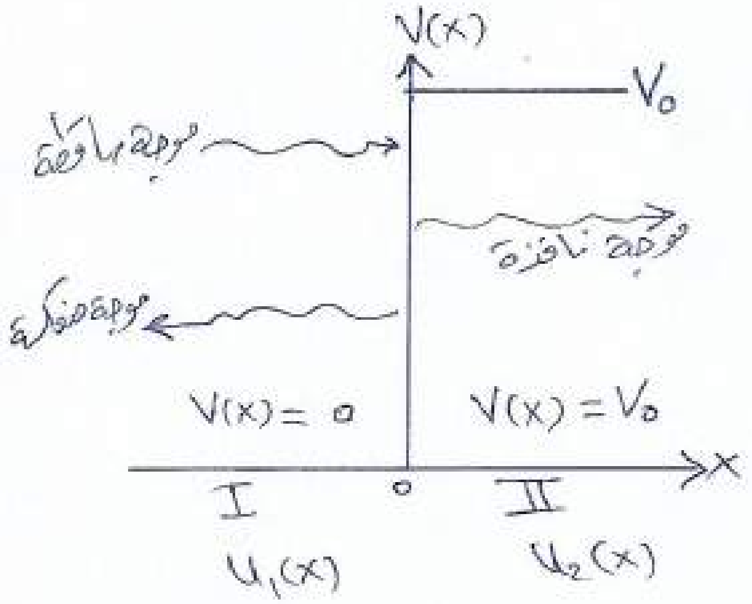
$$g(\nu) = \frac{4\pi V}{h^3}\,\frac{h^2\nu^2}{c^2}\,\frac{h}{c}$$

$$\boxed{g(\nu) = \frac{4\pi V}{c^3}\,\nu^2} \quad ----(9)$$

Potential Barrier / Step of Potential ⑤

حاجز الجهد / عتبة الجهد

* الشكل التالي يوضح حركة حزمة من الجسيمات من المنطقة I الى II على محور X .

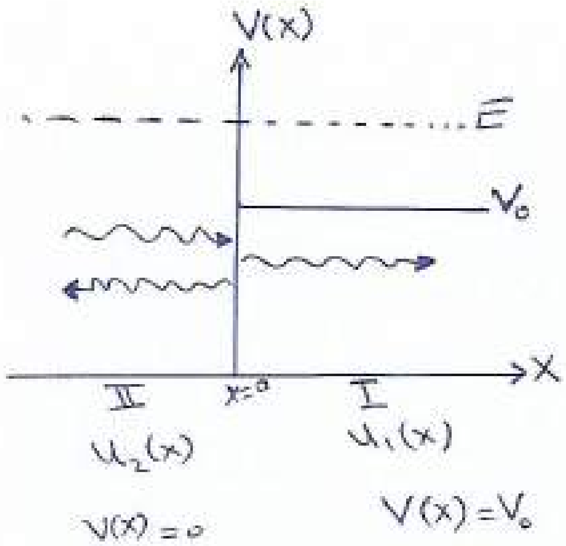


* هذه الجسيمات تصطدم بحاجز الجهد $V(x) = V_0$ عند $x=0$ ، حيث ان :-

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x<0 \\ V_0 & : x \geq 0 \end{cases}$$

* دوال الموجة للجسيم هي $u_1(x)$ في المنطقة I و $u_2(x)$ في المنطقة II .

* هناك حالتين للطاقة الكلية للجسيم ، وهي :- $E > V_0$ و $E < V_0$ ،



* الحالة الأولى : $E > V_0$;

نطبق معادلة شرودنگر غير المعتمدة على الزمن في المنطقتين I و II :

$$\text{II}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}U_2(x) = E\,U_2(x) \qquad : V = 0$$

$$\text{I}: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}U_1(x) + V_0\,U_1(x) = E\,U_1(x) \qquad : V = V_0$$

بداية نأخذ المنطقة خارج حاجز الجهد (المنطقة II) :-

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}U_2(x) - E\,U_2(x) = 0 \qquad * -\frac{2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2U_2(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}U_2(x) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{d^2U_2(x)}{dx^2} + \alpha^2 U_2(x) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2}} \quad \ldots\ldots (3)$$

الحل العام للمعادلة (2) هو :-

$$\boxed{U_2(x) = \underbrace{A\,e^{i\alpha x}}_{\text{يمثل موجة ساقطة}} + \underbrace{B\,e^{-i\alpha x}}_{\text{موجة منعكسة}}} \quad \ldots\ldots (4)$$

في المنطقة داخل حاجز الجهد (المنطقة I) :.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U_1(x)}{dx^2}+(V_0-E)U_1(x)=0$$

$$\frac{d^2U_1(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)U_1(x)=0 \quad \text{......}(5)$$

$$\frac{d^2U_1(x)}{dx^2}+\beta^2U_1(x)=0 \quad \text{......}(6)$$

$$\boxed{\beta^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0) \quad \underline{or} \quad \beta=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar^2}} \quad \text{......}(7)$$

الحل العام للمعادلة (6) هو :.

$$U_1(x)=\underbrace{Ce^{i\beta x}}_{\text{تمثل موجة نافذة الى الداخل}}+\underbrace{De^{-i\beta x}}_{\text{موجة منعكسة من داخل الحاجز الى خارج الحاجز}} \quad \text{......}(8)$$

:. لا يوجد حاجز في المنطقة $x>0$ لكي يعترض طريق الموجة $U_1(x)$ ⟸ لا توجد موجة منعكسة في المنطقة $x>0$ ، المنطقة I ، ⟸ الجزء $De^{-i\beta x}$ في المعادلة (8) غير موجود ⟸ $\boxed{D=0}$ ⟸

$$\boxed{U_1(x)=Ce^{i\beta x}} \quad \text{......}(9)$$

* بعد الحصول على حل معادلة شرودنكر في المنطقتين (I ، II) ، لابد من ايجاد قيم الثوابت A, B, C وذلك من خلال تطبيق الشروط الحدودية :.

$U_1(x)=U_2(x)$: استمرارية الدالة عند حدود المنطقة

$U_1'(x)=U_2'(x)$: " مشتقة الدالة " " "

من معادلات (4) للمنطقة II و (9) للمنطقة I :

$$U_2(0) = U_1(0)$$

$$A e^{0} + B e^{0} = C e^{0} \Rightarrow A + B = C \quad \text{------}(10)$$

and:

$$\left.\frac{dU_2(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dU_1(0)}{dx}\right|_{x=0} \quad \xRightarrow{\text{من معادلة (4)}} U_2'(x) = i\alpha A e^{i\alpha x} - i\alpha B e^{-i\alpha x}$$

$$\xRightarrow{\text{من معادلة (9)}} U_1'(x) = i\beta C e^{i\beta x}$$

$$\Rightarrow U_2'(0) = i\alpha A e^{0} - i\alpha B e^{0} = U_1'(0) = i\beta C e^{0}$$

$$\Rightarrow \cancel{i}\alpha A - \cancel{i}\alpha B = \cancel{i}\beta C \quad \text{------}(11)$$

نعوض (10) في (11) ⇐

$$\alpha A - \alpha B = \beta A + \beta B$$

$$\alpha A - \beta A = \alpha B + \beta B \Rightarrow \boxed{B = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} A} \quad \text{-----}(12)$$

نعوض (12) في (10) :

$$A + \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) A = C$$

H.W.

$$\therefore \boxed{C = \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta}\right) A} \quad \text{--------}(13)$$

⇐ الحلول العامة النهائية ستكون :

$$U_2(x) = A e^{i\alpha x} + \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right) A e^{-i\alpha x} \quad \text{.......}(14) \qquad \text{للمنطقة } x<0$$

$$\boxed{U_1(x) = \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta}\right) A e^{i\beta x}} \quad \text{-------}(15) \qquad \text{للمنطقة } x \geq 0$$

* للمنطقة II ، $x>0$ ، لا توجد موجة منعكسة لأن $E>V$ ولذلك لا ينعكس
⇐ الجزء $e^{-i\alpha x}$ لا وجود له ⇐ المعادلة النهائية للحل في هذه المنطقة هو :-

$$\boxed{u_2(x) = A\, e^{i\alpha x}} \quad \text{.....(16)}$$

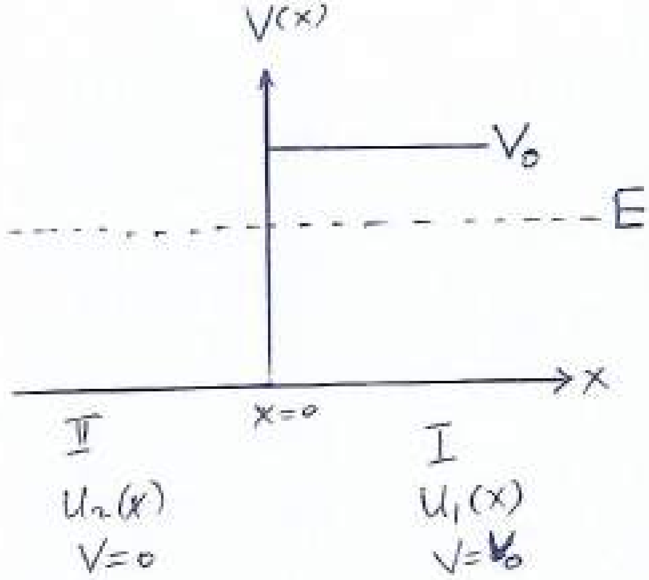
---

* الانعكاسية Reflectivity : وتمثل نسبة الاشعاع المنعكس بالنسبة للموجة الساقطة على حاجز الجهد ، ويرمز لها بالرمز R . وتساوي :-

$$\boxed{R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^* \left(\frac{B}{A}\right) = \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2}} \quad \text{.......(17)}$$

* النفاذية Transmision : وتمثل نسبة الاشعاع النافذ خلال حاجز الجهد نسبة الى الموجة الساقطة، ويرمز لها بالرمز T ، وتساوي :-

$$\boxed{T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \left(\frac{C}{A}\right)^* \left(\frac{C}{A}\right) = \frac{4\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}} \quad \text{.......(18)}$$



* الحالة الثانية : $E < V_0$

نتبع نفس الاسلوب السابق في الحالة الاولى ، وذلك بحل معادلة شرودنكر غير المعتمدة على الزمن في المنطقتين I و II .

* في المنطقة II : $X<0 \;,\; V=0 \;,\; E<V_0$.

$$\frac{d^2U_2(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}U_2(x) = 0 \quad , \quad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \;,\; \alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

and $$\frac{d^2U_2(x)}{dx^2} + \alpha^2 U_2(x) = 0$$

والحل العام :

$$\boxed{U_2(x) = A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}} \quad \text{-----}(19)$$

* في المنطقة I : $X \geq 0 \;،\; V=V_0 \;،\; E<V_0 \;\therefore$

$$\frac{d^2U_1(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)U_1(x) = 0$$

$$\beta^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$$

$$U_1''(x) + \beta^2 U_1(x) = 0$$

والحل العام :

$$U_1(x) = C e^{-i\beta x} + D e^{+i\beta x}$$

ص٢٥

$$\beta^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$$

ولكن هنا V_0 أكبر من E $\Leftarrow$

$$\beta^2 = -\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{\beta = \underbrace{\sqrt{-1}}_{=i}\ \underbrace{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}_{=\beta'}}$$

$$\therefore \boxed{\beta = i\beta'} \quad \text{------(20)}$$

$$\Rightarrow U_1(x) = C e^{\beta' x} + D e^{-\beta' x} \quad \text{------(21)}$$

ولكي تكون الدالة $U_1(x)$ في المعادلة (21) مقبولة فيزيائياً فيجب أن تتلاشى عند $x=\infty$:

$$U_1(\infty) = \underbrace{\underbrace{C}_{\neq 0}\ \underbrace{e^{\infty}}_{\neq 0}}_{=0} + \underbrace{\underbrace{D}_{\neq 0}\ e^{-\infty}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow C = 0 \text{ and } D \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1(x) = D e^{-\beta' x}} \quad \text{------(22)}$$

لإيجاد قيم الثوابت في الحالة الثانية $E < V_0$ (A, B, C) من المعادلات (19) و(22) بتطبيق الشروط الحدودية (الدالة ومشتقاتها تكون مستمرة) :

$$U_2(0) = U_1(0)$$

$$A e^0 + B e^0 = D e^0$$

$$A + B = D \quad \text{------(23)}$$

$$\left.\frac{dU_2(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dU_1(x)}{dx}\right|_{x=0}$$

$$i\alpha A e^{0} - i\alpha B e^{0} = -\beta' D e^{0}$$

$$i\alpha (A-B) = -\beta' D \quad \Rightarrow \quad D = \frac{-i\alpha}{\beta'}(A-B) \quad \text{.....(24)}$$

بتعويض معادلة (24) في معادلة (23) ← :

$$A+B = \frac{-i\alpha}{\beta'}(A-B)$$

$$\beta' A + \beta' B = -i\alpha A + i\alpha B$$

$$A(i\alpha + \beta') = B(i\alpha - \beta')$$

$$\boxed{B = \left(\frac{i\alpha + \beta'}{i\alpha - \beta'}\right) A} \quad \text{.......(25)}$$

وبتعويض (25) في (23) :

$$D = A+B$$
$$= A + \left(\frac{i\alpha+\beta'}{i\alpha-\beta'}\right) A = A\left[1 + \frac{i\alpha+\beta'}{i\alpha-\beta'}\right] = A\left[\frac{i\alpha-\beta'+i\alpha+\beta'}{i\alpha-\beta'}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{D = A\left(\frac{2i\alpha}{i\alpha-\beta'}\right)} \quad \text{.....(26)}$$

وبتعويض المعادلات (25) و(26) في المعادلات (19) و(22) :

$$\boxed{\begin{aligned} U_2(x) &= A e^{i\alpha x} + A\left(\frac{i\alpha+\beta'}{i\alpha-\beta'}\right) e^{-i\alpha x} &&: x<0 \\ U_1(x) &= A\left(\frac{2i\alpha}{i\alpha-\beta'}\right) e^{-\beta' x} &&: x\geq 0 \end{aligned}} \quad \text{.....(27)}$$

س/ هل الموجة الساقطة ذات طاقة E أقل من طاقة حاجز الجهد V_0 ستخترق الحاجز أم لا ؟

أو س/ هل ان معامل النفاذ = صفراً بحيث يحدث انعكاساً كلياً للموجة الساقطة على حاجز جهد طاقته V_0 اعلى من طاقة الموجة E ؟

ج/ نجد كلاً من الانعكاسية R والنفاذية T :

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^*\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{(i\alpha+\beta')^*(i\alpha+\beta')}{(i\alpha-\beta')^*(i\alpha-\beta')}\frac{A^2}{A^2}$$

$$= \frac{(-i\alpha+\beta')}{(-i\alpha-\beta')}\cdot\frac{(i\alpha+\beta')}{(i\alpha-\beta')} = \frac{\alpha^2 - i\alpha\beta' + i\alpha\beta' + \beta'^2}{\alpha^2 + i\alpha\beta' - i\alpha\beta' + \beta'^2}$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta'^2}{\alpha^2+\beta'^2} = 1 \quad \Rightarrow R = 1$$

$$\text{But} \quad R + T = 1 \quad \Rightarrow T = 0$$

للتأكد من قيمة T نحسبها من القانون الخاص بها ، أي أن :

$$T = \left|\frac{D}{A}\right|^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^*\left(\frac{D}{A}\right) = \frac{-2i\alpha}{-i\alpha-\beta'}\cdot\frac{2i\alpha}{i\alpha-\beta'}\cdot\frac{A^2}{A^2}$$

$$= \frac{4\alpha^2}{\alpha^2+\beta'^2} \Rightarrow T \neq 0$$

* كيف تم الحصول على قيمتين للنفاذية $T=0$ و $T\neq 0$ للحالة نفسها ؟

* التفسير الفيزيائي لذلك هو :

ان المقدار $R=\left|\frac{B}{A}\right|^2$ يمثل ثابت الانعكاس وقد وجد انه يساوي $\underline{1}$ ،

اي ان الانعكاسية 100% $\Leftarrow$ ان الجسيمات الساقطة على حاجز الجهد الذي ارتفاعه V_0 $(V_0>E)$ تنعكس انعكاساً كلياً عن الحاجز .

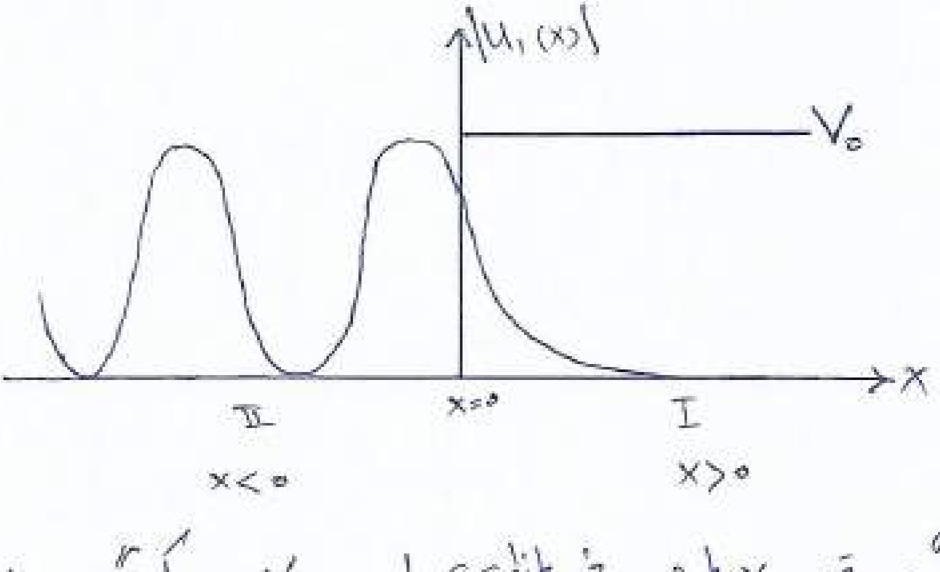
ولكن ثابت النفاذية $T=\left|\frac{D}{A}\right|^2$ وجد انه لا يساوي صفراً $\Leftarrow$ يعني ان الجسيمات اخترقت الحاجز الى المنطقة الممنوعة كلاسيكياً حيث ان $V_0>E$.

لذا يتوجب حساب كثافة احتمالية تواجد الجسيمات في المنطقة الممنوعة كلاسيكياً داخل حاجز الجهد $\Leftarrow$

$$|U_1(x)|^2 = U_1^*(x)\, U_2(x)$$
$$= D e^{-\beta x} . D e^{-\beta x}$$
$$= D e^{-2\beta x}$$

for $x<0 \Rightarrow |U_1(x)|^2 = D^2 e^{2\beta x}$: x is negative

for $x>0 \Rightarrow |U_1(x)|^2 = D^2 e^{-2\beta x}$: x is positive

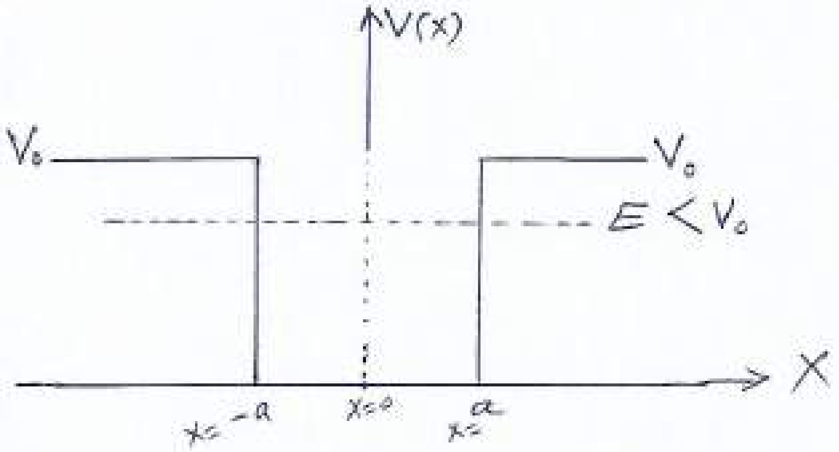


اي ان الدالة تتناقص اسياً مع قيم x الموجبة في المنطقة الممنوعة كلاسيكياً بعد عبور حاجز الجهد V_0 .

٦ بئر الجهد المربع ذو جدران محدودة الارتفاع

Rectangular Potential Well with finite Hight

لدينا حالة جسيم محصور في بئر جهد ارتفاعه V_0 ، بحيث أن :



$$V(x) = \begin{cases} 0 & : -a \leq x \leq a \\ V_0 & : -a \geq x \geq a \\ & \text{or } |x| \geq a \end{cases}$$

I	II	III
$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$
$V = V_0$	$V = 0$	$V = V_0$

في هذه الحالة $E < V_0$ ، نطبق معادلة شرودنگر غير المعتمدة على الزمن في المناطق الثلاث :

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\, u(x) = 0$$

* في المنطقة داخل بئر الجهد $-a \leq x \leq a$ والجهد $V = 0 \Leftarrow$ الجسيم حر الحركة $\Leftarrow$

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} u_2(x) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$u_2''(x) + \alpha^2 u_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)} \quad \text{------} (28)$$

* في المنطقتين خارج بئر الجهد $x < -a$ ، $x > a$ ⇐ $V = V_0 > E$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\,U(x) = 0$$

$$\beta'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

$$U''(x) - \beta'^2 U(x) = 0$$

$$U(x) = C e^{\beta' x} + D e^{-\beta' x} \quad \text{......(29)}$$

* في المنطقة $x < -a$ ⇐ المعادلة (29) :

$$U(-\infty) = \underbrace{C}_{\neq 0} \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} + \underbrace{D}_{=0} \underbrace{e^{+\infty}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\boxed{U_1(x) = C e^{\beta' x}} \quad : x < -a \quad \text{......(30)}$$

* في المنطقة $x > a$ ⇐ المعادلة (29) :

$$U(\infty) = \underbrace{C}_{=0} \underbrace{e^{\infty}}_{\neq 0} + \underbrace{D}_{\neq 0} \underbrace{e^{-\infty}}_{=0} \Rightarrow C = 0$$

$$\therefore \boxed{U_3(x) = D e^{-\beta' x}} \quad : x > a \quad \text{......(31)}$$

---

* نطبق الشروط الحدودية لإيجاد قيم الثوابت A ، B ، C ، D :

A, B ← معادلة (28)

C ← معادلة (30)

D ← معادلة (31)

$$U_1(-a) = U_2(-a)$$

$$C e^{-\beta' a} = -A \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha a) \quad \text{-----}(32)$$

$$\beta' C e^{-\beta' a} = \alpha A \cos(\alpha a) + \alpha B \sin(\alpha a) \quad \text{-----}(33)$$

$$U_2(a) = U_3(a)$$

$$A \sin(\alpha a) + B \cos(\alpha a) = D e^{-\beta' a} \quad \text{-----}(34)$$

$$\alpha A \cos(\alpha a) - \alpha B \sin(\alpha a) = -\beta' D e^{-\beta' a} \quad \text{-----}(35)$$

بجمع المعادلات (32) و (34) $\Leftarrow$

$$2 B \cos(\alpha a) = (C + D) e^{-\beta' a} \quad \text{-----}(36)$$

وبطرح المعادلات (35) من (33) $\Leftarrow$

$$2 \alpha B \sin(\alpha a) = (C + D) \beta' e^{-\beta' a} \quad \text{----}(37)$$

في حالة طرح المعادلة (34) من (32) $\Leftarrow$

$$-2 A \sin(\alpha a) = (C - D) e^{-\beta a}$$

or $\quad 2 A \sin(\alpha a) = -(C - D) e^{-\beta a} \quad \text{----}(38)$

واذا جمعنا المعادلتين (33) و (35) $\Leftarrow$

$$2 \alpha A \cos(\alpha a) = \beta' (C - D) e^{-\beta' a} \quad \text{-------}(39)$$

* اذا قسمنا المعادلة (37) على المعادلة (36) $\Leftarrow$

$$\alpha \tan(\alpha a) = \beta \quad \text{------} (40)$$

وإذا قسمنا المعادلة (39) على (38) $\Leftarrow$

$$\alpha \cot(\alpha a) = -\beta \quad \text{------} (41)$$

$$\text{Let } Z = \alpha a \quad \rightarrow Z = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a \quad \text{------} (42)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} Z^2 \quad \text{------} (43)$$

في الحالة التي تكون فيها $V = E$ فإننا سنفرض أن :-

$$q = \frac{\sqrt{2mV}}{\hbar} a \quad \text{------} (44)$$

$$V = \frac{\hbar^2}{2ma^2} q^2 \quad \text{------} (45)$$

$$\text{we have } \beta = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \text{eq.}(40) \text{ will be: } \alpha \tan(Z) = \beta \quad \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\tan(Z)}$$

$$\Rightarrow \cot(Z) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{------} (46)$$

نعوض عن علاقات α و β في المعادلة (46) :-

$$\cot(Z) = \frac{\sqrt{2m}\,\sqrt{E}\,/\hbar}{\sqrt{2m}\,\sqrt{V-E}\,/\hbar} = \sqrt{\frac{E}{V-E}} \quad \text{------} (47)$$

نعوض العلاقات (43) و (45) في العلاقة (47) $\Leftarrow$

$$\cot(Z) = \sqrt{\frac{\frac{\hbar^2}{2ma^2} Z^2}{\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(q^2 - Z^2\right)}} = \sqrt{\frac{Z^2}{q^2 - Z^2}} \leftarrow \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot(Z) = \sqrt{\frac{Z^2}{q^2 - Z^2}}} \quad \text{------} \quad (48)$$

وبنفس الطريقة، فأن المعادلة (41) ستصبح:

$$\alpha \cot(Z) = -\beta$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{\cot(Z)} = -\tan(Z)$$

$$\therefore \boxed{-\tan Z = \sqrt{\frac{Z^2}{q^2 - Z^2}}} \quad \text{------} \quad (49)$$

* من رسم الدالتين (48) و(49) ومقاطعة المنحنيات فأن نقاط التقاطع تمثل طاقة الجسم في بئر الجهد ذو الارتفاع المحدود. وكما يلاحظ من رسم المنحنيات انها تكون منفصلة بمسافة منتظمة $= \frac{\pi}{2}$. لذا فأن:

$$Z_n = n\frac{\pi}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

وعليه يمكن كتابة [العلاقة (43)]، طاقة الجسم في بئر الجهد ذو الارتفاع المحدود عندما يقترب الجهد من V بالشكل :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} Z^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\pi^2 n^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2} n^2} \quad \text{------} (50)$$

* نلاحظ ان العلاقة (50) والتي تمثل طاقة الجسم في بئر جهد ذي الارتفاع المحدود ب V_0 هي علاقة مشابهة تماماً للعلاقة رقم (7) في ص(١٠٥) لموضوع الجسم الحر في بئر جهد لانهائي . والفرق بين العلاقتين هو ان الطاقة هنا في البئر المحدود هي ربع طاقة الجسم في البئر اللانهائي .

انتهى الفصل الرابع