ص ١٣

معاملات طيف الخطي a_s : نفرض أن دالة موجية مثل $U(\vec{r})$ عند زمن محدد تمثل بالمفكوك :-

$$\boxed{U(\vec{r}) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s\, U_s(\vec{r})} \qquad (54)$$

صيغة الدالة الكلية للنظام

دالة معادلة — دوال معادلة ومعرفة

حيث أن :-

$$\hat{F}\, U_s(\vec{r}) = F_s\, U_s(\vec{r})$$

هذه العلاقة تدل على أن الطيف الخاص بالنظام هو طيف غير متصل ، لأن كل دالة موجية $U_s(\vec{r})$ تقابل مستوى طاقة واحد هو E_s .

فإذا كانت الاحتمالية الكلية تساوي 1 فإن :-

$$\int U^*(\vec{r})\, U(\vec{r})\, d\tau = 1$$

$$\int \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s\, U_s(\vec{r})\right)^* \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_s\, U_s(\vec{r})\right) d\tau$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a_s^* a_s \underbrace{\int U_s^* U_s\, d\tau}_{=1} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{s=0}^{\infty} a_s^* a_s = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_{s=0}^{\infty} |a_s|^2 = 1}$$

∴ أن مجموع مربعات القيم المطلقة لمعاملات الجمع الخطي يجب أن تساوي الواحد الصحيح عند أي زمن .

* يمكن حساب القيمة المتوقعة للكمية F لنظام تصفه الدالة الموجية المعرفة بالعلاقة (54) (الدوال U_s غير متصلة) وكما يلي :

$$\langle F \rangle = \int_{\tau} u^{*}\, \hat{F}\, u \, d\tau$$

$$= \int_{\tau} \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{*} u_s^{*}\ \hat{F} \sum_{s=0}^{\infty} a_s u_s \, d\tau$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{*} a_s \int_{\tau} u_s^{*} \hat{F} u_s \, d\tau$$

∵ لايوجد احلال ← معادلة القيمة الذاتية $\hat{F} u_s = F_s u_s$ ⇐

$$\langle F \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{*} a_s \int_{\tau} u_s^{*} F_s u_s \, d\tau$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} |a_s|^2 F_s \underbrace{\int_{\tau} u_s^{*} u_s \, d\tau}_{=1}$$

لأن الدالة عيارية

$$\boxed{\langle F \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} |a_s|^2 F_s} \quad \text{------} (55)$$

هذا يعني ان القيمة المتوقعة لـ F يمكن التعبير عنها بمجموع القيم الذاتية الممكنة المختلفة لـ F_s مضروبة بـ $|a_s|^2$ ، حيث ان $|a_s|^2$ تمثل احتمالية كون القياس للكمية F سيعطي القيمة الذاتية F_s للنظام ككل.

Example: If the functions $U_1(x)$, $U_2(x)$ are represents the eigen functions which satisfied the time-independent Schrodinger equation and corresponding eigen values E_1, E_2 respectively. Find:

1. The time-independent linear summation of the wave functions.
2. The linear summation of the wave functions dependent

on x and t.

③ Orthonormalization principle.

<u>Solution:</u> ① $\mathcal{U}(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)$

② $\mathcal{U}(x,t) = a_1 u_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2 u_2(x)\, e^{-iE_2 t/\hbar}$

③ $$\int_\tau \mathcal{U}^*(x)\, \mathcal{U}(x)\, d\tau = \int_\tau \left[a_1^* u_1^* + a_2^* u_2^*\right]\left[a_1 u_1 + a_2 u_2\right] d\tau$$

$$= \int_\tau \left[a_1^* a_1 u_1^* u_1 + a_1^* a_2 u_1^* u_2 + a_2^* a_1 u_2^* u_1 + a_2^* a_2 u_2^* u_2\right] d\tau$$

$$= |a_1|^2 \underbrace{\int_\tau |u_1|^2 d\tau}_{\text{عيارية} = 1} + a_1^* a_2 \underbrace{\int_\tau u_1^* u_2\, d\tau}_{\text{تعامد} = 0}$$

$$+ a_2^* a_1 \underbrace{\int_\tau u_2^* u_1\, d\tau}_{\text{تعامد} = 0} + |a_2|^2 \underbrace{\int_\tau u_2^* u_2\, d\tau}_{\text{عيارية} = 1}$$

$$= |a_1|^2 + |a_2|^2$$

* <u>ملاحظة</u>: المعادلة (52) تمثل صيغة الدالة الموجية المعطاة لمستوى طاقة معين.

بينما المعادلة (54) تمثل صيغة الدالة الموجية الكلية لنظام يتكون من عدة مستويات طاقة مختلفة.

٣٦

(9) خواص المؤثرات The Operators Properties

لنفرض ان $\hat{F}$ مؤثر وان ψ , χ دالتان لهما الصفات الآتية :-

١- لهما مقدار محدد finite .

٢- لهما القابلية على التكامل ، اي أن :- $\int_\tau \psi^* \psi \, d\tau =$ كمية محددة

٣- تحقق شرط الاستمرارية (الدالة ψ دالة مستمرة عند الشروط الحدودية ، و $\frac{d\psi}{dx}$ ايضاً دالة مستمرة عند الشروط الحدودية) .

ونفس الكلام اعلاه ينطبق على الدالة χ .

* المؤثر الخطي The linear operator

يسمى المؤثر $\hat{F}$ مؤثر خطي اذا تحقق الشرطان :-

صفة التوزيع

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \hat{F}(\psi + \chi) = \hat{F}\psi + \hat{F}\chi \\ &(2)\quad \hat{F}(c\psi) = c\hat{F}\psi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (56)$$

$C =$ معامل عددي < حقيقي / خيالي

The Hermitian Linear Operator * المؤثر الهيرميتي الخطي

يسمى المؤثر $\hat{F}$ بالمؤثر الهيرميتي اذا وفقط اذا تحقق الشرط الآتي:

$$\boxed{\int_\tau \psi^* \hat{F} \chi \, d\tau = \int_\tau \chi (\hat{F}\psi)^* \, d\tau = \int_\tau \chi \hat{F}^* \psi^* \, d\tau} \quad \text{------(57)}$$

اذا كانت $\chi = \psi \Leftarrow$

$$\int_\tau \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau = \int_\tau \psi \hat{F}^* \psi^* \, d\tau$$

خصائص المؤثر الهيرميتي:

$$\left.\begin{aligned} &① \ (\hat{F} + \hat{G})\psi = \hat{F}\psi + \hat{G}\psi \\ &② \ (\hat{F}\hat{G})\psi = \hat{F}(\hat{G}\psi) \\ &③ \ [\hat{F}(\hat{G} + \hat{H})]\psi = \hat{F}(\hat{G}\psi) + \hat{F}(\hat{H}\psi) \end{aligned}\right\} \text{------(58)}$$

اي ان: المؤثر الاقرب للدالة هو من يؤثر عليها أولاً ثم المؤثر الأبعد كما في الخاصيتين ② و③ اعلاه.

$$\left.\begin{aligned} &④ \ (\hat{F}\hat{G})\psi \neq (\hat{G}\hat{F})\psi \\ &\text{or} \ \hat{F}(\hat{G}\psi) \neq \hat{G}(\hat{F}\psi) \end{aligned}\right\} \text{------(59)}$$

لا تخضع لخاصية التبادل

١٨/١

★ المؤثر المستبدل The commutator Operator

∵ المؤثرات الهيرمتية لا تخضع لخاصية التبادل (النقطة ④ في الصفحة السابقة)، إذا فأن :-

$$\hat{F}\hat{G} \neq \hat{G}\hat{F}$$

$$\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \neq 0$$

$$= \hat{C} = \text{المؤثر المستبدل}$$

∴

$$\boxed{\hat{C} = [\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}] = [\hat{F}, \hat{G}]} \quad \text{------} (60)$$

المؤثر المستبدل   للمؤثرين الهيرميتيين $\hat{F}$ و $\hat{G}$ قوس التبادل

★ اذا كانت ψ دالة مسموحة وذاتية للمؤثرين الهيرميتيين $\hat{F}$ و $\hat{G}$ في آن واحد بحيث أن :-

$$\hat{F}\psi = F_0\psi \quad \text{and} \quad \hat{G}\psi = G_0\psi$$

فعند تطبيق قوس التبادل / ايجاد المؤثر المستبدل لـ $\hat{F}$ و $\hat{G}$ نحصل على :-

$$\hat{F}\hat{G}\psi = \hat{F}(G_0\psi) = G_0(\hat{F}\psi) = G_0F_0\psi \quad \text{---} (1)$$

$$\hat{G}\hat{F}\psi = \hat{G}(F_0\psi) = F_0(\hat{G}\psi) = F_0G_0\psi \quad \text{---} (2)$$

بطرح ② من ① :-

$$\hat{F}\hat{G}\psi - \hat{G}\hat{F}\psi = G_0F_0\psi - F_0G_0\psi$$

$$(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\psi = (G_0F_0 - F_0G_0)\psi$$

$$\hat{C}\psi = [\hat{F}, \hat{G}]\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{C} = [\hat{F}, \hat{G}] = 0$$

أي أن :- أي مؤثرين هيرميتيين لهما دالة غير منحلة مشتركة وذاتية ، هما مؤثران متبادلان ونتيجة قوس التبادل لهما تساوي صفر .

---

* Prove that the operator $\hat{H}$ (Hamiltonian operator) is Hermitian Operator. اثبت ان المؤثر الهاملتوني هو مؤثر هيرميتي

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V = \hat{H}^*$$

نطبق شرط الهيرميتية :-

$$\int_\tau \psi^* \hat{H} \psi \, d\tau \overset{?}{=} \int_\tau \psi \hat{H}^* \psi^* d\tau$$

هل يتحقق هذا ؟

$$\int \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi \, d\tau \overset{?}{=} \int \psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi^* d\tau$$

$$\cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}}\int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau + \cancel{\int \psi^* V \psi \, d\tau} \overset{?}{=} \cancel{-\frac{\hbar^2}{2m}}\int \psi \nabla^2 \psi^* d\tau + \cancel{\int \psi V \psi^* d\tau}$$

$$\int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau \overset{?}{=} \int \psi \nabla^2 \psi^* d\tau$$

هل الطرفان متساويان (*)

صيغة أخرى لنظرية كرين :

$$\int_\tau \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau + \int_\tau \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau = \int_s \psi^* \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{s}$$

وبتطبيق هذه النظرية لطرفي المعادلة الأخيرة اعلاه بـ

$$\int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau + \int \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau = 0$$ للأسباب المعروفة سابقاً.

and $$\int \psi \nabla^2 \psi^* \, d\tau + \int \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* \, d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int \psi^* \nabla^2 \psi \, d\tau = -\int \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau$$

and $$\int \psi \nabla^2 \psi^* \, d\tau = -\int \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi^* \, d\tau$$

$$= -\int \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau$$ الضرب العددي غير اتجاهي وتبادلي

$\left.\right\} \Rightarrow **$

وبتعويض $\Rightarrow **$ في المعادلة $\Rightarrow *$:

$$-\int \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau = -\int \vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi \, d\tau$$

وبما أن الطرفين متطابقين ومتساويين $\Leftarrow$ المؤثر $\hat{H}$ هيرميتي.

★ سؤال مهم: هل أن الكمية الديناميكية F التي تقابل المؤثر الهيرميتي $\hat{F}$ حقيقية؟

Is the dynamical quantity F that correspondes to the Hermitian operator $\hat{F}$, real?

ج/ نستخدم تعريف القيمة المتوقعة.

$$\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau$$

ونأخذ المرافق المعقد للطرفين

$$\langle F \rangle^* = \left[\int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau \right]^*$$

$$\langle F \rangle^* = \int \psi \hat{F}^* \psi^* d\tau$$

$$= \int \psi (\hat{F}\psi)^* d\tau$$

$$= \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau$$

من تعريف شرط المؤثر الهيرميتي

$$\Rightarrow \boxed{\langle F \rangle^* = \langle F \rangle} \quad \text{-----} (62)$$

هذا يعني ان الكمية المتوقعة المقابلة للمؤثر الهيرميتي هي كمية حقيقية ⟸ الصفة الهيرمتية في المؤثر هي ضمان لكي تكون الكمية المتوقعة المقابلة كمية حقيقية حتى يكون لها معنى فيزيائي.

---

* معدل تغير الكميات الديناميكية :

س/ هل ان القيمة المتوقعة للكمية الديناميكية F المقابلة للمؤثر الهيرميتي $\hat{F}$ كمية ثابتة ؟

ج/

$$\langle F \rangle = \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau$$

فاذا كانت الكمية F تعتمد على الموقع r فأن $\hat{F}$ تعتمد على الموقع ايضا لذلك يجب ان تكون كمية ثابتة عند الاشتقاق بالنسبة للزمن t اي ان :

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = \frac{d}{dt}\int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau$$

$$= \int \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \hat{F} \psi + \psi^* \hat{F} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] d\tau \quad \text{------} (63)$$

معادلة شرودنكر المعتمدة على الزمن يمكن كتابتها بدلالة المؤثر الهاملتوني :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right]\psi$$

$$= \hat{H}\psi \quad \cdots\cdots (*1)$$

and

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \hat{H}^*\psi^* = (\hat{H}\psi)^* \quad \cdots\cdots (*2) \qquad \hat{H}^* = \hat{H}$$

معوضين (1*) و (2*) في (63) :

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \int\left[\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\psi)^*\hat{F}\psi - \frac{i}{\hbar}\psi^*\hat{F}(\hat{H}\psi)\right]d\tau$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int\left[\underbrace{(\hat{H}\psi)^*\hat{F}\psi} - \psi^*\hat{F}(\hat{H}\psi)\right]d\tau \quad \cdots\cdots (*3)$$

التكامل الاول

$$= \int(\hat{H}\psi)^*(\hat{F}\psi)\,d\tau = \int(\hat{F}\psi)(\hat{H}\psi)^*\,d\tau$$

$$= \int(\hat{F}\psi)\,\hat{H}^*\psi^*\,d\tau$$

$$= \int\psi^*\,\hat{H}(\hat{F}\psi)\,d\tau \quad \cdots\cdots (*4)$$

لأن $\hat{H}^* = \hat{H}$ وهو مؤثر هيرميتي كما اثبتناه سابقاً ويحقق شرط الهيرميتية .

ونعوض (4*) في (3*) :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{i}{\hbar}\int\left[\psi^*\hat{H}\hat{F}\psi - \psi^*\hat{F}\hat{H}\psi\right]d\tau$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int\psi^*\left[\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}\right]\psi\,d\tau$$

ص٣٢

$$\Rightarrow \frac{d\langle F\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\int \psi^{*}[\hat{H},\hat{F}]\,\psi \, d\tau \quad ----(64)$$

* عندما تكون الدالة ψ دالة ذاتية غير مسموحة للمؤثرين $\hat{H}$ و $\hat{F}$ في آن واحد $\Leftarrow$ $[\hat{H},\hat{F}]\psi \neq 0$ $\Leftarrow$ $\langle F\rangle$ كمية متغيرة مع الزمن .

* عندما تكون الدالة ψ دالة ذاتية مسموحة (مشتركة) للمؤثرين $\hat{H}$ و $\hat{F}$ معاً $\Leftarrow$ $[\hat{H},\hat{F}]\psi = 0$ $\Leftarrow$ $\frac{d}{dt}\langle F\rangle = 0$ $\Leftarrow$ $\langle F\rangle$ كمية ثابتة لا تعتمد على الزمن .

H.W/ If $\hat{F}$ and $\hat{H}$ are commuting, then prove that: $\frac{d}{dt}\langle F^{2}\rangle = 0$, i.e. $\langle F^{2}\rangle = Cons.$

---

(10) انحفاظ الاحتمالية Conservation of Probability

* ملاحظات لمراجعة ما سبق من معلومات :
* الدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ تمثل حالة الجسيم ضمن فضاء محدد τ في النقطة $\vec{r}$ والزمن t .
* $|\psi(\vec{r},t)|^{2} = \psi^{*}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$ تمثل كثافة الاحتمالية Density of Probability لحالة الجسيمات التي تمثلها الدالة $\psi(\vec{r},t)$ ضمن فضاء محدد
* شرط المعيارية/المعايرة للدالة $\psi(\vec{r},t)$ هو: $\underbrace{\int_{\tau} \psi^{*}\psi \, d\tau}$ $= 1$

تمثل احتمالية الحصول على الجسيمات في عنصر الحجم $d\tau$ في النقطة $\vec{r}$

total Probability

مما سبق ، ان الاحتمالية الكلية تعرف كما يلي :-

$$P = \int_{\tau} \psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)\,d\tau \quad \text{------- (65)}$$

الاحتمالية الكلية $= 1$: if $\psi(\vec{r},t)$ is normalized function

س/ كيف يمكن للدالة الموجية $\psi(\vec{r},t)$ ان تتغير وفقاً لمعادلة شرودنكر المعتمدة على الزمن بحيث لا يتعارض هذا التغير مع القول بأن الاحتمالية الكلية يجب ان تبقى ثابتة ولا تتغير مع الزمن ؟

How can the wave function that varies according to time-dependent Schrodinger equation so that its variation dose not conflict with the total probability should not change with time ?

ج/

الاحتمالية الكلية $P = \int \psi^* \psi \, d\tau$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\int \psi^* \psi \, d\tau = \int \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right] d\tau$$

من معادلة شرودنكر المعتمدة على الزمن :-

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi \quad * \frac{-i}{\hbar} \quad \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H}\psi^* \quad * \frac{i}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi^*$$

where $\hat{H} = \hat{H}^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$ = وهو مؤثر هيرميتي

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{i}{\hbar}\int \left[-\psi^*(\hat{H}\psi) + (\hat{H}\psi)^* \psi \right] d\tau$$

ص ٧٥

$$\frac{dP}{dt} = \frac{i}{\hbar}\Big[\underbrace{\int(\hat{H}\psi)^*\psi\,d\tau}_{\text{الحد الاول}} - \underbrace{\int\psi^*(\hat{H}\psi)\,d\tau}_{\text{الحد الثاني}}\Big]$$

الحد الثاني $= \int \psi^* \hat{H}\psi\, d\tau$

$= \int \psi\, \hat{H}^* \psi^*\, d\tau$ من تعريف المؤشر الهيرمتي و $\hat{H}$ مؤشر هيرمتي .

$= \int \psi\, (\hat{H}\psi)^*\, d\tau$

$= \int (\hat{H}\psi)^*\, \psi\, d\tau$ $=$ الحد الأول

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \frac{dP}{dt} &= 0 \\ \text{So},\ P &= \text{constant} \end{aligned}\right\} \text{-------- (66)}$$

وهذه النتيجة تؤكد مرة اخرى على اهمية ان تكون المؤشرات هيرمتية .

س/ لماذا يجب ان تكون المؤثرات الكمية مؤثرات هيرمتية ؟

Why the quantum operators should be hermitian operators?

ج/ يجب ان تكون المؤثرات في الميكانيك الكمي مؤثرات هيرمتية وللأسباب التالية :

(١) القيمة المتوقعة للكمية الديناميكية المقابلة لمؤثر هيرمتي تكون كمية حقيقية وثابتة القيمة .

(٢) القيمة الذاتية للمؤثر الهيرمتي كمية حقيقية دائماً . } ((كما ورد في ص ٧١))

(٣) الاحتمالية الكلية كمية ثابتة لا تتغير مع الزمن وان التغير في الدالة الموجية الذي تصفه معادلة شرودنكر يتماشى مع ان تكون الاحتمالية الكلية محفوظة .

((كما في الصفحة ٧٤)) .

واجب

Example: Prove that the momentum operator in x-axis $(\hat{P}_x)$ is hermitian operator.

صيغة أخرى: Show that the expectation value of the momentum operator $\hat{p}_x$ is real $(\langle P_x \rangle = \langle P_x \rangle^*)$.

Solution:-

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi \, d\tau$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \, d\tau$$

من التكامل بالتجزئة:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad , \; u = \psi^* \; , \; dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} \; , \; du = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \; , \; v = \psi$$

So,

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar \left[\underbrace{\psi \psi^* \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \, dt \right]$$

$$= i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi \; i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \, \hat{p}_x^* \psi^* \, d\tau$$

$$= \langle P_x \rangle^*$$

$\therefore$ P_x مؤثر هيرميتي / القيمة المتوقعة لـ P_x كمية حقيقية

Example: Prove that the eigen value of hermitian operator is real always.

Sol: لنفترض ان الدالة الموجية ψ دالة ذاتية وان A_0 القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{A}$ وحسب معادلة القيمة الذاتية :-

$$\hat{A}\psi = A_0 \psi \quad \text{----} (1)$$

$$\hat{A}^* \psi^* = A_0^* \psi^* \quad \text{----} (2)$$

بضرب المعادلة (1) بـ ψ^* من جهة اليسار واجراء التكامل ،
وضرب " (2) بـ ψ " " " " " ⇐

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* A_0 \psi \, dx$$

$$= A_0 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx \quad \text{----} (3)$$

and:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \hat{A}^* \psi^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi A_0^* \psi^* \, dx$$

$$= A_0^* \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* \, dx \quad \text{---} (4)$$

الطرف الايسر لكلا المعادلتين (3) و(4) متساوي لتحقيقهما شرط الهرميتي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{A}\psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi (\hat{A}\psi)^* dx$$

لذا فأن الطرف الايمن لكلا المعادلتين متساوٍ ايضاً ، اي أن :-

$$A_o \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx}_{1} = A_o^* \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* \, dx}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad A_o = A_o^* \qquad A_o \text{ كمية حقيقية}$$

Ex. Show that $[\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar$

Sol. $[\hat{x}, \hat{P}_x]\psi = \hat{x}\hat{P}_x\psi - \hat{P}_x\hat{x}\psi$

$$= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\psi$$

$$= \underbrace{-i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{0} + i\hbar\psi$$

$$= i\hbar\psi$$

$$\therefore \boxed{[\hat{x}, \hat{P}_x] = i\hbar}$$

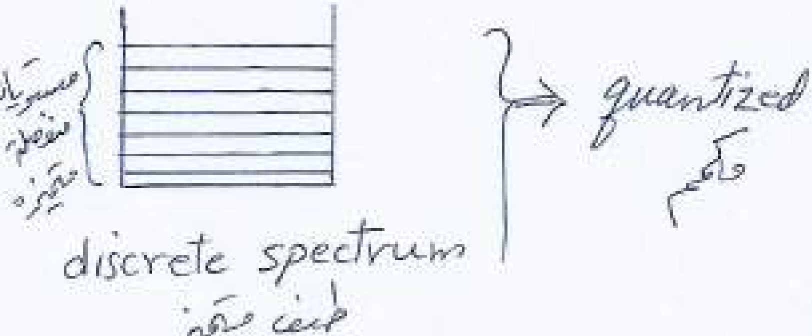
هذه النتيجة توضح ان المؤثر المتبدل لمؤثري الزخم والموقع لا يساوي صفراً ⟸ عدم وجود دالة ذاتية مشتركة للمؤثرين ⟸ تأكيد مبدأ اللادقة.

H.W.

1. Prove that $[\hat{P}_x, \hat{x}] = -i\hbar$
2. Show that $[\hat{x}^2, \hat{P}_x] = 2i\hbar x$
3. Prove that $\boxed{[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar}$
4. If $[\hat{H}, x] = -i\hbar\frac{\hat{P}_x}{m}$, prove that $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle P_x\rangle}{m}$,

(11) الحالات المكممة Quantized States

بعض الكميات الديناميكية تأخذ قيم مميزة ومعروفة مثل الطاقة والزخم الزاوي.
فهذه الكميات تدعى المكممة.



لكن هذا السلوك مستحيل في اغلب الأوقات لأن تطبيق الميكانيك الكمي على نظام معين يعطي توزيع لهذه القيم المتميزة (طاقة وزخم) والتي يمكن الحصول عليها من القياسات.

س/ ما نوع و وظيفة الدالة الموجية المقابلة لهذه الكميات المكممة ؟

ج/ الدالة الموجية المقابلة لقيمة مكممة، يجب ان تحقق معادلة القيمة الذاتية،

$$\hat{F}\Psi = F_0 \Psi$$

حيث تكون الكمية المكممة F المقابلة للمؤثر $\hat{F}$ تساوي كمية ثابتة حقيقية هي F_0.

* اثبات الجواب اعلاه:

$$\langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi \, d\tau$$
$$= \int \Psi^* F_0 \Psi \, d\tau$$
$$= F_0 \int \Psi^* \Psi \, d\tau$$
$$\langle F \rangle = F_0$$

<u>and</u> $$\langle F^2 \rangle = \int \Psi^* \hat{F}^2 \Psi \, d\tau$$
$$= \int \Psi^* \hat{F} (\hat{F}\Psi) \, d\tau$$

٢٠م

$$\langle F^2 \rangle = \int \psi^* \hat{F} (F_0 \psi)\, d\tau$$

$$= F_0 \int \psi^* \hat{F} \psi \, d\tau = F_0 \int \psi^* F_0 \psi \, d\tau$$

$$= F_0^2 \int \psi^* \psi \, d\tau$$

$$\langle F^2 \rangle = F_0^2$$

$$\Rightarrow (\Delta F)^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$$

$$= F_0^2 - F_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta F = 0$$

وهذا يعني :-

ليس هناك لادقة في قيمة الكمية المكممة F والتي قيمتها الذاتية F_0 والموصوفة بالدالة الذاتية ψ وهذه الدالة ψ تحقق معادلة القيمة الذاتية وهي دالة احادية القيمة ومتلاشية عند اللانهاية .

<u>Example:</u> Prove that uncertainty in the total energy is zero.

اثبت ان اللادقة في الطاقة الكلية = صفراً.

<u>Solution:</u>

المؤثر الذي يصف الطاقة الكلية للنظام ويحقق معادلة القيمة الذاتية هو المؤثر الهاملتوني ويعطي قيمة ذاتية تساوي الطاقة الكلية للنظام .

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

حل/ $\hat{H}\Psi = E\Psi$

$$\langle H \rangle = \int \psi^* \hat{H}\psi \, d\tau = \int \psi^* E \psi \, d\tau$$

$$= E \int \psi^* \psi \, d\tau$$

$$\langle H \rangle = E$$

<u>and</u> $$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi \, d\tau = \int \psi^* \hat{H}(\hat{H}\psi) \, d\tau$$

$$= \int \psi^* \hat{H}(E\psi) \, d\tau = E \int \psi^* \hat{H}\psi \, d\tau$$

$$= E \int \psi^* E \psi \, d\tau = E^2 \int \psi^* \psi \, d\tau$$

$$\langle H^2 \rangle = E^2$$

$$(\Delta E)^2 = (\Delta H)^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$$

$$= E^2 - E^2$$

$$(\Delta E)^2 = 0$$

هذا يعني ان اللادقة في قياس الطاقة الكلية تساوي صفر .

<u>H.W./</u> $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ اختبر المثال اعلاه مع مؤثر الطاقة

هل سيعطي $(\Delta E) = 0$ ؟

(12) التماثل The Parity

عندما تمتلك الدالة الموجية تناظراً "متساوياً" (زوجي - فردي - زوجي - فردي) نسبة" الى الانعكاس في الاحداثيات خلال نقطة الاصل ، يقال ان هذه الدالة متماثلة . أي أن :

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = u(-x) \\ u(r) = u(-r) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{دالة ذات تماثل زوجي} \quad \cdots(69)$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) = -u(-x) \\ u(r) = -u(-r) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{دالة ذات تماثل فردي}$$

* هذا التناظر (التماثل) يظهر واضحاً لكل الدوال الموجية المقابلة للطاقات غير المخللة لأي منظومة ذات طاقة كامنة متناظرة بالنسبة لأحداثي معين ، مثلاً : $V(x) = V(-x)$

* ويمكن التعامل مع هذه المسألة (مسألة التناظر / التماثل) من خلال مؤثر خاص وبنفس الطريقة التي نتعامل بها بالكميات الفيزيائية (الطاقة ، الزخم والموقع).

* مؤثر الأنعكاس Reflection Operator :

هو المؤثر الذي اذا اثر على الدالة $u(x)$ يكون حاصل تأثيره هو استبدال الموقع x بـ $-x$ ، أي أن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{R}\, u(x) = u(-x) \\ \hat{R}\, u(-x) = u(x) \end{array}} \quad \cdots\cdots(70)$$

$\hat{R}$ هو مؤثر الانعكاس .
وهو مؤثر خطي .

ص٨٢

س/ هل مؤثر الانعكاس $\hat{R}$ مؤثر هيرميتي ؟

Is the reflection operator hermitian operator ?

Solution: $\int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)\,\hat{R}\,\phi(x)\,dx \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\hat{R}^*u^*(x)\,dx$

الطرف الأيسر $= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)\,\hat{R}\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)\,\phi(-x)\,dx$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} u^*(-x)\,\phi(x)\,d(-x)$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} u^*(-x)\,\phi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,u^*(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\left[u(-x)\right]^* dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\left[\hat{R}u(x)\right]^* dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\hat{R}^*u^*(x)\,dx = \text{الطرف الأيمن}$$

∴ المؤثر $\hat{R}$ مؤثر هيرميتي .

---

* ملاحظة : لا توجد كمية ديناميكية (تقابل المؤثر $\hat{R}$) في الميكانيك الكلاسيكي وذلك لأن انعكاس دالة الموجة هو ليس فكرة كلاسيكية ومفهوم الدالة الموجية هو مفهوم كمي ، لذا فأن الكمية المقابلة لمؤثر الانعكاس $\hat{R}(x)$ تسمى بـ التماثل نسبة لـ x .

ص٨٢

س/ اذا كان $\hat{H}$ دالة زوجية لـ X . هل يتبادل مع مؤثر الانعكاس.

If $\hat{H}(x) = \hat{H}(-x)$, dose the reflection operator commute with the Hamiltonian operator?

ج/ طريقة هل ان المؤثران متبادلان ام لا نستخدم قوس التبادل لهما:

$$[\hat{R}, \hat{H}]\psi = \hat{R}\hat{H}\psi - \hat{H}\hat{R}\psi \quad \begin{cases} = 0 \rightarrow \text{متبادلان} \\ \neq 0 \rightarrow \text{لا يتبادلان} \end{cases}$$

$$[\hat{R}, \hat{H}]\, u(x) = \underbrace{\hat{R}\hat{H}u(x)}_{①} - \underbrace{\hat{H}\hat{R}u(x)}_{②}$$

$$\text{الحد الاول} = \hat{R}\hat{H}u(x) = \hat{R}\left(\hat{H}(x)\,u(x)\right)$$

$$= \hat{H}(-x)\,u(-x) = \hat{H}(-x)\,\hat{R}u(x)$$

$$= \hat{H}(x)\,\hat{R}u(x) = \text{الحد الثاني}$$

$$\therefore \; [\hat{R}, \hat{H}] = 0$$

$\therefore$ المؤثران متبادلان

H.W. / س/ اذا كانت F الكمية الديناميكية المقابلة للمؤثر F فاثبت ان:

$$\frac{d}{dt}\langle F\rangle = \frac{i}{\hbar}\int_{\tau}\psi^{*}[\hat{H}, \hat{F}]\psi\, d\tau$$

س/ اذا كانت $[\hat{H}, \hat{F}] = \frac{-i\hbar}{m}\hat{P}_x$ فاثبت ان:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{\langle P_x\rangle}{m}$$

انتهى الفصل الثاني