Chapter 3 : الفصل الثالث

The Quantum Harmonic Oscillator المتذبذب التوافقي الكمي

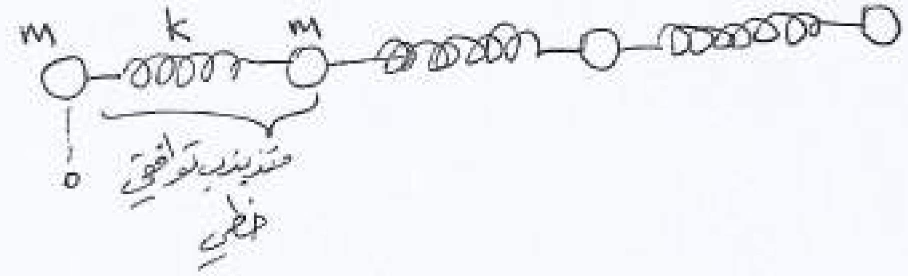
في الميكانيك الكلاسيكي ، المتذبذب التوافقي الخطي عبارة عن جسيم طاقته الكامنة $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ ، k ثابت ، x هي المسافة من نقطة ثابتة هي نقطة الأصل . هذه المسألة تقابل كلاسيكيا الحركة البسيطة التي يتحرك فيها جسيم تحت تأثير القوة المعيدة الخطية $f(x)=-kx$ ويهتز ذهاباً وإياباً على مسار خطي بتردد زاوي مقداره $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

اما في الميكانيك الكمي فستكون مسألة المتذبذب التوافقي الخطي أول تطبيق للمبادئ والنظريات التي مرت علينا في الفصل السابق .

ومن الامثلة الشائعة للمتذبذب التوافقي في الميكانيك الكمي :-

١- اهتزاز ذرات المواد الصلبة البلورية تتشبه عادةً بأهتزاز توافقي (حركة توافقية بسيطة) اذا كانت سعة الاهتزاز صغيرة .

٢- المجال الكهرومغناطيسي في تطبيقات كثيرة يمكن اعتباره كعدد من الاهتزازات التوافقية البسيطة التي تقابل الحالات الكلاسيكية المختلفة لاهتزاز المجال .



الشكل المجاور يوضح :
شبكة خطية ذات ذرات متماثلة
بحيث يمكن تصور التآصر بين
الذرات وكأنه نابض ⟸ متذبذب توافقي خطي .

The Hamiltonian Operator المؤثر الهاملتوني

* الطاقة الكامنة للمتذبذب التوافقي الخطي الكلاسيكي هي نفسها للمتذبذب الكمي ، أي أن :-

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2} k x^2}$$

مقدار الإزاحة x و ثابت مرونة النابض k و

* الطاقة الحركية أيضاً :-

$$T = \frac{p_x^2}{2m}$$

* دالة هاملتون :-

$$H = T + V(x)$$

* المؤثر الهاملتوني للمتذبذب التوافقي الخطي :-

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2}$$

* لمعالجة مسألة المتذبذب التوافقي الخطي كلياً ، نبدأ بحل معادلة شرودنگر غير المعتمدة على الزمن حيث ان حل هذه المعادلة يعطي :-

القيم الذاتية للطاقة ((طيف الطاقة)) + الدوال الذاتية المقابلة لكل مستوى طاقة ((الحالات المستقرة))

* التردد الزاوي للمتذبذب التوافقي

$$\boxed{k = m\omega^2} \Leftarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

m هي كتلة المتذبذب التوافقي

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2}$$

حل معادلة شرودنگر غير المعتمدة على الزمن :

$$\hat{H}\, U_n(x) = E_n\, U_n(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right) U_n = E_n\, U_n$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2 U_n}{dx^2} + (V - E_n)\, U_n = 0 \qquad \times\ -\frac{2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - V)\, U_n = 0$$

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E_n - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) U_n = 0$$

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} E_n - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2\right] U_n = 0 \qquad , \text{ let } \boxed{\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + \left[\frac{2\alpha^2}{\hbar\omega} E_n - \alpha^4 x^2\right] U_n = 0 \qquad \div\ \alpha^2$$

$$\frac{d^2 U_n}{d(\alpha^2 x^2)} + \left[\frac{2E_n}{\hbar\omega} - \alpha^2 x^2\right] U_n = 0 \qquad , \text{ let } \boxed{\lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega}}$$

$$\text{and } \boxed{Y = \alpha X}$$

$$\frac{d^2 U_n(y)}{dy^2} + \left(\lambda_n - y^2\right) U_n(y) = 0 \quad \text{------} (1)$$

عندما $y \to \infty$ فأن $y^2 >> \lambda_n$ ، يمكن اهمال λ_n :

$$\frac{d^2U_n(y)}{dy^2} - y^2 U_n(y) = 0 \qquad \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dy^2} - y^2\right) U_n(y) = 0$$

يمكن حل المعادلة اعلاه بطريقة المؤثرات وكالآتي :-

$$\left(\frac{d}{dy} - y\right)\left(\frac{d}{dy} + y\right) U_n(y) = 0$$

أما $\frac{dU_n}{dy} - yU_n = 0$ وهذا الحل يهمل لأنه لايحقق الشرط عندما $y \to \infty$ فأن $U_n(y) = 0$

أو $\frac{dU_n}{dy} + yU_n = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dU_n}{dy} = -y\,U_n$

$$\frac{dU_n}{U_n} = -y\,dy \qquad \Rightarrow \ln U_n = -\frac{1}{2}y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}}$$ الحل الخاص عندما $y \to \infty$

* الحل العام للمعادلة (١) هو :-

$$\boxed{U_n(y) = H_n(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}} \quad \text{------ (2)}$$

$$\text{and} \quad \boxed{H_n(y) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r y^r} \quad \text{------ (3)}$$ متعدد حدود هيرميت

بتعويض المعادلات (3) في (2) ثم في (1) ، نحصل على :-

H.W.

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y\frac{dH_n(y)}{dy} + (\lambda_n - 1) H_n(y) = 0 \quad \text{-----} (4)$$

المعادلة (4) مشابهة لمعادلة تفاضلية في الرياضيات تسمى معادلة هيرمت :.

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y\frac{dH_n(y)}{dy} + 2n H_n(y) = 0 \quad \text{-----} (5)$$

معادلة هيرمت (المعادلة رقم (5)) لها حل وحيد وهو متعدد حدود هيرمت والمعرف في المعادلة رقم (3).

ومن مقارنة المعادلتين (4) و(5) نجد أن :.

$$\lambda_n - 1 = 2n \Rightarrow \lambda_n = 2n+1 \Rightarrow \frac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n+1$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \quad \text{-----} (6)$$

المعادلة (6) تمثل القيم الذاتية للطاقة ، وهي قيم متميزة ، غير منحلة ، أقل طاقة هي E_0 عندما $n=0$ وتساوي :

$n=0 \longrightarrow E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ مستوى الطاقة الأرضي

$n=1 \longrightarrow E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ المستوى المثار الأول

$n=2 \longrightarrow E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ المستوى المثار الثاني

and

$$\boxed{U_n(y) = N_n H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}} \quad \text{-----} (7)$$

الدالة الموجية للمتذبذب التوافقي

N_n هو ثابت التعاير ، ولإيجاد قيمته نطبق شرط العيارية :-

$$\int_{\tau} U_m^{*} U_n^{*} \, d\tau = \delta_{mn} \qquad , \; Y = \alpha X$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m^{*} e^{-\frac{\alpha^2 X^2}{2}} H_m^{*}(\alpha X) \cdot N_n e^{-\frac{\alpha^2 X^2}{2}} H_n(\alpha X) \, dx = \delta_{mn}$$

بالضرب والقسمة بـ α :-

$$\frac{N_m^{*} N_n}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 X^2} H_m^{*}(\alpha X) H_n(\alpha X) \, d(\alpha X) = \delta_{mn}$$

$$m = n \Rightarrow \frac{N_n^2}{\alpha} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y) \, dy}_{= \sqrt{\pi}\, 2^n n!} = 1$$

$$\Rightarrow N_n^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}$$

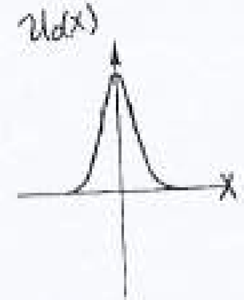
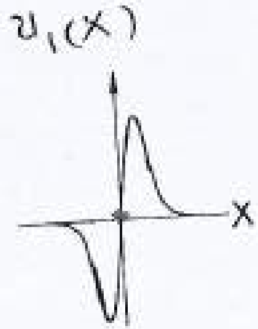
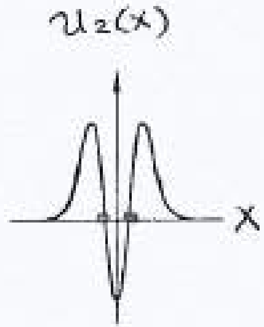
$$\boxed{N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}} \quad \text{-------} \quad (8)$$

نعوض (8) في (7) :-

$$U_n(y) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}} \; H_n(y) \, e^{-\frac{y^2}{2}}$$

OR

$$\boxed{U_n(\alpha X) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}} \; H_n(\alpha X) \, e^{-\frac{\alpha^2 X^2}{2}}} \quad \text{-----} \quad (9)$$

n	$u_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x)$	The w.f. parity	fig of $u_n(x)$	عدد العقد	$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$
0 زوجي	$u_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_0(\alpha x)$ $= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$ احفظ حيث أن $0! = 1$	زوجي		0	$\frac{1}{2}\hbar\omega$
1 فردي	$u_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^1\, 1!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_1(\alpha x)$ $= \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}\, 2\alpha x$ احفظ حيث أن $1! = 1$	فردي		1	$\frac{3}{2}\hbar\omega$
2 زوجي	$u_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^2\, 2!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_2(\alpha x)$ $= \left(\frac{\alpha}{8\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}(-2+4\alpha^2 x^2)$	زوجي		2 number of nodes	$\frac{5}{2}\hbar\omega$

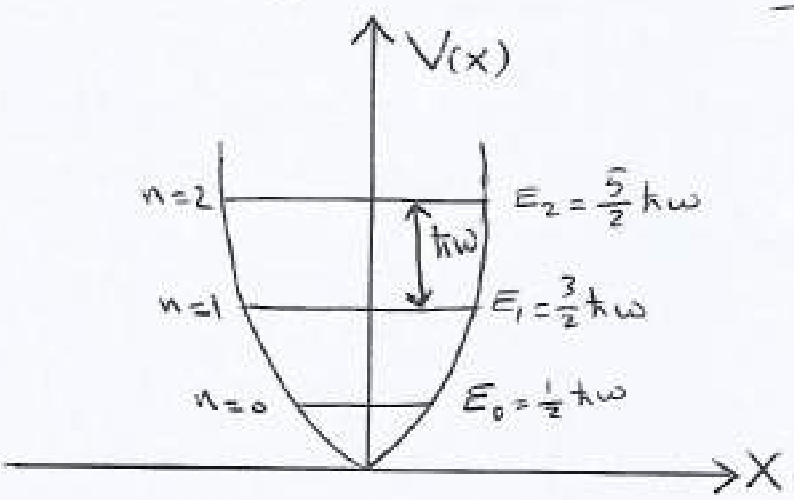
أي أن العدد الكمي n = عدد العقد ويمثل تماثل الدالة فإذا (n) عدد زوجي فالدالة تملك تماثل زوجي. وهكذا ..

مقارنة بين نتائج النظرية الكلاسيكية عن النظرية الكمية فيما يخص مسألة المتذبذب التوافقي .

Comporision of classical theory with quantum theory

	نتائج النظرية الكلاسيكية (المتذبذب التوافقي البسيط)	نتائج النظرية الكمية (المتذبذب التوافقي الكمي)
١	الطاقة الدنيا = صفر	الطاقة الدنيا ≠ صفر وإنما = $\frac{1}{2}\hbar\omega$
٢	طيف الطاقة مستمر (غير متميز)	مستويات الطاقة منفصلة، غير متصلة، متميزة وحسب العلاقة: $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$
٣	كثافة الاحتمالية تتناسب عكسياً مع الانطلاق $P\propto\frac{1}{v}$	كثافة الاحتمالية = $\|\psi_n(x)\|^2$

* ملاحظات : ① طيف مستويات الطاقة غير متصلة ومتميزة .



ص٤

٢) الحل العام لمسألة الحركة التوافقية للمتذبذب الكمي هو:-

$$\boxed{\psi_n(x,t) = N_n\, U_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}}$$

٣) تعرف متعدد الحدود هيرمت بالعلاقة:-

$$\boxed{H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}}$$

$$n=0 \longrightarrow H_0(y) = (-1)^0 e^{y^2} \frac{d^0}{dy^0} e^{-y^2}$$

$$= e^{y^2} \cdot e^{-y^2} = 1$$

$$n=1 \longrightarrow H_1(y) = (-1)^1 e^{y^2} \frac{d}{dy} e^{-y^2}$$

$$= -e^{y^2} \cdot (-2y)\, e^{-y^2} = 2y\, e^{y^2} \cdot e^{-y^2}$$

$$= 2y = 2\alpha x$$

$$n=2 \longrightarrow H_2(y) = -2 + 4y^2 \quad (\text{H.w.})$$

$$n=3 \longrightarrow H_3(y) = -12y + 8y^3 \quad (\text{H.w.})$$

مثال: استخدم مبدأ اللادقة لإثبات ان اقل طاقة للمتذبذب التوافقي الخطي هي $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Use the uncertainty principle to prove that the minimum energy for the linear harmonic oscillator is $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

الحل /

$$\Delta E \, \Delta t = \frac{h}{2}$$

ان التغير في الزمن للمتذبذب التوافقي هو عبارة عن الزمن الدوري للحركة

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \Delta E \, \frac{2\pi}{\omega} = \frac{h}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{h}{2\pi}\frac{\omega}{2}$$

$$\therefore \Delta E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Ex. Prove that the following wave functions are normalized and orthogonal.

① $U_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2}$

② $U_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha x \, e^{-\alpha^2 x^2/2}$

Solution: Normalization: is $\int_{-\infty}^{\infty} U_0^*(x)\, U_0(x)\, dx = 1$?

$$U_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} = U_0^*(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha^2 x^2/2} \, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = 2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx}_{n=0,\ a=\alpha^2}$$

بدالة كاما

$$= \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\overbrace{\Gamma(\tfrac{1}{2})}^{=\sqrt{\pi}}}{2(\alpha^2)^{1/2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

$$= 1$$

$$U_1(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\alpha x \, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} = U_1^*(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x)\, e^{-\alpha^2 x^2/2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x)\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \, dx$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \cdot 4\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} \, dx$$

$$= 2 \, \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \, 4\alpha^2 \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} \, dx}$$

$n = 2 \;, \; a = \alpha^2$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2(\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2\alpha^3}$$

$$= 2 \, \frac{4\alpha^3}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} = 1$$

So, $u_0(x)$ and $u_1(x)$ are normalized functions

<u>orthognality condition</u> $\int_{-\infty}^{\infty} u_1^* u_0 \, dx = 0$??

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} (2\alpha x)\, e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2\alpha}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{فردی}}{x} \; \underset{\text{زوجی}}{e^{-\alpha^2 x^2}} \, dx = 0$$

The functions $U_0(x)$ and $U_1(x)$ are orthognolized.

Ex: Linear harmonic oscillator in eigen energy state $n=0$ (ground state), Calculate:

① The expectation value of x. ② variation in x.

③ The expectation value of P_x. ④ Variation in P_x.

⑥ The expectation value of the Potential energy.

⑦ The expectation value of the Kinetic energy.

⑧ The expectation value of the total energy.

⑤ The uncertainty principle.

Solution: $n=0 \Rightarrow U_0(x) = U_0^*(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$

① $$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U_0^*(x)\, \hat{x}\, U_0(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \cdot x \cdot \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\text{فردي}}\, \underbrace{e^{-\alpha^2 x^2}}_{\text{زوجي}}\, dx = 0 \quad \text{صفر}$$

---

② $$\langle x^2 \rangle = \cdots\cdots = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2}\, dx$$

ج

$$\langle x^2\rangle = 2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2x^2}\,dx}_{n=2\,,\ a=\alpha^2}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2(\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$$

$$\langle x^2\rangle = 2\,\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4\,\alpha^3} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\langle x^2\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha}$$

---

③

$$\langle P_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(x)\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ u_0(x)\,dx$$

$$= -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\,dx$$

$$= -i\hbar\,\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\ (-\alpha^2 x)\ e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\,dx$$

$$= i\hbar\,\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\,2\alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\alpha^2x^2}\,dx = 0$$ صفر

فردي   زوجي

---

④

$$\langle P_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(x)\ -\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\ u(x)\,dx$$

H.w.

$$= -\hbar^2\,\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\,\frac{d^2}{dx^2}\,e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\,dx \quad \cdots (*)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\alpha^2 x e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\right]$$

$$= -\alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} + \alpha^4 x^2 e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (*2)$$

نعوض (*2) في (*1) ∴

$$\langle P_x^2\rangle = -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} \left(-\alpha^2 e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}} + \alpha^4 x^2 e^{-\frac{\alpha^2x^2}{2}}\right) dx$$

$$= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[-\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2} dx + \alpha^4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha^2x^2} dx\right]$$

H.W.

$$= -\hbar^2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[-\alpha^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} + \alpha^4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}\right]$$

$$= \hbar^2\alpha^2 - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2}$$

$$\therefore \langle P_x^2\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\alpha^2$$

$$(\Delta P_x) = \sqrt{\langle P_x^2\rangle - \langle P_x\rangle^2} = \sqrt{\langle P_x^2\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\alpha$$

---

(5) $$\Delta x \Delta P_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar\alpha$$

$$= \frac{\hbar}{2}$$

---

(6) $V = \hat{V} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, we have $\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$

$$\langle V\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \, \hat{V} \, u_0 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \, \frac{1}{2}kx^2 \, u_0 \, dx$$

$$= \frac{1}{2}k \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \, x^2 \, u_0 \, dx = \frac{1}{2}k \, \langle x^2\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2\rangle$$

من المطلب رقم ② حصلنا على $\langle x^2\rangle$ وتساوي $\Leftarrow \frac{1}{2\alpha^2}$

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\langle V\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega$$

---

(7) $\hat{T} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m}$

$$\langle T\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \, \hat{T} \, u_0 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^* \, \frac{\hat{P}_x^2}{2m} \, u_0 \, dx$$

$$= \frac{1}{2m}\langle P_x^2\rangle$$

من المطلب رقم ④ حصلنا على $\langle P_x^2\rangle$ وتساوي $\Leftarrow \frac{1}{2}\hbar^2\alpha^2$

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2}\hbar^2\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4m}\cdot\frac{m\omega}{\hbar}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega$$

---

(8) $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ But $U_0(x)$ is time-independent.

وبما أننا حسبنا القيم المتوقعة للطاقة الكامنة والطاقة الحركية $\Leftarrow$

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega + \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

وهذه القيمة المتوقعة متطابقة تماماً من القيم الذاتية للطاقة للمتذبذب التوافقي الكمي (العلاقة رقم (6) ص ٨٩) عندما نعوض عن $n=0$ نحصل على $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$.

H.W./ Solve the previous example for the eigen energy state $n=1$ (first excited state).

H.W./ use: $U_n(y) = N_n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)$

$$\frac{d^2 U_n(y)}{dy^2} + (\lambda_n - y^2) U_n(y) = 0$$

To prove that the time-independent Schrodinger equation for the linear harmonic oscillator can be written as:

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + (\lambda_n - 1) H_n(y) = 0$$