جامعة البصرة
كلية الآداب
قسم الفلسفة

اسم المـــــادة
المنطـــــق الريـــــاضي

المرحلة الثانية

مدرس المادة

المدرس المساعد

حسن السيد محمد الجابري

مقدمات تمهيدية

أولا: نظرة تاريخية:

المنطق هو العلم الذي يبحث في المبادئ العامة للتفكير الصحيح، إذ يضع الشروط الضرورية والكافية التي يتم بواسطتها الانتقال من قضايا نفترض صدقها الى النتائج الازمة عنها. وهذا يعني أن للمنطق مجاله الخاص وطبيعته الخاصة التي تميّزه عن غيره من العلوم، فمجاله الفكر الإنساني، ولكن من زاوية خاصة وهي الشروط التي تجعل الفكر صحيحاً وخالياً من التناقض في جميع العمليات الاستدلالية.

ويعد الفيلسوف اليوناني أرسطوطاليس (٣٨٤ ـ ٣٢٢ ق.م) الواضع الحقيقي لهذا العلم. ولكن لا يعني ذلك أن ليس هناك محاولات سابقة على أرسطو في هذا المجال، إذ يمكننا أن نرجع بأصول هذا العلم إلى كثير من الفلاسفة السابقين عليه. حقيقة أن هذه الأصول لم تكن مقصودة بذاتها لتكون هذا قائماً بذاته كما هو الحال عند أرسطوطاليس، إلا أنها بلا شك يمكن أن تعد إرهاصاً للمحاولة الناجحة التي قام بها أرسطوطاليس بعد ذلك.

وقد يكون من الممكن التماس مصادر علم المنطق منذ عصر السوفسطائيين في اليونان، ولعل مساهمة السوفسطائيين تكمن في تطويرهم لفن المناقشة والجدل وإقامة الحجة على الدعاوى التي يدعونها إلا أنهم كانوا يلجؤون في ذلك إلى حيل لغوية متقنة، وحجج تبدو ـ بما لها من حبكة لفظة ـ متقنة، أكثر من اللجوء إلى إقامة البرهان على صحة دعواهم، فكانت قوة حججهم تقوم على الاستهواء أكثر من اعتمادها على الاقناع للعقل، ولذلك كانت نقطة انطلاقهم تلك الآراء الشائعة التي يسلم بها الناس دون نقد، ويقرون بها دون أن تكون واضحة في أذهانهم، وهنا يستطيع السوفسطائي بما أوتي من قدرة لفظية بارعة، وموهبة في الجدل كبيرة أن يستميل المستمعين الى حججه بما تبدو عليها من قوة وإقناع ظاهري.

وكان سقراط بارعاً في هذا الفن، إلا أنه يقبل ما يسلم به الناس، وأراد أن يبحث في الأسس التي يقوم عليها تسليمنا برأي أو بنتيجة معينة، ومن هنا راح يبحث عن التعريفات، على أساس أن التعريف يظهر ماهية شيء المعرف، ومن الطبيعي ـ كما يقول أرسطو ـ أن يحرص سقراط على بلوغ الماهية لأنه كان ينشد وضع الأفكار على صورة قياسية، والماهية هي نقطة البداية في الأقيسة، فهناك أمران يمكن أن ننسبها تماماً الى سقراط هما: الحجج الاستقرائية والتعريف الكلي، وكلا الأمرين يتصلان بنقطة الانطلاق في العلم.

ويبدو أنه ما كان في ذهن أرسطوطاليس حين نسب الحجة الاستقرائية لسقراط هو طريقة سقراط في اختيار أمثلة جزئية لكل من الكليات ـ مثل (العدالة) ـ لكي يكتشف ما ينبغي أن يتوافر في كل حالة حتى يمكن أن تندرج بحق تحت هذا الكلي. وكان سقراط ـ كما هو معروف ـ يضع نتيجة هذا البحث على هيئة تعريف، ليرى الأمثلة الجزئية التي ينطبق عليها هذا التعريف ليدرجها تحت هذا الكلي، والحالات التي لا ينطبق عليها ليبعدها عنه.. وهكذا. وقد سار أفلاطون في نفس هذا الطريق، وطور عمليات التصنيف والقسمة، وقال بالصور أو المثل، وهي كليات لها حالاتها الجزئية، وعلى دعائم هذه المثل بنى أفلاطون نسقه الميتافيزيقي والفيزيقي.

كان هذا بلا شك ارهاصاً بمنطق أرسطوطاليس الذي ينظر اليه عادة على أنه مؤسس المنطق، لأنه يعد بحق أول من قال بالفكر بوصفه مادة موضوع لعلم خاص، أو على الأقل أقر بإمكانية دراسة المبادئ العامة التي يجب أن تتوافر في التفكير حتى يكون صحيحاً دراسة مستقلة عن مادة موضوع بعينها أو علم بعينه.

وكان لأرسطو العديد من المؤلفات المنطقية التي جمعها تلاميذه وشرّاحه وأطلقوا عليها اسم (أورجانون) (Organon) (أي الأداة أو الآلة)، وظل هذا الاورجانون المنهج الوحيد للتفكير حتى مطلع العصور الحديثة، إذ أنه ساد تفكير رجال العصور

الوسطى في الغرب، بعد أن وفق فلاسفتها بين الفلسفة اليونانية والدين المسيحي، واعتبروا أرسطو المصدر الوحيد لجميع المعارف، وعدوا منطقه الطريقة الوحيدة الصحيحة للتفكير، ونظروا الى أي خارج عن أرسطو نظرة الخارج عن الدين المسيحي.

إلا أن تلك السيطرة الأرسطية على عقول مفكري العصور الوسطى وعصر النهضة لم تمنع من ظهور بعض المفكرين الأحرار الذين حاولوا كسر القيود العلمية الأرسطية والفكر المدرسي الخاضع لها، ونذكر على سبيل المثال (روجر بيكون) في القرن الثالث عشر الميلادي الذي نادى باستخدام المنهج العلمي بدلاً من الطريقة القياسية، أو بمعنى أدق عبر عن اقتناعه بأهمية الدراسات الوصفية والعلمية في مجال التطبيق أكثر من القياس الأرسطي، إلا أن هذه المحاولة لم تجد لها صدى في ذلك الوقت، إذ ظهر القديس توما الأكويني الذي أقام فلسفته على دعائم من الفلسفة الأرسطية والمنطق الأرسطي، وقدر لهذه الفلسفة أن تسيطر على عقول المدرسيين في تلك الفترة، وبذلك تأكدت سلطة أرسطو العلمية، وأصبح الخروج على منطقه خروجاً على الدين المسيحي نفسه.

ونجد أيضاً في أوائل عصر النهضة محاولات عديدة للخروج على منطق أرسطو، وبيان ما فيه من عيوب وقصور، بل والتصريح بأن كل ما قاله أرسطو وهم وضلال، إلا أن مثل هذه المحاولات كانت تنوء في النهاية بالفشل، وكثيراً ما كان نصيب أصحابها الازدراء أو الاغتيال.

أما في العالم الإسلامي فقد اختلف المؤرخون في زمن معرفة المسلمين بمنطق أرسطو، فمن قائل إنهم عرفوه منذ العصر الأموي، ومن قائل ـ وهذا هو الرأي المرجح ـ أن المنطق كان أول ما نقل الى العربية من علوم الفلسفة، وقد نقله (عبد الله بن المقفع) في عهد الخليفة العباسي (أبو جعفر المنصور)، وينسج المؤرخون حكايات غريبة حول

الدوافع التي دفعت المنصور ليأمر بترجمة مؤلفات أرسطو، ولكن من الواضح أن ما دفع المسلمين الى ترجمة المنطق الارسطي احتياجهم له من اجل الدفاع عن العقيدة الإسلامية ضد العقائد الأخرى المخالفة التي كان يزخر بها العالم الإسلامي، فأرادوا أن يتسلحوا بنفس المنهج الذي يتسلح به أعداؤهم ليردوا عليهم بنفس منطقهم.

وعلى أية حال فقد قام اسحق بن حنين ومدرسته بنقل أورجانون أرسطو كله من اللغة اليونانية الى السريانية ثم الى العربية، كما قام بعض المترجمين الآخرين بنقل أجزاء من هذا الاورجانون الى العربية، أو شرحها، أو تقديم ملخصات وافية عنها، ونذكر من هؤلاء على سبيل المثال (أبا بشر متى بن يونس) و(عبد المسيح بن ناعمة الحمصي)، وهكذا نستطيع القول ان المسلمين قد عرفوا منطق أرسطو، كما عرفوا الشروح التي قام بها شراح أرسطو وتلاميذه من اليونانيين وتأثروا بهذا المنطق بدرجات متفاوتة، فبينما كان تأثر علماء الكلام به في حدود البحث في العقائد، واستعانة بعض الفقهاء بالأقيسة المنطقية في مجال الفقه، فقد تأثر الفلاسفة المسلمون من أمثال الكندي والفارابي وابن سينا وابن رشد بمنطق ارسطو تأثراً بالغاً، وانكبوا عليه شرحاً وتعليقاً على وجه نستطيع معه القول بأن منطق أرسطو لم يحظ بمثل هذا الاهتمام عند أي شراح آخرين.

أما غالبية الفقهاء فقد وقفوا من هذا المنطق موقف العداء الصريح، وتنوعت حملاتهم القاسية عليه، ونذكر على سبيل المثال (ابن تيمية) الذي حاول في كتاباته دحض منطق أرسطو، وبيان ما فيه من عيوب وتناقضات. والواقع أن المنطق لم يكن وحده موضع هذه الحملات، بل شملت كل علوم الفلسفة اليونانية بدعوة أنها خطر على الدين، لأنها قد تقود الى الزندقة والكفر، إلا أن المنطق كان في الحقيقة البؤرة التي تركزت حولها تلك الحملات، حتى لقد انتشر في العالم الإسلامي ذلك القول المشهور (من تمنطق فقد تزندق)، وقد بليت هذه الحملات ذروتها في الفتاوى التي افتى بها كبار أئمة المسلمين، كتلك الفتاوى المشهورة لابن الصلاح الشهرزوري التي حرم فيها

شرعياً الاشتغال بالفلسفة والمنطق، وحث رجال السلطة على طرد الفلاسفة، والمناطقة من الدولة وتشريدهم وحرق كتبهم.

ولكن لابد لنا أن نشير الى أن الفقهاء لم يكونوا جميعاً مؤيدين لهذه الحملات، فقد أشاد بعضهم بقيمة الفلسفة والمنطق ومنفعتهما في الدفاع عن العقيدة الإسلامية. فبالنسبة للمنطق لم يكن الفقهاء يهاجمون المنطق بوصفه علماً، بل يهاجمون نوعا من الأبحاث التي يتعرض المنطق لدراستها، مثل الجدل السوفسطائي، والأقيسة السوفسطائية. ومهما يكن من أمر، فلم يقدر لهذه الحملات أن تترك آثاراً بعيدة المدى في عقول المفكرين المسلمين.

وهكذا قدر لمنطق أرسطو أن يسيطر على فكر العصور الوسطى، سواء في الغرب المسيحي أو الشرق الإسلامي، وظلت له هذه السيادة حتى ظهر الفيلسوف الإنجليزي (فرنسس بيكون) (F. Bacon) (١٥٦١ - ١٦٢٦) والفيلسوف الفرنسي (رنيه ديكارت) (R. Doscaries) (١٥٩٦ - ١٦٥٠)، إذ وضع أولهما أسس المنهج التجريبي، ونادى ثانيهما بالمنهج الاستنباطي الرياضي، وقد طور المنهج التجريبي بعد ذلك (جون ستيوارت ميل)، وقد تطور المنهج الآخر على يد كثير من المناطقة والرياضيين، إلا أنه تطور تطوراً كبيراً في أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين نتيجة للتطورات الهائلة التي حدثت في الرياضيات والمنطق وكان من نتيجة ذلك أن تدعم المنطق الصوري الحديث الذي يسمى اليم بأسماء متعددة مثل (المنطق الرمزي) أو (المنطق الرياضي) أو (اللوجسطيقا) وهو يعد الصورة الحالية للمنطق في تطوره المعاصر. ولا يهمنا الآن الدخول في تفصيلات هذا التطور وحسبنا أن نعرض الآن لتعريف المنطق.

ثانيا ـ تعريف المنطق:

اللفظ الإنجليزي Logic (أو ما يقابله في اللغات الأوربية الحديثة) مشتق من اللفظ اليوناني (لوجوس) Logos الذي يعني العقل أو الكلام. ومن الملاحظة أن اللفظ يرد كمقطع في كثير من أسماء العلوم مثل (جيو ـ لوجيا) (geo – Logy)، (بيو ـ لوجيا) (Bio – Logy)، (سيكولوجيا) (Psycho – Logy) وغيرها، ليدل على البحث المنظم عن القوانين والمبادئ العامة التي يتوصل إليها العالم الجزئي وفقاً لبعض المعايير العقلية والإجراءات التجريبية. إلا أن وراء العلوم جميعاً ـ ووراء التفكير الجاري للحياة اليومية بالمثل ـ هناك بعض المبادئ المنطقية العامة التي يشترك فيها الفكر جميعه.

أما اللفظ العربي (المنطق) فهو مشتق من النطق أو الكلام، وقد لخص (التهانوي) رأي المناطقة في ذلك بقوله: (وإنما سمي بالمنطق لأن النطق يطلق على اللفظ، وعلى إدراك الكليات، وعلى النفس الناطقة. ولما كان هذ الفن يقوى بالأول، ويسلك بالثاني مسلك السداد ويحصل بسببه كمالات الثالث، اشتق له اسم منه وهو النطق) وهذا القول يبدو مقبولاً إلى حدّ كبير، ذلك لأن النطق هنا لا يعني مجرد خروج الكلام من فم المتكلم، بل يدل أيضاً على إدراك الكليات وهي أمور عقلية خالصة، فالنطق بهذا المعنى يدل على الكلام أو العقل كما هو الحال في اللفظ اليوناني Logos.

والجدير بالإشارة هنا أن أرسطو ـ وهو الواضع الحقيقي لعلم المنطق ـ لم يستخدم لفظ (المنطق) في مؤلفاته، وإنما كان يستخدم لفظ (التحليلات) (analytics) ليدل على ما نسميه اليوم بالمنطق الصوري، ولا نعرف على وجه الدقة أو من استخدم لفظ المنطق، ولا في أي عصر: وأرجح ما قيل في هذا الصدد ما افترضه (برنتل) (Prantl) (تاريخ المنطق في الغرب) جـ ١ ص٥٣٥ ـ ٥٣٦) وفقاً لإشارة (بونتيوس) (Poolius) من أن من الممكن أن تكون هذه الكلمة من وضع شراح أرسطو،

وضعوها اصطلاحاً من أجل أن يقابلوا بين الأورجانون لأرسطو وبين الديالكتيك عند الرواقين (ولعل ذلك كان في عهد أندرونيقوس الروديسي).

فضلاً عن أن أرسطو لم يكن يعد المنطق علماً من العلوم، إذ أنه يقسم العلوم قسمين، أحدهما نظري والآخر عملي. يهدف العلم النظري عنده إلى المعرفة الخالصة كالعلم الطبيعي والعلم الرياضي، ويكون هدف العلم العملي تدبير الأفعال الإنسانية كعلم الأخلاق والسياسة. أما المنطق فلم يدرجه أرسطو تحت أي قسم من قسمي العلم، لأن المنطق في نظره هو علم قوانين الفكر بصرف النظر عن موضوع ذلك الفكر. وعلى ذلك جعل المنطق مدخلاً لجميع العلوم، ومتقدماً على الخوض أي علم آخر، فهو آلة العلوم على اختلاف أنواعها، وهو أداة لابد من معرفتها واتقانها قبل تعلم أي علم آخر، وهذا هو السبب في أن شراح ارسطو حين قاموا بتصنيف أعماله الفكرية، جمعوا مؤلفاته المنطقية ووضعوها تحت اسم (أورجانون) أي الأداء أو الآلة، وأصبحت هذه المؤلفات معروفة باسم (أورجانون أرسطو).

أما المناطقة المسلمون فمع أنهم يتابعون الفهم الأرسطي لطبيعة المنطق باعتباره مدخلا للعلوم، فإنهم ـ فيما يبدو ـ لم يكونوا على اقتناع بصحة هذا الفهم، لذلك نجدهم يترددون في اعتبار المنطق مجرد آلة للعلوم أو مدخلاً لها، فتقرا في مؤلفات ابن سينا مثلاً عدة تعريفات للمنطق بعضها يجعل منه آلة تعصم الذهن من الوقوع في الخطأ، وبعضها يجعل منه علماً للاستدلال، يقول ابن سينا في كتابه (النجاة) إن المنطق هو (... الآلة العاصمة للذهن عن الخطأ فيما نتصوره ونصدق به، والموصلة إلى الاعتقاد الحق بإعطاء أسبابه ونهج سبله)، ويقول في كتاب (الإشارات والتنبيهات): (والمنطق علم يتعلم منه ضروب الانتقالات من أمور حاصلة في ذهن الإنسان إلى أمور مستحصلة)، ويروي التهانوي عن ابن سينا أنه أطلق على النطق اسم (خادم العلوم)، إذ ليس مقصوداً بنفسه، بل هو وسيلة الى العلوم، فهو كالخادم لها)، كما يروي أيضاً عن الفارابي أنه أطلق عليه اسم (رئيس العلوم لنفاذ حكمه فيها، فيكون رئيساً حاكماً عليها).

إلا أن التهانوي حين يقدم تعريفاً للمنطق فإنه يقدمه على أنه علم من العلوم فيقول إن المنطق (.. علم بقوانين تفيد معرفة طرق الانتقال من المعلومات الى المجهولات وشرائطها بحيث لا يُعرِّض الغلط في الفكر). في حين أننا نلاحظ أن التهانوي حين يتحدث عن الغرض من المنطق يعده مجرد مدخل للعلوم النظرية والعملية فيقول: (اعلم ان الغرض من المنطق التمييز بين الصدق والكذب في الأقوال، والخير والشر في الأفعال، والحق والباطل في الاعتقادات ومنفعته القدرة على تحصيل العلوم النظرية والعلمية:

والواقع أن مسألة (آلية) المنطق أو (علميته) تتعلق بأمر هام عن طبيعة المنطق. فإذا كان المنطق آلة العلوم، لما كان جزءاً من الفلسفة (بالمعنى القديم لكلمة فلسفة الذي يدل على جميع العلوم) أما إذا كان علماً لكان جزءاً منها.

وهنا لا نجد عند الفلاسفة المسلمين رأياً قاطعاً في هذه المسألة، فعلى حين يقرر الفارابي في معظم مؤلفاته أن المنطق جزء من الفلسفة، نجد ابن سينا يطلق على الجزء الذي يعالج فيه المنطق من كتابه الضخم (الشفاء) اسم (المدخل الى الشفاء) مما يدل على أن المنطق عنده مجرد مدخل للفلسفة وليس جزءاً منها. إلا أننا نلاحظ في حديثه عن المنطق في نفس الكتاب أنه يشير إلى أن المنطق جزء من الفلسفة وآلة لها في نفس الوقت، ويبدو أن هذا الفهم الأخير هو الأقرب إلى نظرة الفلاسفة المسلمين الى طبيعة المنطق.

وهكذا نلاحظ أن المنطق هو العلم الذي يضع قواعد معينة لو راعاها الانسان لعصم ذهنه من الوقوع في الخطأ أياً كان الموضوع الذي يتحدث عنه وهذا هو الفهم الذي ركز عليه الفلاسفة المسلمون، يقول صاحب البصائر النصيرية، إن المنطق (قانون عاصم للذهن من الزلل، مميز لصواب الرأي عن الخطأ في العقائد بحيث تتوافق العقول السليمة على صحته). ويذهب الفارابي إلى تعريف شبيه بذلك إذ يقول إن (صناعة

المنطق تعطي بالجملة القوانين التي من شأنها أن تقوم العقل وتسدد الانسان نحو طريق الصواب ونحو الحق في كل ما يمكن أن يغلط فيه من المعقولات).

إن التوحيدي يقدم على لسان ابي سليمان السجستاني تعريفاً للمنطق أوسع من التعريفات السابقة، إذ يلاحظ فيه أن للمنطق أغراضه الأخلاقية والجمالية فضلاً عن أغراضه في التمييز بين الحق والباطل في الاعتقادات والصدق والكذب في القضايا، ففي هذا المعنى الواسع يكون المنطق (... آلة بها يقع الفصل والتمييز بين ما يقال: هو حق أو باطل فيما نعتقد، وبين ما يقال: هو خير أو شر فيما نفعل، وبين ما يقال: هو صدق أو كذب فيما يطلق باللسان، وبين ما يقال: هو حسن أو قبيح بالفعل). ومثل هذا الفهم لطبيعة المنطق يثير مسألة كثيراً ما تتردد في الكتابات المنطقية الحديثة، وهي مسألة تتعلق بصورية المنطق أو ماديته، وسوف نشير إليها بعد قليل.

وإذا نظرنا إلى التعريفات الحديثة للمنطق، للاحظنا أن الكثير منها يدل على فهم للمنطق داخل فلسفة بعينها. وعلى سبيل المثال نجد أنصار الواقعية الجديدة يعدّون المنطق علم البرهان، يعني أنه جزء من نظرية المعرفة بالمعنى الفلسفي، ومعنى ذلك أن المنطق ليس علماً مستقلاً عن العلوم الفلسفية، بل هو جزء من مباحث الفلسفة وهو نظرية المعرفة.

ولعل من أشهر التعريفات المتداولة في كتب المنطق أن المنطق علم قوانين الفكر، والمقصود هنا بقانون الفكر عند القائلين بمثل هذه التعريف إنه مبدأ واضح بذاته وضروري الصدق. فهو أقرب إلى البديهية كقولك الكل أكبر من الجزء، وقد جرت عادة المناطقة على ذكر ثلاثة قوانين أساسية هي المقصودة باسم (قوانين الفكر)، وهي قانون الهوية، وقانون التناقض.

ويكاد يتفق المناطقة على أن المنطق علم استدلالي، نبدأ فيه من مقدمات نسلم بصحتها لننتهي منها إلى النتائج التي تلزم عنها. ولعل هذه السمة التي جعلت (كينز)

يعرف المنطق بأنه (العلم الذي يبحث في المبادئ العامة للفكر الصحيح) وموضوعه على الأخص البحث في تحديد الشروط التي بواسطتها يصح الانتقال من أحكام فرضت صحتها إلى أحكام أخرى تلزم عنها، وهذا التعريف بلا شك أقرب إلى طبيعة المنطق وموضوعه.

وثمة تعريف هام كثيراً ما نجده يتردد في الكتابات المعاصرة في المنطق وهو أن المنطق ـ كما يقول (جيفونن) هو علم الصور الضرورية للفكر) وهذا الفهم قريب من فهم الوضعيين المناطقة لموضوع هذه العلم. إذ أنهم يرون أن المنطق هو (علم صورة الفكر) ولابد لنا لفهم هذا التعريف أن نحدد المقصود من لفظي (صورة) و (فكر).

معنى الصورة هنا هيكل العلاقات الذي يظل ثابتاً على الرغم من تغير المادة التي تتلبس بهذه الصورة. فشكل الهرم مثلاً صورة ثابتة، أما مادة الهرم فقد تكون من حجارة أو من خشب أو غير ذلك. والصورة في المنطق معناها العلاقات الكائنة بين ألفاظ القضية أو القضايا. فلو قلت مثلاً (الوردة حمراء) للاحظت أن هذه العبارة تشتمل على صورة ومادة، فالمادة هنا هي لفظ (الوردة) ولفظ (حمراء)، وتتضح الصورة لو استعضنا عن لفظ (الوردة) بالرمز أ، وعن اللفظ (حمراء) بالرمز ب، وقلنا (أ هي ب) لوصلنا إلى الصورة التي تميز مثل هذه العبارة، وتصبح هذه الصورة كالقالب الفارغ القابل لأن تنصب فيه جميع العبارات المحتوي على صفة وموصوف، أو مبتدأ وخبر، مثل (الطلبة حاضرون) (المدينة مزدحمة) (الصوت مرتفع) وهكذا. ومثل هذا يقال عن (إذا كانت ق كانت ل) و(إما أن تكون ق أو ل)... الخ، فكل هذه صور منطقية، أي هيكل للعلاقات بين الألفاظ أو الرموز التي تحتويها القضايا أو العبارات.

أما الفكر فهو في رأي الوضعية المنطقية لا يعدو كونه مجرد الألفاظ اللغوية التي تحمل معنى. إذ أنهم ينكرون أي كائن باطني يكون مصدر الأفكار يسمى العقل أو ما شئت أن تسميه، فلا فكر أو أفكار وكل ما هنالك ألفاظ. وعلى ذلك فقولنا أن المنطق هو

علم صورة الفكر يعني أن المنطق علم يبحث في العلاقات الكائنة بين أجزاء الكلام المفهوم، أعني بين أجزاء القضايا، على أساس أن القضية هي وحدة الكلام والمنطق بهذا المعنى صوري لا يهتم إلا بصورة الكلام دون مادته.

هذه بعض التعريفات الهامة التي تلقي الضوء على طبيعة هذا العلم، ولعلنا نلاحظ أن معظمها يقرر صورية المنطق، واهتمامه بالصور العامة للتفكير، ولعل هذا الفهم هو ما جعل من المنطق أعم العلوم جميعاً، لأن المبادئ العامة التي يتوصل إليها إنما تنطبق على كل ما عداه من علوم. وبعبارة أخرى، إذا كان كل علم يبحث في فرع من فروع المعرفة. فإن المنطق يبحث في عن المبادئ العامة للفكر، تلك المبادئ التي تنطبق على كل فرع من فروع المعرفة.

وهذا ما يقودنا إلى مسألة يكفي أن نشير إليها إشارة سريعة، وهي مسألة خاصة بالتفرقة بين المنطق الصوري والمنطق المادي والملاحظ أن هذه التفرقة جاءت من جانب بعض المناطقة المحدثين على زعم أن هناك منطقاً لا يعني إلا بصورة الفكر، ومنطقاً يعين بمادة الفكر، أولهما هو المنطق الاستنباطي وخاصة القياس، وثانيهما المنطق الاستقرائي. فالقياسي يعين بصحة العلاقات الكائنة بين أجزاء الكلام، ولا شأن له بصحة المقدمات في الواقع، أما المنطق الاستقرائي. فلابد أن تكون مقدماته قائمة على أساس المشاهدة والتجربة، أي لابد أن تكون مقدماته مطابقة للواقع المشاهد. وعلى ذلك يكون صدق القياس (والمنطق الاستنباطي عموماً) صورياً، أما صدق المنطق الاستقرائي فموضوعي.

إلا أن هذه التفرقة ليست في الواقع دقيقة، بل إنها كثيراً ما تكون مضللة، لأن هذين النوعين يكمل كل منهما الآخر، فلا غنى للاستقراء في بعض مراحله عن القياس، كما أن مقدمات القياس يجب أن يعنى بصدقها من حيث الواقع.

إلا أن هذا الرد في الحقيقة يقر بالتفرقة بين منطق صوري ومنطق مادي، في حين أن هذه التفرقة مفتعلة ومضللة، لأن رجل المنطق من حيث هو كذلك لا يعني مطلاقاً بمضمون الفكر أياً كان موضوعه، حتى حينما يتناول فلسفة العلم التجريبي، ويتحدث عن طبيعة العلم والمنهج العلمي. فإنه لا يعني مطلقاً بمادة علم معين، ولا يعرض لمضمون علم خاص، بل يتناول هذا كله من زاوية الصورة العامة للعلم ومنهجه، على وجه نستطيع معه القول بأن المنطق دائماً صوري، لا يتعلق إلا بالعلاقات المنطقية بين أجزاء الكلام المفهوم.

ثالثا: أهمية المنطق:

يختلف الباحثون أحياناً حول طبيعة المنطق: هل هو (علم) أم (فن)؟ أو بعبارة أخرى هل هو دراسة أم نظرية خالصة، أم أنها دراسة مرتبطة بالإجراءات الفعلية؟ إننا نستطيع أن نجيب ـ دون أن ندخل في جدال حول هذه الأسئلة ـ إننا يمكن أن نعد المنطق (علماً) و (فناً) في آن واحد، وإن كانت صفة (العلمية) هي الأساسية هنا، أما صفة (الفنية) فآتية من أن هناك من الباحثين في المنطق ـ كما هو الحال في أي علم آخر ـ من يحاولون تطبيق الحقائق المنطقية النظرية في طرق العمل واجراءاته.

١ـ وإذا نظرنا إلى المنطق باعتباره علماً لأمكننا أن نقول ان دراسة المنطق تقدم للدارس (فهماً) لطبيعة مبادئ الاستدلال المنطقي ومناهجه، سواء كان هذه الاستدلال استنباطياً أو استقرائياً.

٢ـ أما دراسة المنطق بوصفه (فناً) بلا شك أنه تساعد الدارس على تنمية قواه الخاصة بالتفكير الدقيق، بحيث يمكنه أن يقدم لنتائجه الدليل على صحتها بشكل واضح، كما يمكنه التمييز بين الدليل الكافي وغيره من الأدلة غير الكافية الخاصة بمعتقد من المعتقدات، أو بدعوى من دعاوى الصدق، أو بنتيجة من النتائج، سواء كان ذلك خاصاً به أو بغيره ممن يتصل بهم أو يحادثهم.

٣ـ إن المنطق يجعل القارئ على دراسة بالفرق بين الميل إلى شيء تحت تأثير الوسائل السيكولوجية المتعددة، مثل الجاذبية العاطفية، أو ضغوط الأغلبية، وبين الاقتناع العقلي بالدليل والتفكير المنطقيين. وهذا ما يجعله على حذر من الدعايات، كما يساعده على التقييم السليم، ومقاومة الأدلة الميسّرة التي تصاحبها الضجة والصخب.

٤ـ يساعد المنطق الدارس على تطوير اتجاهه النقدي تجاه الدعاوى والافتراضات المسبقة التي تشكل خلفية حججه أو حجج الكثيرين من الناس في مجالات مثل السياسة

والاقتصاد وغير ذلك من العلوم الاجتماعية، حيث أن الوقائع هنا لم يتم التحقق منها بشكل كامل، وتتضمن غالباً عناصر من التقليد والتفضيل والتقييم.

٥ـ إن المنطق يجعل الدارس له على ألفة بمفردات اللغة المنطقية الخاصة. ولو نظرنا إلى ألفاظ مثل (استدلال) و (منطقي) و (مغالطة) و (دليل) و (تناقض) ويستلزم، لوجدنا أنها تتخلل نتاجانا الفكري جميعه ـ ليس في فقط في مجال الفلسفة والعلم، بل أيضاً في جميع الكتابات التي من شأنها أن تلجأ إلى الفكر، أو تقدم المعرفة. ويتم اكتساب المعنى الدقيق لهذه الاصطلاحات على أفضل وجه في إطار ارتباط هذا المعنى بدراسة العمليات التي تدل عليها هذه الألفاظ.

٦ـ إن المنطق يجعل القارئ على وعي بغموض الألفاظ، وبالوظائف المتعددة للغة. وهذا من شأنه أن يشجعه على أن يكون أكثر دقة، وبالتالي أكثر قدرة على استخدام الرموز اللغوية.

٧ـ يعد المنطق مدخلاً للمبادئ الرئيسية ومناهج الاجراء العلمي كما يتضح مثلاً في الملاحظة والاستدلال الاستقرائي واستخدام الفروض والتحقق منها. ومع تسليمنا بأن هذه العمليات لا يمكن اتقانها بشكل كامل إلا من خلال الممارسة الفعلية في التجارب العملية، فإن من الممكن دراستها على صورة يستفيد منها الدارس كثراً، ويمكن استخدامها إلى حدّ ما في بعض المشكلات البسيطة.

رابعا: انقسام المنطق إلى صوري ومادي:

من العسير أن نبدأ بتعريف للمنطق لأن أنواع المنطق كثيرة ومختلفة ولا نعلم مقدماً عن أي واحد منها نتكلم.

ولكي نقتنع بهذا العسر يكفي الرجوع إلى المقال الذي كتبه أندريه لالاند (A. Lalande) في قاموسه الفلسفي (Vocab ulaire Philosophique) تحت كلمة (منطق).

ونحن دون أن نتصدى هنا لتناول هذه المسألة الشائكة التي نرجئها إلى حينها في مرحلة قادمة نحاول فيها تحديد وظيفة المنطق وهدفه كعلم، يمكننا أن نمضي الآن مباشرة الى اختيار تعريف مؤقت (للعمل) فقط، لا نرضى عنه إلا قليلاً، نجده شائعاً في الكتب الطلابية ويسمح لنا بتصور انقسام أساسي في كل ما يطلق عليه كلمة المنطق الى قسمين.

ويقول هذا التعريف: (إن المنطق موضوعه اتفاق الفكر مع نفسه واتفاقه مع الواقع، وغرضه البحث عن القوانين التي يتم بها هذا الاتفاق المزدوج).

وإذن فهناك اتفاق للفكر مع نفسه، وهناك اتفاق له مع الواقع، وهناك قوانين لهذا الاتفاق المزدوج هي هدف المنطق.

ومن ثم يتضح أن هذا التعريف يفضي بنا إلى قسمة المنطق قسمة مبدئية إلى ما عرف طوال التاريخ باسم (**المنطق الصوري**) (Formal logic) الذي يتم به اتفاق الفكر مع نفسه. وإلى ما يسمّى أحياناً في الكتب الطلابية الدارجة (**المنطق المادي (الرياضي)** (Logique Formelle) أو (التطبيقي) (Log. Appliquee)، أ، على نحو أوسع (مناهج العلوم) (Methodology) وهو المنطق الذي يتم به اتفاق الفكر مع الواقع أو عالم التجربة الحسية الذي تستند إليه العلوم التجريبية.

لبيان هذا الانقسام الى نوعين من المنطق يمكن القول بأنه توجد في فكرنا عناصر نسميها أفكاراً (Ideas) أو تصورات (Concepts) كما نسميها في علوم اللغة الألفاظ أو

الحدود (Terms)، وتلك العناصر تقوم بينها علاقات مختلفة تكشف عنها التراكيب التي نسميها قضايا (Propositions) واستنباطات (Deductions) (التي هي أيضاً قضايا)، وهي علاقات محدودة في عددها ويمكن الوقوف عليها بتحليل للقضايا والاستنباطات التي نمارسها في حياتنا العادية وفي المعرفة العلمية بالذات على نطاق أوسع.

هي علاقات تتردد دائماً عندما نفكر ونستنبط مثل علاقة الاثبات (Affirmation) كما في قولنا الحديد يتمدد بالحرارة.

وعلاقة النفي (Negation) كما في الحديد لا يذوب في الماء.

وعلاقة الانطواء او الاشتمال (Inclusion) كما في قولك الواحد عدد (أي أن الواحد منطوٍ في زمرة أو فئة (Class) العدد.

وعلاقة الاستبعاد (Exclusion) وهي عكس السابقة.

وعلاقة الوصل أو العطف (Conjunction) كما في قولك سقراط فيلسوف ورياضي.

وعلاقة الفصل (Disjunction) كما في قولك سقراط فيلسوف أو رياضي.

الفصل الأول

المبحث الأول

المنطق الرياضي وخصائصه

أولاً: تعريف المنطق الرياضي وأسماءه:

يسمى المنطق الرياضي (Symbolic Logic) بأسماء عدّة: **لوجستيقا** (Logistic)، أو **(جبر المنطق)** (Algebra of Logic)، أو **المنطق الرمزي** أو **المنطق الصوري**، وكلها عبارات مترادفة.

ويسمى المنطق الرمزي لأن لغته الرموز لا الكتابة والحديث؛ وليس معنى هذا أنه يسمّى رمزياً لمجرد استخدامه رموزاً، فإن هنالك علوماً تستخدم الرموز ولا نسميها المنطق الرمزي، كعلم الجبر مثلاً؛ واستخدام الرموز شرط ضروي لإقامة هذا المنطق، لكنه شرط غير كافٍ ليكون رمزياً، بل يجب ـ إلى جانب استخدامه الرموز ـ أن يدرس العلاقات المختلفة بين الحدود في قضية ما، والعلاقات المختلفة التي تربط بين عدّة قضايا، ووضع القواعد التي تجعل من القضايا التي يرتبط بعضها ببعض قضايا صادقة دائماً. وترجع تسمية المنطق الرمزي باللوجستيقا إلى إتلسن (telson) ولالاند (Lalande) وكوتيرا (Couturat) في الؤتمر الدولي للفلسفة ببارس عام ١٩٠٤؛ لكنا نلاحظ أن الكلمة كانت مستخدمة من قديم، فقد استخدمها الفيثاغوريون للدلالة على جداول يجد فيه الحاسبون نتائج العمليات الحسابية دون جهد، وتذكرنا بجداول اللوغاريتمات اليوم؛ وقد استخدم ليبنتز الكلمة كمرادفة لعبارتي (المنطق الرياضي) و(حساب البرهنة) (Calculus Ratiocinator)؛ ونلاحظ أيضاً أن (لوجستيقا) لم تستخدم فقط للدلالة على المنطق الرياضي، وإنما استخدمت أيضاً للدلالة على اتجاه رد التصورات الرياضية الأساسية الى تصورات منطقية خالصة. وفي القرن التاسع عشر سُمّي المنطق الرياضي أيضاً (جبر المنطق)، وترجع هذه التسمية

الى جورج بول الذي جعلها اسماً لنظريته في جبر الأصناف، ثم استخدمها بيرس وشرويدر للدلالة على نظريات المنطق الرمزي كلها، حيث صيغت جميعها على نموذج جبر الأصناف. ويسمى المنطق الرمزي كذلك (المنطق الرياضي)، وبيانو أول من استخدم هذا التعبير، وكان يعني به نوعين من البحث: كان يعني أولاً صياغة المنطق الجديد صياغة تستخدم للرموز والأفكار للرياضية، ويعني بها ثانياً البحث في رد الرياضيات الى المنطق؛ وكان يسمى هذا البحث الثاني أيضاً (فلسفة الرياضة). ويسمي المنطق الرياضي أخيراً (المنطق الصوري) حيث ياد له أن يكون أكثر صورية مما أتى عليه أرسطو، ونجد هذه التسمية بنوع خاص عند رسل.

وللمنطق الرياضي عدّة تعريفات، وأفضلها ما اشتمل على بيان موضوعه؛ وموضوع هذا المنطق هو الاستدلال (inference). والاستدلال هو الانتقال من قضية أو أكثر (ونسميها مقدمة أو مقدمات) إلى قضية أخرى (ونسميها نتيجة)، وترتبط المقدمات برباط معين بحيث إذا قبلنا المقدمات قبلنا النتيجة. والاستدلال ضربان: استنباطي (deduction) أو استقرائي (induction)، ويعنينا هنا الأول وهو الذي ترتبط فيه المقدمات بالنتيجة بعلاقات منطقية أهمها علاقة التضمن (implication).

ثانياً: خصائص المنطق الرياضي:

للمنطق الرياضي خصائص متعددة يمكن اجمالها في النقاط التالية:

١ـ استخدامه للرموز، والرموز المستخدمة فيه إما أن تكون متغيرات أو ثوابت، وهذه الرموز مستعارة من الرياضيات. والمتغيرات يراد منها أحرف هجائية تُشير إلى قضية ما أو مجموعة من القضايا وهي قابلة للتغير وهي تشبه الأعداد من جهة التغير في الرياضيات، وترمز لها بالرموز (ق ـ ل ـ م ـ ن).

أما الثوابت في المنطق فهي مجموعة أدوات الربط أو النفي أو الأسوار التي تدخل على القضايا، فتعمل على الربط بينها أو قلب قيمتها وتحديد كمها أو كيفها، ونرمز لها بالرموز (¬ ، ∨، ∨̲ ، ∧ ، ← ، ↔) وغيرها.

٢ـ يجب أن تكون رموز الثوابت واضحة وذات معنى ثابت بحيث لا يجوز مطلقاً استخدام رمز واحد لأكثر من معنى واحد متفق عليه، أما المتغيرات فهي مجرد رموز ترمز لقضايا ليس لها معنى ثابت ويمكن أن يحل محلها أي رمز آخر.

٣ـ إن المنطق الرمزي نسق استنباطي، ينتقل فيه المرء من المقدمات إلى النتائج، ويضم هذا النسق والنظام الاستنباطي مجموعة من العناصر منها:

أـ البديهيات: أو (الأفكار العامة الأولية) كما سماها إقليدس (٣٣٠ ـ ٢٧٥ ق.م) أو تسمى بـ (المبادئ) كما ذكرها أرسطو طاليس، وهذه البديهيات عبارة عن أفكار وقضايا عامة واضحة بذاتها، لا يمكن إنكارها، صادقة دائماً، مثل (الكل أكبر من الجزء ـ المساويان لثالث متساويان).

ب ـ المبرهنات: حيث هناك مجموعة من القواعد المنطقية التي ينتقل فيها المرء من المقدمات إلى النتائج ليستنتج صيغة منطقية صحيحة البناء، وعلى وفق تلازم منطقي متين.

ثالثا: العوامل المؤثرة في ظهور وتطور المنطق الرياضي:

إن المنطق الرياضي لم يكن ليتطور ويظهر بصورة مباشرة لولا مروره بالعديد من المراحل والفلسفات التي وضعت أسسه وبذرته الأولى، وبذلك ساهمت بظهوره وتطوره بصورته المعاصرة، ويمكن الإشارة بصورة مجملة إلى أهم الفلاسفة الذين تحدثوا عن المنطق في الفلسفات المختلفة.

أ ـ المنطق الرياضي في الفلسفات القديمة: يرى بعض الباحثين كالدكتور محمود فهمي زيدان في كتابه (المنطق الرمزي نشأته وتطوره) وكذلك الدكتور محمد الفندي في كتابه (أصول المنطق الرياضي) إلى أن المنطق الرياضي (الرمزي) هو عبارة عن منطق مأخوذ ومتطور من المنطق الصوري، حيث إن أرسطو طاليس ومن سار على خطاه من الفلاسفة والمناطقة قد استخدموا في العديد من الموضوعات المنطقية رموزاً تشير إلى حقائق مختلفة، فكان أرسطو طاليس حريصاً على كتابة القضايا في صورة رمزية، إذ كان يضع حروف الهجاء متغيرات ترمز إلى الحدود في القضية، فكان يعبر عن القضية الكلية (كل إنسان ناطق) بالقضية الرمزية (كل أ ب) (A All is B). وكذلك كان يصوغ القياس في صورة رمزية. وكذلك استخدم الاسكندر الافروديسي في أواخر القرن الثاني وأوائل القرن الثالث الميلادي الرموز ليعبر عن الحقائق والمباحث المنطقية.

وكذلك بعد أرسطو طاليس لا يمكن اغفال الرؤية التي تركتها المدرسة الميغارية ومن بعدها الرواقية في التدوين الرمزي والرياضي، فمثلاً نجد أن المدرسة الرواقية قد وضعت بذرة المنطق الرياضي وذلك لاستخدامهم للرموز، ونظرتهم للمنطق على إنه نسق استنباطي، فأدرك الرواقيون ضرورة التخلي عن لغة الحديث اليومية في الاستخدامات والكتب المنطقة، فاصطنعوا الرموز، لكنهم اختلفوا عن أرسطو طاليس باستخدامهم الأعداد الترتيبية رموزاً للقضايا، فمثلاً حين يصوغون قضية شرطية متصلة يعبرون عنها بـ (إذا

كان الأول، كان الثاني، لكن الأول، إذن الثاني)، وهذا بخلاف المنطق الأرسطي الذي عبر عن القضايا بالرموز الهجائية وكما تقدم.

ب ـ المنطق الرياضي في الفلسفات الحديثة:

ـ لايبنتز: يعد لايبنتز (١٦٤٦ ـ ١٧١٦م) من أعظم الفلاسفة الذين ظهروا في الفترة الحديثة، وضع مذهباً فلسفياً متكاملاً، يحوي نظرياته في الميتافيزيقا والأخلاق واللاهوت والسياسة والمنطق، أما آرائه المنطقية فإنه كان يرى بأن المنطق فيه فكرتين أساسيتين أولها، يمكن للمنطق أن يصبح نسقاً استنباطياً على نموذج الهندسة الإقليدية فيتألف من قضايا يبرهن عليها باستنباط مجموعة معطاة من البديهيات والتعريفات ومبادئ ومصادرات. ثانيها، يمكن للمنطق من حيث لغته وموضوعاته أن يتخذ من الرياضيات وعلم الجبر خاصة نموذجاً، فيكون المنطق بذلك لغته الرموز، وقوامه معادلات وقوانين.

وقد كان لايبنتز يرى بأن المنطق الأرسطي (من أروع ما اكتشفه العقل الإنساني، وهو فن العصمة من الزلل) وبذلك يمكن تطويره إلى نوع من الرياضيات الكلية، فيمكن للمنطق أن يتخذ الحروف الهجائية رموزاً للحدود، كما يمكن لقضاياه أن تتخذ صورة معادلات وقوانين على نموذج علم الجبر، فنرى لايبنتز مثلاً كان يصوغ الصور الأربعة للقضية الحملية (الكلية الموجبة، الجزئية الموجبة، الكلية السالبة، الجزئية السالبة) إلى رموز منطقية.

أمثلة:

كل إنسان حيوان.....كل أ ب

بعض الإنسان شاعر.....بعض أ ب

كل إنسان ليس بحجر..... كل أ لا ب

بعض الإنسان ليس بشاعر.....بعض أ لا ب

ـ جورج بول: يعد جورج بول (١٨١٥ ـ ١٨٦٤م) من الفلاسفة الروّاد في المنطق الرياضي، حتى اعتبره بعضهم بحق مؤسس المنطق الرياضي لأنه وضع مبادئ أولى نظرياته، وهي نظرية حساب الأصناف، وكان يسميها (حساب المنطق)، وأراد بول أن يكوّن منطقا يستخدم الرياضيات، فكتب العديد من الكتب في ذلك منها (التحليل الرياضي للمنطق، مقالة في حساب البرهنة الاستنباطية)، (حساب المنطق) وغيرها.

وقد حاول (بول) من كل تأليفاته السابقة أن يجعل من المنطق علماً رياضياً رمزياً، وكانت الرموز عنده نوعان هما المتغيرات والثوابت، أما المتغيرات فهي حدود القضايا التي عبّر عنها بالحروف الثلاثة الأخيرة (X.Y.Z) أما الثوابت فهي العلامات التي تدل على العلامات الثابتة التي لا يطرأ عليها التغيير أبداً كالأسوار والنفي والبدل في القضايا الحملية المنطقية، والجمع والقسمة والمساواة والطرح في الاستخدامات الرياضية.

ج ـ المنطق الرياضي في الفلسفات المعاصرة:

ـ فريجيه (فريجه) وبيانو:

لقد اتجه المنطق الرياضي وجهة جديدة على أيدي كل من (فريجيه ١٨٤٨ ـ ١٩٢٥م) وبيانو (١٨٥٨ ـ ١٩٣٢م)، عندما حاولا إقامته علماً رياضياً ورمزياً يتخلص من آثار لغة الحديث المستعملة بين الناس، فأرادا إقامته نسقاً استنباطياً محكماً نضع فيه قائمة التعريفات والمقدمات والبديهيات الأولية واضحة وصريحة منذ البدء.

أما مع **جوزيف بيانو**، فقد كانت الرياضيات موضوع اهتمامه الأساسي وقد قدّم هو واتباعه مجموعة من المؤلفات العديدة منها يمكن الإشارة إلى (تدوين الصيغ الرياضية ـ المصطلح الرمزي للمنطق الرياضي). وقد شارك من خلال هذه المؤلفات في إقامة المنطق الرياضي حتى إنه اصطنع استدلالات لها طابعها المنطقي الخالص، ثم وصل إلى أفكار

وقوانين منطقية جديدة أصبحت فيما بعد جزءاً لا يتجزأ من نظريات المنطق الرياضي، كما شارك في وضع نظرية حساب القضايا أو نظرية الاستنباط، كما عرف فكرة دالة القضية، ودرسها لإمكان اشتقاق الرياضيات من مبادئ منطقية، وقدّم أفكار جديدة في نظرية حساب دالات القضايا أو (حساب المحمول).

يُستخلص مما تقدم بأن بيانو حاول صياغة كل الأفكار والقوانين السابقة في صورة رمزية خالصة خالية من أي أثر لاستخدام اللغات، فقدّم مصطلحاً رياضياً يحوي رموزاً لمتغيرات الحدود والأصناف والقضايا والثوابت، يضاف إلى ذلك كله وضع المنطق في نسق استنباطي بوضع قائمة لحدوده اللامعرفة وتعريفاته ومقدماته الأولية.

أما مع جوتلوب فريجه: فقد كان استاذاً للرياضيات في جامعة (بينا)، شارك في حركة (تحسيب التحليل) أي تحويل التحليل إلى حساب، وفي (الاتجاه اللوجستيقي) أي رد التصورات الرياضية الأساسية إلى تصورات منطقية خالصة. وقد دون أعماله في كتب ومقالات عدّة أهمها (كتابه التصورات: لغة صورية للفكر الخالص تحاكي لغة علم الحساب) (أسس علم الحساب) (القوانين الأساسية لعلم الحساب) (الدالة والتصور) وغيرها.

وقد أدرك من مؤلفاته هذه كي يكون العمل اللوجستيقي محكماً يلزم أن يكون المنطق ذاته نسقاً استنباطياً محكماً.

ـ برتراند رسل وألفريد وايتهد:

يمثل كتاب (مبادئ الرياضيات) الذي ألفه رسل (١٨٧٢ ـ ١٩٧٠م) ووايتهد (١٨٦١ ـ ١٩٤٧) الحلقة التالية والمكملة لحلقة فريجه ـ بيانو في تطور المنطق الرياضي. ويضم هذا الكتاب جانبين مهمين من الجانب المنطقي والرياضي، كتب رسل الجانب المنطقي من الكتاب، بينما كتب وايتهد جانبه الرياضي.

رابعا: المنطق والرياضيات:

إن الحديث عن علاقة المنطق بالرياضيات يتطلب منا في الواقع الدخول في كثير من الموضوعات التي لا تعنينا هنا كثيراً، وأغلبها موضوعات تتصل بأمور فنية دقيقة في فلسفة المنطق والرياضيات، ويكفينا هنا أن نرسم صورة هذه العلاقة في ملامحها العامة، مركزين بوجه خاص على الاتجاهات الحديثة لها.

من الحقائق الواضحة أن الرياضيات كانت منذ أقدم العصور وما زالت حتى يومنا الحاضر موضع الثقة واليقين، فقضاياها تخلو من الخطأ؛ ومنهجها لابد أن يوصل إلى النتائج اليقينية، ولعل هذا هو السبب في أنها عادة ما تعرف على أنها (العلم الدقيق). ومن هنا لجأ كثير من الفلاسفة ـ بحثاً عن اليقين ـ الى تفسير الكون تفسيراً رياضياً، كما فعل الفيلسوف اليوناني القديم (فيثاغورس ٥٨٠ – ٥٠٤ ق.م) أو إلى تطبيق المنهج الاستنباطي الرياضي على جميع نواحي التفكير الفيزيقي منه والميتافيزيقي كما فعل (ديكارت).

ومن الواضح أن الفلاسفة اليونان كانوا متأثرين بالرياضيات تأثراً كبيراً حتى قيل إن صورة تفكيرهم جميعها كانت رياضية في أساسها ما دامت هذه الصورة هي الكفيلة بتوصيلهم إلى اليقين الذي كانوا ينشدونه، وإذا كان الأمر كذلك فلا يبدو غريباً أن يكون منطق أرسطوطاليس ـ وهو منطق التفكير اليوناني ـ متأثراً إلى حدّ بعيد بالرياضيات، بل لقد ذهب الفيلسوف الألماني (ليبنتز - loibnits) إلى حد القول إن نظرية القياس نوع من الرياضيات العامة وإن دل ذلك على شيء إنما يدل على أن الارتباط الذي أخذ يزداد قوة حتى وصل الأمر عند بعض المناطقة المعاصرين إلى حد التطابق بين العلمين، واعتبار التفرقة بينهما تعسفية ليس لها ما يبررها في طبيعة المنطق والرياضيات.

فقد حدث في العصور الحديثة وخاصة منذ القرن التاسع عشر تطور هائل في كل من المنطق والرياضيات. فقد كان التعريف التقليدي للرياضيات هو أنها (علم المقدار المتصل والمنفصل) وباختصار هي (علم الكم). وقد بدأ هذا التعريف ـ وكان من الطبيعي أن يبدو ـ

مقنعاً، إذ أن النظر الى الحساب والجبر على أنهما يختصان بالأعداد، وإلى الهندسة على أنها تتعلق بالمقدار المتصل والمنفصل، ولكن بعد أن تطورت الرياضيات في العصور الحديثة اتضح للرياضيين عدم وجود علاقة جوهرية بين الرياضيات والكم. وقد تم في القرن الماضي اختراع الرياضيات البحتة الذي يُعزى عادة إلى (جورج بول) G. Boole (١٨١٥ ـ ١٨٦٤) الذي أظهر طبيعة الرياضيات على أنها نسق استنباطي نبدأ فيه بمقدمات معينة تلزم عنها النتائج بواسطة الاستدلال الصوري البحت.

وقد تطور المنطق أيضاً تطوراً كبيراً إبان الفترة الأخيرة نتيجة التطور الذي حدث في الرياضيات، وظهر لنا ما يسمّى بالمنطق اللوجسطيقي (Logistic) أو المنطق الرياضي. وقد بدأ هذا المنطق كجزء من الرياضيات، ولكن سرعان ما وجد له تطبيقاً على كثير من فروع الرياضيات التقليدية.

وكان من نتيجة هذه التطورات أن أصبح المنطق أكثر رياضياً، وأصبحت الرياضيات أكثر منطقية حتى أصبح من المستحيل وضع خط فاصل بين الاثنين. فهما في الواقع ـ كما يقول (برتراند رسل) ـ شيء واحد. وما الاختلاف بينهما إلا كالاختلاف بين الصبي والرجل، فالمنطق شباب الرياضيات، والرياضيات رجولة المنطق. فنحن إذا بدأنا من المقدمات التي تسلم تماماً بأنها منتمية إلى المنطق ووصلنا عن طريق الاستنباط إلى نتائج تنتمي بشكل واضح الى الرياضيات لوجدنا أن ليس هناك نقطة يمكن عندها رسم خط فاصل يوضع المنطق على يساره والرياضيات على يمينه.

إن أصحاب هذا الاتجاه ـ وعلى رأسهم فريجه G. Frege (١٨٤٨ ـ ١٩٢٥) و (رسل) و(وايتهد) A. N. Whitehoad (١٨٦١ ـ ١٩٤٧) ـ يرون أن الرياضيات يمكن أن ترتد كلية الى المنطق، بحيث تصبح الرياضيات جزءاً من المنطق أو امتداداً له على أساس:

١ـ أن التصورات الرياضية يمكن اشتقاقها من المنطق خلال تعريفات محددة.

٢ـ إن النظريات الرياضية يمكن أن تشتق من بديهيات المنطق خلال الاستنباط المنطقي الخالص.

وقد جعل (رسل) من أغراض كتابه (أصول الرياضيات) البرهنة على أن جميع الرياضيات البحتة تنفرد بالبحث في المفاهيم التي يمكن تعريفها في حدود عدد قليل جداً من المفاهيم المنطقية الأساسية، وإن جميع قضاياها يمكن استنباطها من عدد قليل جداً من المبادئ المنطقية الأساسية.

وهكذا لا نجد فصلاً بين الرياضيات والمنطق، فأول العلمين جزء من ثانيهما أو امتداد له، كما لا نجد فرقاً بين طبيعة كل من العلمين (فكلاهما لا يبحث في الأشياء الجزئية أو الخواص الجزئية، بل يبحث بطرية صورية فيما يمكن أن يقال عن (أي) شيء أو (أي) خاصية. فليس في استطاعتنا إلا أن نقول واحد وواحد اثنان، لا أن نقول سقراط وأرسطو اثنان، لأنه في حدود طاقتنا بوصفنا مناطقة خلص أو رياضيين خلص لم نسمع عن سقراط وأرسطو، والعالم الذي لم يكن فيه مثل هذين الفردين لم يزل عالماً فيه واحد وواحد اثنان. فلا يحرز لنا أن نذكر أي شيء على الاطلاق، وإلا لأدخلنا شيئاً غريباً غير ضروري، وعدم ذكر الأشياء الجزئية والخواص الجزئية في المنطق والرياضيات هو نتيجة ضرورية للحقيقة القائلة إن هذه الدراسة صورية بحتة. ولما كانت القضايا المنطقية والرياضية تتميز بهذه العمومية، فإنها لا تتعلق إلا بصورة القضية فضلاً عن أن قضايا المنطق والرياضيات يمكن معرفتها بطريقة (أولية) دون دراسة العالم الفعلي. كما إن هذه القضايا في الواقع (تحصيل حاصل) أو (تكرارية).

والواقع إن رد الرياضيات الى المنطق جاء نتيجة مجهودات كبيرة بدأها (جورج بول) في كتابه (قوانين الفكر) وتابعه في هذا الاتجاه كثير من الرياضيين والمناطقة، لعل من أهمهم العالم الرياضي الإيطالي (بيانو) (Peano) (١٨٥٨-١٩٣٢) (الذي اخترع نسقاً قائماً على البديهيات كأساس للرياضيات، وأرجع فيه الرياضيات برمتها الى الاعداد

الطبيعية، ثم جاءت المدرسة المنطقية المعاصرة وعلى رأسها (فريجة) و(رسل) و(وايتهد)، وقامت بتعريف أوليات (بيانو) (ومنها العدد) التي كان قد تركها دون تعريف لتردها إلى أفكار منطقية خالصة، وتثبت بذلك أن الرياضيات تقوم بأكملها على عدد قليل من الأفكار المنطقية الخالصة.

ولكن لابد أن نضع في اعتبارنا أن رد الرياضيات الى المنطق لا يعني بالطبع أن العمليات الرياضية التي يجريها الرياضي هي نفسها العمليات المنطقية بحيث تكفي معرفة المنطق لممارسة الرياضيات. وكل ما هو مقصود هنا أن الرياضيات يمكن عرضها بوصفها بنية منطقية بشكل كامل على وجه لا يدخل الحدس معه في البرهنة الرياضية. ومن الواضح هنا أن هذا لا يعني أن عمليات الكشف الرياضي تنحصر في دائرة الدليل العقلي الاستنباطي، بل على العكس فإن رجل الرياضيات يستخدم جميع مصادر البصيرة العلمية، فهو يتخيل ويركن الى المماثلات analogies ويسترشد بالحدس الهندسي وباحساس الصورة الخالصة اللذين يقودانه الى الاكتشافات الهامة. إلا أن النظريات الرياضية التي يتم اكتشافها لابد أن تكون قابلة لأن تصاغ بشكل مجرد، وأن يتم البرهان عليها بالمناهج المنطقية الخالصة.

وهكذا تكون الرياضيات بهذا المعنى ـ مشتقة من المنطق. وتصبح بنيتها منطقية في أساسها. ولا تكون الصلة بين العلمين ـ في نظر هذا الاتجاه ـ مجرد التأثير المتبادل، بل التطابق بين طبيعتها. والمنهج واحد في العلمين وخصائص قضاياهما واحدة، لأن الرياضيات ما هي إلا امتداد للمنطق.

إلا أن هذا التجاه المنطقي للرياضيات قد واجه معارضة حادة من جانب بعض مدارس الفلسفة الرياضية المعاصرة. مثل المدرسة الصورية أو (الشكلية) والمدرسة الحدسية. ولا يهمنا هنا الدخول في الحديث عن آراء مثل هذه المدارس ويكفي أن نذكر هنا مثالاً للاتجاه المعارض للاتجاه المنطقي وهو المدرسة الحدسية فقد شاءت المدرسة الحدسية أن تقيم

الرياضيات على أساس عقلي بحت تقوم فيه جميع الرياضيات على الحدس. وبذلك تكون قضاياها واضحة بذاتها لا تحتاج الى أي مبادئ منطقية، إذ أن القضايا الرياضية، في نظر هذه المدرسة ـ تركيبات ذهنية أكثر وضوحاً من المنطق، وأفعال شعورية لا تحتاج إلى أي مبدأ منطقي تقوم عليه.

وتقرأ في المناظرة الطريفة التي تخيلها (هايتنج) ـ أحد أنصار المدرسة الحدسية ـ تدور بين مجموعة من الشخصيات، ؟؟؟ كل منها الى اتجاه في فلسفة الرياضيات الكثير عن وجهة نظر الحدسيين المعاصرين في الرياضيات، وعلاقة الرياضيات بالمنطق، ففي هذه المناظرة يجد أحد المشتركين في المناظرة ـ ومن المرجع أن يكون ممثل الاتجاه المنطقي ـ يوجه الحديث الى ممثل الاتجاه الحدسي مقرراً أنه يعطي أهمية للمنطق في آرائه عن الرياضيات، فيرد ممثل الحدسيين قائلاً: (يؤسفني أن أخيب ظنك، فليس المنطق هو الأساس الذي عليه استند، وكيف يكون ذلك والمنطق بدوره في حاجة الى أساس يقوم على مبادئ أكثر تعقيداً وأقل مباشرة للذهن من تلك المبادئ الخالصة وبالرياضيات نفسها إن البناء الرياضي لابد وأن يكون مباشراً للذهن أكثر، ولابد أن تكون نتائجه أكثر وضوحاً على وجه لا نكون معه بحاجة أي مبدأ أياً كان، وينبغي أن يكون معلوماً جيد العلم أن التفكير الرياضي يكون سليماً بدون استخدام المنطق، فهذا التفكير أفعال علمية شعورية واضحة وقائمة بذاتها... بل إن النظرية المنطقية ما هي إلا رياضية على درجة قصوى من التعميم، أعني أن المنطق جزء من الرياضيات ولا يمكن النظر إيه على أنه أساس لها.

وهكذا يرفض (هايتنج) محاولة رد الرياضيات الى المنطق، على أساس أن قضايا الرياضيات أكثر وضوحاً للذهن من قضايا المنطق، ولذلك ذهب في عكس الطريق الذي سار فيه أنصار المدرسة المنطقية، وقال بإمكان رد المنطق إلى الرياضيات بوصفه جزءاً منها فالمنطق بهذا المعنى يفترض حقائق الرياضيات، ولكن الرياضيات لا تفترض حقائق المنطق.

ولكن يبدو أن هذا الاتجاه لم يلاق تأييداً كبيراً من معظم المناطقة المعاصرين وظلت السيادة معقودة للاتجاه المنطقي الذي أصبح بحث الصورة الحالية الشائعة للدراسات المنطقية والرياضية، فتكاد تجمع الكتابات المعاصرة في المنطق وفلسفة الرياضيات على تدعيمه، وتؤكد هوية العلمين على صورة يمكننا معها أن نقول ما قاله (رسل) من أن المنطق والرياضيات شيء واحد.

ولا نجد بنا حاجة هنا الى مناقشة الاتجاه المنطقي والاتجاه الحدسي في الرياضيات، إلا أننا نلاحظ بوجه عام أنهما ـ على الرغم من الاختلاف الواضح بينهما ـ يؤكدان أن الارتباط الوثيق بين المنطق والرياضات. فعلى حين ذهب أنصار الاتجاه الأول الى اعتبار الرياضيات جزءاً من المنطق، رأى أنصار الاتجاه الثاني أن المنطق جزء من الرياضيات، وإن دل ذلك على شيء إنما يدل على مدى ما يمكن أن تلمسه من الصلة التي لا تنفصم بين المنطق والرياضيات.

صلة وعلاقة المنطق بالرياضيات:

يذكر الدكتور محمد الفندي في كتابه (أصول المنطق الرياضي ـ لوجستيقا) العديد من الآراء والأفكار التي وضعها المناطقة والفلاسفة في نظرتهم لطبيعة العلاقة بين المنطق والرياضيات، نذكر مها بصورة مختصرة ودون التعرض لأمهات المسائل والتفاصيل المعقدة، الآراء التالية:

الرأي الأول: التشابه الظاهري:

ويتبناه بعض الفلاسفة المعاصرون حيث يرون أن العلاقة بين المنطق والرياضيات تكون في المظهر أو الثوب الخارجي، فكلاهما رمزي وصوري أما الرمز فمعناه أن المنطق الرياضي يستخدم الرموز للدلالة على قضاياه. أما الصورية فهي ليست مستحدثة في المنطق فقد عرف المنطق منذ القدم كيف يرد القضايا مهما تنوعت إلى وحدة صورية تتمثل بالموضوع والمحمول والقياس لا ينتج ويكون صحيحاً إلا بفضل صورته تلك الصورة التي تكون عبارة عن أشكال وضروب وحسب موضع الحد الأوسط، وهو نفسه في الرياضيات التي تكون صورية كذلك فيها مجموعة من القواعد الرياضية التي يجب الالتزام بها لتكون النتائج صحيحة.

الرأي الثاني: جبر المنطق:

ومن أهم من تبناه يصح الإشارة إلى (لايبنتز) وكذلك إلى (بول)، ويدعي جبريو المنطق بأن المنطق في حقيقته هو فرع من فروع الرياضيات، وبذلك تكون الصلة بين المنطق والرياضة في ضوء هذا المذهب صلة الجزء بالكل، والمنطق بذلك عند جبريي المنطق جزء من أجزاء الرياضيات ونظرية من نظرياتها.

الرأي الثالث: النظرية اللوجستيقية:

ويرد أصحاب هذا الرأي الرياضيات (البحتة) بحذافيرها إلى المنطق، بحيث يكون الأمر أن الرياضيات هي العائدة إلى المنطق وهي جزء منه وامتداداً له في قضاياها ومتغيراتها وثوابتها وليس فيها من شيء سوى المنطق الصوري وحده بحيث يكون هذا الرأي عكس الرأي الثاني، وطبقاً لهذا الاتجاه والذي يعد (فريجه وبيانو ورسل ووايتهد) من متبنيه أن الرياضيات تبدأ بمجموعة من الحدود أو الخصائص أو التصورات أو الدوال، ثم مجموعة أخرى من القضايا غير المبرهنة كالمُسَلّمات أو الأصول الموضوعة أو قضايا ابتدائية، تنحى على قيام علاقات معينة بين عناصر المجوعة الأولى تُبيّن كيفية استعمالها رياضياً، ومن هاتين تشتق كل النظريات عن طريق الاستنباط والاستدلال المنطقي وحده.

وإذا علمنا أن تلك الحدود الرياضية الابتدائية يُمكن أن تُحل إلى تعريفات وثوابت وحدود منطقية، وأن المُسَلّمات الرياضية يمكن بدورها أن ترجح بطريقة الاشتقاق المنطقي والاستنباط الى قضايا المنطق وحده، ثبت بأن الرياضة هي امتداد لحدود المنطق وقوانينه ومستغرقة فيها، وليس فيها من شيء سوى المنطق وحده.

المبحث الثاني

نظرية القضايا

تعد نظرية القضايا من أهم الموضوعات التي تخص علم المنطق وذلك لأنها تمثل مجموعة المرتكزات التي تقوم عليها نظرية الاستدلال، كما أن نظرية القضايا تشكّل المدخل الرئيس لجميع النظريات المنطقية الأخرى سواء أكان ذلك في المنطق الرياضي أو المنطق الصوري.

أولا: تعريف القضية:

إن المراد من القضايا ومفردها (قضية) هي المركب التام أو القول المفيد الذي يصح أن نصفه بالصدق تارةً أو بالكذب تارة أخرى فالقضية عبارة ذات معنى تحتمل الصدق أو الكذب.

ويجب أن يعرف بأن علم المنطق لا يتعامل مع جميع القضايا اللغوية، بل أنه يختص بالقضايا والجمل الخبرية والتي وحدها تحتمل معنى الصدق أو الكذب لهذا قال المصنف (ياسين خليل) في كتابه (محاضرات في المنطق الرياضي)، (يجب أن نستبعد من التعريف الخاص بالقضية جميع التراكيب اللغوية الأخرى مثل الجمل الاستفهامية والتعجبية والأوامر والنواهي وغيرها، وكذلك تم استبعاد الجمل الناقصة). من هنا يعرف رسل القضية بأنها (الجملة الإخبارية التي تحتمل الصدق أو الكذب).

ملحوظة (١): إن الجمل في اللغة العربية إما أن تكون جمل مفيدة وهي التي يصح السكوت عليها، بحيث إن السامع لا ينتظر كلام آخر لتعم الفائدة به، كقولنا (الصبر شجاعة، الجو حار، صباح الخير). وهي تسمى في الاصطلاح المنطقي بالمركب التام.

أو أن تكون جمل غير مفيدة لا يصح السكوت عليها، وأن السامع ينتظر من المتكلم كلام آخر كي يحصل على فائدة، فمثلاً (مياه البحر...، قيمة كل امرئ....)، وهذه الجمل تسمى في الاصطلاح المنطقي بالمركبات الناقصة.

ملحوظة (٢): إن الجمل المفيدة (المركبات التامة) إما أن تكون جمل خبرية أو جمل إنشائية، والمصنف عندما عرّف القضية بأنها قول مفيد يحتمل الصدق أو الكذب، أخرج في تعريفه جميع الجمل الانشائية لأنها وإن كانت مركبات مفيدة وتامة إلا أنها لا يصح وصفها بالصدق أو الكذب، والتراكيب الإنشائية تشمل الأوامر مثل (قُم)، النواهي (لا تكذب)، الدعاء (يا الله)، الاستفهام (هل سقراط فيلسوف؟)، التمنّي (يا ليت الشباب يعود يوماً)، التعجب (ما أعظم البحر).

إذن نستخلص ممّا تقدّم بأن القضايا تشمل فقط الجمل الخبرية لأنها تشكّل وحدة لغوية ذات معنى تام ومفيد، أما إذا كانت القضية عبارة لا تنطوي على هذه الشروط فلا تُعدّ قضية من وجهة النظر المنطقية.

أمثلة على ما تقدم:

١ـ الغزالي فيلسوف عربي ـ قضية منطقية.

٢ـ سقراط فيلسوف يوناني ـ قضية منطقية.

٣ـ الصبر جميل ـ قضية منطقية.

٤ـ اذهب خارج الغرفة ـ ليست قضية منطقية (صيغة أمر ـ جملة انشائية)

٥ـ هل المريخ مسكون؟ ـ ليست قضية منطقية (صيغة سؤال واستفهام ـ جملة إنشائية).

ويرى الدكتور ياسين خليل بأن المنطق الرياضي يركّز على اهتمامه على القضايا سواء أكانت في لغة الحياة اليومية، أو تلك القضايا التي تدخل ضمن حقول العلوم

المختلفة، وتعدّ كل قضية في نظرية القضايا ذات وحدة واحدة لا يمكن تجزئتها وعندما يتم اختيار الرمز الرياضي والمنطقي لها فهي بذلك لا ينظر إلى جزء واحد منها بل يمثل كل رمز التركيب الداخلي لكل قضية، وهذا معناه أن سلوك القضية في نظرية القضايا يعتمد على كونها وحدة غير مجزأة من جهة وكذلك في علاقتها مع القضايا الأخرى من جهة ثانية.

ويعبر عن كل قضية منطقية برمز معين يتم التعامل معه على أنه متغير يقبل جمل واضحة لا يمكن عدها وحصرها في الصيغة المنطقية، دون النظر إلى الدلالة التي قد تشير إليها، فقد يشير الرمز (ق) مثلاً إلى القضية (سقراط فيلسوف أو الغزالي فيلسوف مشرقي) وهكذا.

ويرمز للقضايا المنطقية في المنطق الرياضي بمجموعة من الحروف الأبجدية وتشكل هذه الرموز (الحروف الأبجدية) على أساس أنها متغيرات تمثل القضايا المنطقية، وهذه الرموز هي (ق، ل، م، ن).

والمنطق الرياضي يتعامل مع القضايا التي في حد ذاتها تحتمل الصدق أو الكذب لذا كان هذا المنطق (ثنائي القيمة) حيث أن كل قضية فيه تحتمل قيمتين (قيمة الصدق أو قيمة الكذب) ويعبر عن القضايا الصادقة بالرمز (ص) وعن القضايا الكاذبة بالرمز (ك).

ت	أمثلة منطقية صورية	أمثلة منطقيةرياضية
١	الإنسان حيوان ناطق	ق (ص)
٢	الحصان حيوان صاهل	ق (ص)
٣	أفلاطون فيلسوف عربي	ق (ك)
٤	بغداد عاصمة مصر	ق (ك)

ثانيا: أقسام القضايا (القضايا البسيطة والقضايا المركبة)

تُقسم القضايا إلى أقسام متعددة، ومن جملة تقسيماتها هو تقسيمها إلى قضايا بسيطة وقضايا مركبة، والمراد من القضية البسيطة هي قضية واحدة في الأصل وفي النطق. مثل ق أي الإنسان ناطق.

أما القضية المركبة، فهي القضية التي يمكن تجزئتها إلى عدة قضايا بسيطة، أو أنها تتكون من أكثر من قضية بسيطة واحدة مثالها:

إذا أشرقت الشمس فالنهار موجود.

قضية بسيطة قضية بسيطة

(ص) (ص)

ق ل

ثالثا: الروابط المنطقية في نظرية القضايا وجداول القيم المنطقية:

أ- الروابط الأحادية؛ رابطة النفي:

تعد رابطة النفي من الروابط المنطقية التي تقوم على قلب قيمة القضية من الصدق إلى الكذب أو العكس، فإذا كانت قضية ما صادقة فإنه بدخول رابطة النفي عليها تجعلها كاذبة وإذا كانت كاذبة فإنه بدخول النفي عليها تجعلها صادقة فإذا قلنا:

الطلاب موجودون ثم أدخلنا عليها رابطة النفي ليس الطلاب موجودين

ق (ص) ¬ ق (ك)

أصبحت القضية بعد دخول رابطة النفي كاذبة، فرابطة النفي تعمل على قلب القيمة الأصلية في القضية ويرمز لـ رابطة النفي بالرمز (¬).

جدول القيم لرابطة النفي:

ق	¬ ق		الإنسان شاعر	ليس الإنسان شاعر
ص	ك		ص	ك
ك	ص		ليس سقراط فيلسوف	ليس صحيحاً أن سقراط ليس فيلسوف (نفي النفي اثبات)
			ك	ص

قاعدة رابطة النفي: إذا كانت ق (ص) فإن ¬ ق (ك).

إذا كانت ¬ ق (ك) فإن ق (ص).

مثال:

سقراط يوناني ليس سقراط يونانياً

ق (ص) ¬ ق (ك)

****

ب ـ الروابط الإثنينية:

١ـ رابطة البَدَل (الفصل):

تعد رابطة البدل من الروابط المنطقية التي تعمل على ربط قضية بقضية أخرى مكونة قضية جديدة ومركبة ويرمز للبدل بالرمز (v)، وتكون قضايا البدل صادقة عند صدق قضاياها معاً أو عند صدق إحدى القضايا المكونة لها، وتكون كاذبة في حالة واحدة، وهي كذب قضاياها معاً، ويعبر عنها (.... أو....).

القواعد الرياضية الخاصة برابطة البدل:

تكون قضايا البدل صادقة عند:

١ـ صدق كل من القضيتين ق أو ل.

٢ـ عند صدق ق أو كذب ل.

٣ـ عند كذب ق أو صدق ل.

وتكون كاذبة عند كذب القضيتين معاً ق أو ل.

ـ جدول القيم لرابطة البدل:

ق ل	ق v ل	تكون القضية البدلية ق v ل صادقة في جميع الحالات، عدا حالة كذب كل من ق ول فإنها تكون كاذبة.
ص ص	ص	
ص ك	ص	
ك ص	ص	
ك ك	ك	

أمثلة:

ابن سينا فيلسوف عربي أو ابن سينا أستاذ للمنطق.

ص v ص = ص

٢ـ رابطة البدل المطلق: (رابطة اثنينية):

تعد من الروابط المنطقية الاثنينية التي تقوم بربط قضية بأخرى مكونة قضية جديدة ومركبة، ويرمز للبدل المطلق بالرمز (v)، وتكون قضايا البدل المطلق صادقة عند كذب أحد القضيتين، وتكون كاذبة صدق القضيتين أو كذبهما معاً، ويعبر عنها (إما.... أو....).

ـ القواعد الرياضية الخاصة برابطة البدل المطلق:

تكون قضايا البدل المطلق صادقة عند:

١ـ صدق القضية ق وكذب القضية ل.

٢ـ كذب القضية ق وصدق القضية ل.

وتكون كاذبة عند:

١ـ صدق القضيتين ق و ل معاً.

٢ـ كذب القضيتين ق و ل معاً.

ـ جدول القيم لرابطة البدل المطلق:

ق ل	ق v ل	تكون القضية البدلية المطلقة صادقة عند صدق أحد القضايا وكذب الأخرى وتكون كاذبة عند صدقهما أو كذبهما معاً.
ص ص	ك	
ص ك	ص	
ك ص	ص	

ك ك	ك	

أمثلة:

إما الجملة تكون إسمية أو الجملة خبرية. ص ∨ ك = ك

٣- رابطة العطف:

رابطة منطقية اثنينية تعمل على ربط قضية بأخرى مكوّنة قضية عطفية ويرمز للقضية العطفية بالرمز (٨)، ويعبر عنها بـ (.... و ....)، وتكون قضايا العطف صادقة في حالة واحدة وذلك عند صدق القضيتين (ق،ل) معاً، وتكون كاذبة في جميع الحالات المتبقية:

١- عند صدق ق وكذب ل.

٢- عند كذب ق وصدق ل.

٣- عند كذب ق وكذب ل معاً.

- جدول القيم لرابطة العطف:

ق ل	ق ٨ ل	**تكون القضية العطفية صادقة في حالة واحدة وهي صدق القضيتين معاً، وكاذبة في كل الحالات الثلاث الأخرى.**
ص ص	ص	
ص ك	ك	
ك ص	ك	
ك ك	ك	

أمثلة:

ابن الهيثم عالم فيزياوي وابن البيطار طبيب عربي. ص ∧ ص = ص

ابن النديم مؤرخ عربي وابن النفيس طبيب يوناني. ص ∧ ك = ك

٤ـ الرابطة الشرطية: (رابطة الإلزام ـ التضمين ـ اللزوم):

رابطة منطقية اثنينية تقوم بربط قضية بأخرى مكونة بذلك قضية جديدة ومركبة، ويرمز لها بالرمز (←)، وتُسمى القضية التي تسبق رمز الشرطية بالسابقة والقضية التي تليها باللاحقة. وتكون القضايا الشرطية صادقة في جميع الحالات وتكون كاذبة في حالة واحدة وهي صدق السابقة وكذب اللاحقة.

ملحوظة: ليس هنالك من ضرورة للربط بين القضايا الشرطية بعلاقة ضمنية بين القضية السابقة والقضية اللاحقة من الوجهة المنطقية.

(إذا كان أفلاطون يوناني فإن ٢ + ٢ = ٤)

ـ جدول القيم للرابطة الشرطية:

ق ل	ق ← ل	
ص ص	ص	**تكون القضية الشرطية كاذبة في حالة صدق السابقة وكذب اللاحقة، وصادقة في الحالات الباقية.**
ص ك	ك	
ك ص	ص	
ك ك	ص	

ملاحظات مهمة حول القضايا الشرطة:

١ـ أن كل قضية شرطية مركبة في أصلها من قضيتين حمليتين.

٢ـ تدخل أدوات الشرط على القضايا الحملية لتحولها شرطية، مثل: (إذا ـ إنْ ـ كُلَّما) في الشرطية المتصلة. و(إمّا ـ أو) في الشرطة المنفصلة.

أمثلة:

إذا أشرقت الشمس فالنهار موجود.

إما أن يكون الإسم مبنياً أو أن يكون الإسم مُعرباً.

إذا كانت النار مشتعلة فالحرارة موجودة.

ليس كلما كان الوالد صالحاً كان الولد اميناً.

العدد إما أن يكون زوجاً أو فرداً.

****

٥ ـ رابطة التكافؤ؛ (المساواة):

رابطة منطقية إثنينية تقوم بربط قضية بأخرى مكونة قضية جديدة ومركبة يرمز لها بالرمز (↔)، ويُعبر عنها (إذا وفقط إذا).

القواعد الرياضية الخاصة برابطة التكافؤ:

تكون هذه القضية صادقة عند:

١ـ عند صدق القضية ق و ل معاً.

٢ـ عند كذب القضية ق و ل معاً.

وتكون القضية التكافؤية كاذبة في الحالات التالية:

١ـ عند صدق القضية ق وكذب القضية ل.

٢ـ عند كذب القضية ق وصدق القضية ل.

ـ جدول القيم لرابطة التكافؤ:

ق	ل	ق ↔ ل	
ص	ص	ص	**تكون القضية صادقة في حالتين، صدقهما وكذبهما معاً، وكاذبة عند كذب أو صدق أحدهما.**
ص	ك	ك	
ك	ص	ك	
ك	ك	ص	

أمثلة توضحية:

أفلاطون فيلسوف إذا وفقط إذا كان سقراط أستاذه. ق ↔ ل = ص

المبحث الثالث

القواعد البنائية للقضايا

إن كل لغة من اللغات و(كل علم من العلوم) المختلفة لا يمكن أن يصل إلى النتائج والحلول المطلوبة دون أن يكون هناك مجموعة من القواعد البنائية والأساسية التي يعتمد عليها في الحصول على المطلوب، فمثلاً مع اللغة العربية فإنه في سبيل التفاهم مع الآخرين نجد هناك العديد من الأصوات التي يتم تدوينها في رموز متعارف عليها هي الحروف، تترابط مع بعضها البعض لتكون الكلمات والمقاطع والجمل، ولا تتكون هذه الكلمات كيفما اتفق بل هناك العديد من القواعد البنائية والنحوية والصرفية التي لا يجوز الخروج عليها وكل خروج عنها معناه تشكيل عبارات لا تمت إلى اللغة العربية بأي صلة.

وهذا الأمر يصدق كذلك مع المنطق الرياضي، إذ تحتم الضرورة تعيين الأبجدية الرمزية أولاً، وتعيين الأدوار الصورية للرموز المستخدمة ثانياً، ولا يتم هذا الترابط كيفما اتفق، بل يجري على وفق قواعد بنائية معينة، وبناء الصيغ في اللغة الرمزية وهي لغة رمزية صورية بحتة تعتمد على مجموعة من القواعد الصورية، والتي تسمح ببناء صيغ صحيحة البناء، ولا تسمح ببناء صيغ غير صحيحة البناء.

وعلى ما تقدم تُعرّف:

أ ـ الصيغة صحيحة البناء: متتابعة رمزية محددة تتألف من رموز معينة، وتخضع لبناء القواعد البنائية المُثبَتَة في اللغة الرمزية، ويرمز لها اختصاراً (صصب).

أمثلة:

ت	الصيغة الرمزية	المثال
١	¬ ¬ ق	ليس صحيحاً أن سقراط ليس بفيلسوف
٢	¬ق ٧ ¬ل	ليس أوغسطين بفيلسوف يوناني أو ليس الأكويني بفيلسوف روماني
٣	¬ق ٨ ل	ليس ابن سينا استاذاً للبيان وابن سينا استاذاً للفلسفة
٤	ق٧ل ↔ ل٧ق	سقراط فيلسوف أو أثينا عاصمة اليونان إذا وفقط إذا كانت أثينا عاصمة اليونان أو سقراط فيلسوف
٥	(ق ٨ ل) ← ن	(إذا كان جورج بول مؤلفاً لكتاب التحليل الرياضي للمنطق وجوزيف بيانو مؤلفاً لكتاب المصطلح الرمزي للمنطقي الرياضي) فإن برتراند رسل مؤلفاً لكتاب مبادئ الرياضيات

ب ـ الصيغة غير صحيحة البناء: متتابعة رمزية محددة تتألف من رموز معينة، ولا تخضع لبناء قاعدة بنائية واحدة في الأقل، ويرمز لها اختصاراً (غصب). وتكون القضايا (غصب) في الحالات التالية:

١ـ عند عدم دخول رابطة النفي على قضايا. مثل: ¬ ق ¬.

٢ـ عند تتابع رابطتين دون وجود قضايا بعدها. مثل: ق ∨ ل ¬¬، ق¬ ∧ ل، ق ↔ ∧ ل ق.

٣ـ عند عدم وجود رابطة بين قضيتين. مثل: ق ل ∧ ن.

٤ـ عند تعدد القضايا والروابط المنطقية وعدم وجود أقواس تفصل بين القضايا مثل، ق ← ل ← م.

أولا: القواعد البنائية للقضايا والصيغ صحيحة البناء:

ـ نبدأ بالخطوات التالية:

أـ تعيين متغيرات القضايا مثل (ق ـ ل ـ م ـ ن - A – B – C – D)

ب ـ تعيين الروابط المتمثلة بالثوابت في القضايا مثل: (¬ ، ∨ ، ⊻ ، ∧ ، ← ، ↔).

ج ـ خطوة تعيين الأقواس وهي بأشكال مختلفة منها: ()، [ ]، { }.

القاعدة الأولى: قاعدة النفي:

وتنص هذه القاعدة بأن القضية متى ما كانت بنيتها الداخلية صيغة صحيحة البناء (صصب)، فإن نفي القضية تكون كذلك (صصب). فمتى ما كانت ق (صصب) فإن ¬ ق (صصب) أيضاً.

ولا يتم التأكد من صحة هذه القاعدة إلا بعد أن نفترض أن القضايا فيها بسيطة أو مركبة هي صيغ صحيحة البناء، وعندئذٍ فقط يمكن الانتقال الى بناء صيغ منفية (صصب).

مثالها:

إذا كان ق صصب فإن ¬ ق صصب، وبتعبير آخر:

ق	سقراط فيلسوف	(ص) (صصب)
¬ق	ليس سقراط فيلسوف	(ك) (صصب)

القاعدة الثانية: قاعدة البدل:

وتنص هذه القاعدة بأن القضية المركبة متى ما كانت قضاياها ق ، ل (صصب) فإن بدل القضية (ق ٧ ل) تكون (صصب) أيضاً.

ولا يتم التأكد من صحة هذه القاعدة إلا بعد أن نفترض أن القضايا ق ، ل (صصب) فنحصل على (ق ٧ ل) (صصب).

مثالها:

ق ، ل صصب فإن ق ٧ ل صصب وبتعبير آخر:

ق، ل	سقراط فيلسوف، فريجيه فيلسوف رياضي	صصب
ق ٧ ل	سقراط فيلسوف أو فريجه فيلسوف رياضي	صصب

القاعدة الثالثة: قاعدة العطف:

وتنص هذه القاعدة بأن القضية المركبة متى ما كانت قضاياها ق ، ل (صصب) فإن عطف القضية (ق ∧ ل) تكون (صصب) أيضاً.

ولا يتم التأكد من صحة هذه القاعدة إلا بعد أن نفترض أن القضايا ق ، ل (صصب) فتحصل على (ق ∧ ل) (صصب).

مثالها:

ق ، ل صصب فإن ق ∧ ل صصب وبتعبير آخر:

ق، ل	سقراط فيلسوف، فريجيه فيلسوف رياضي	صصب
ق ∧ ل	سقراط فيلسوف و فريجه فيلسوف رياضي	صصب

القاعدة الرابعة: القاعدة الشرطية:

وتنص هذه القاعدة بأن القضية المركبة متى ما كانت قضاياها ق ، ل (صصب) فإن شرط القضية (ق ← ل) تكون (صصب) أيضاً.

ولا يتم التأكد من صحة هذه القاعدة إلا بعد أن نفترض أن القضايا في ق ، ل (صصب) فتحصل على (ق ← ل) (صصب).

مثالها:

ق ، ل صصب فإن ق ← ل صصب وبتعبير آخر:

ق، ل	سقراط فيلسوف، الكندي فيلسوف عربي	صصب
ق ← ل	إذا كان سقراط فيلسوف يوناني، فإن الكندي فيلسوف عربي	صصب

القاعدة الخامسة: قاعدة التكافؤ:

وتنص هذه القاعدة بأن القضية المركبة متى ما كانت قضايا ق ، ل (صصب) فإن ق ↔ ل (صصب) أيضاً.

ولا يتم التأكد من صحة هذه القاعدة إلا بعد أن نفترض أن القضايا ق ، ل (صصب)، ونحصل على ق ↔ ل صصب.

مثالها:

ق ، ل صصب فإن ق ↔ ل صصب ، وبتعبير آخر:

ق ، ل	سقراط أستاذ أفلاطون، أفلاطون تلميذ سقراط	صصب
ق ↔ ل	سقراط أستاذ أفلاطون إذا وفقط إذا كان أفلاطون تلميذه	صصب

القاعدة السادسة: قاعدة الأقواس:

تنص هذه القاعدة بوجوب استخدام الأقواس في القضايا متعددة الروابط وذلك حتى يتم حصر الصيغ وفصلها وبيان حدودها، إذ يختلف شكل الصيغة

ومعناها الصوري باختلاف وضع الأقواس، فمن الصيغ ما لا يمكن تركه من دون الأقواس إذا أردنا الحصول على صيغ منطقية نستخدمها بشكل سليم في عملية الاستنتاج أو الاستدلال، وبذلك تعمل الأقواس على إزالة كل إبهام وغموض ولبس بين القضايا، ومن الأمثلة على ذلك ما يأتي:

١- ق ∨ ل ∨ م

٢- ق ← ل ← م

٣- ¬ ق ∨ ل

فالمثال الأول خالي من الأقواس ولا نعرف فيما إذا كانت الصيغة تعني (ق ∨ ل) ∨ م أو أنها تعني ق ∨ (ل ∨ م)، لذلك فإن استخدام الأقواس ضروري، ونفس الأمر مع المثال الثاني.

أما المثال الثالث فإن الصيغة ¬ ق ∨ ل، فإن مجال النفي فيها واقع على القضية ق فقط، أم أن النفي داخل على القضية بأجمعها فإذا أريد به كل الصيغة وجب استعمال الأقواس بالصورة الآتية: ¬(ق ∨ ل).

ثانيا:ـ مبرهنات مختارة للتركيب المنطقي السليم:

من خلال القواعد السابقة يمكن تمييز الصيغ والقضايا صحيحة البناء من تلك القضايا والصيغ غير صحيحة البناء، وسيتم اختيار مجموعة من الصيغ صحيحة البناء من البديهيات والقوانين المنطقية للبرهان عليها استناداً إلى القواعد البنائية التي سبق ذكرها وشرحها.

مبرهنة رقم (١): ¬ ¬ ق ← ل

البرهان:

١ـ إذا كانت ق صصب (بالفرض) فإن ¬ ق صصب (حسب القاعدة الأولى).

٢ـ إذا كانت ¬ ق صصب (حسب الخطوة الأولى) فإن ¬¬ق صصب (حسب القاعدة الأولى).

٣ـ بما أن ق صصب بالفرض فإن ¬¬ق صصب (حسب الخطوة الثانية).

٤ـ إذا كانت ¬¬ق صصب (حسب الخطوة الثالثة) فإن ¬¬ق ← ل (القاعدة الرابعة).

مبرهنة رقم (٢): ق ٧ ل ← ل ٧ ق

البرهان:

١ــ إذا كانت ق ، ل صصب (بالفرض) فإن ق ٧ ل صصب (القاعدة الثانية).

٢ــ إذا كانت ق ، ل صصب (بالفرض) فإن ل ٧ ق صصب (القاعدة الثانية).

٣ـ وإذا كانت ق ٧ ل، ل ٧ ق صصب حسب الخطوة الأولى والثانية، فإن ق ٧ ل ← ل ٧ ق صصب حسب القاعدة الرابعة.

مبرهنة رقم (٣): ق ٨ ل ← ل ٨ ق

البرهان:

١ــ إذا كانت ق ، ل صصب (بالفرض) فإن ق ٨ ل صصب (القاعدة الثانية).

٢ــ إذا كانت ق ، ل صصب (بالفرض) فإن ل ٨ ق صصب (القاعدة الثانية).

٣ـ وإذا كانت ق ٧ ل، ل ٨ ق صصب حسب الخطوة الأولى والثانية، فإن ق ٨ ل ← ل ٨ ق صصب حسب القاعدة الرابعة.

مبرهنة رقم (٤): ق ← (ل ← ق)

البرهان:

١ــ إذا كانت ق ، ل صصب بالفرض فإن ل ← ق صصب (بحسب القاعدة الرابعة).

٢ـ وإذا كانت ل ← ق صصب (الخطوة الأولى)، فإن (ل ← ق) صصب بحسب قاعدة الأقواس.

٣ـ ولما كانت ق صصب (بالفرض)(ل ← ق) صصب (بحسب الخطوة الثانية) فإن:

ق ← (ل ← ق) صصب (بحسب القاعدة الرابعة).

مبرهنة رقم (٥): (ق ← ل ٨ ق) ← ل

البرهان:

١ــ إذا كانت ل ، ق صصب (بالفرض) فإن ل ٨ ق صصب (بحسب القاعدة الثالثة).

٢ــ وإذا كانت ق صصب (بالفرض) وكانت ل ٨ ق صصب (الخطو الأولى) فإن ق ← ل ٨ ق صصب (القاعدة الرابعة).

٣ـ ولما كانت ق ← ل ٨ ق صصب (الخطوة الثانية) فإن (ق ← ل ٨ ق) صصب (قاعدة الأقواس).

٤ــ وبمــا أن (ق ← ل ٨ ق) صصــب (الخطــوة الثالثــة) و ل صصــب (بالفرض) فإن:

(ق ← ل ٨ ق) ← ل صصب (بحسب القاعدة الرابعة).

******

الفصل الثاني

المبحث الأول

نظرية دالات القضايا (حساب المحمولات)

أولاً: تفكيك المحتوى الداخلي للقضية الصورية الى متغير وثابت:

قبل الدخول في معرفة دالة القضية لابد من التمييز بين المتغير والثابت في القضية المنطقية، فكل قضية منطقية تتكون من موضوع ومحمول ونسبة رابطة تقوم على حمل وربط محمول القضية بموضوعها، فالقضية المنطقية (برتراند رسل فيلسوف رياضي) فيها موضوع ومحمول، أما الموضوع فهو كما يُعرف بأنه (الذي حُكم عليه بأن شيء آخر ثبت ووُجد له في حالة الاثبات أو شيء آخر نفي عنه في حالة السلب) وسيتم التعبير عن الموضع بالرمز (أ). أما المحمول فيصح تعريفه بأنه (المحكوم به على أنه إما موجود لشيء آخر أو ليس بموجود له) وسيتم التعبير عنه بالرمز (س).

وعلى المثال المتقدم فإن اسم العلم (برتراند رسل) هو موضوع القضية المنطقية، أما (فيلسوف رياضي) فهو محمولها، حيث تم الحكم على (رسل) بأنه فيلسوفاً رياضي.

وفي القضايا المنطقية عادة ما يكون المحمول هو الثابت بخلاف الموضوع الذي يتغير بأسماء عدّة، ففي المثال المتقدم ممكن الاستعارة بأسماء عديدة بدل برتراند رسل منها:

برتراند رسل فيلسوف رياضي (ق)

فريجه فيلسوف رياضي

جورج بول فيلسوف رياضي

وايتهد فيلسوف رياضي

موضوع القضية (أ) محمول القضية (س)

والجزء الثابت هو محمول القضية (فيلسوف رياضي)، أما الجزء المتغير فهو موضوعها (اسم العلم)، والملاحظ ببساطة أنه بالإمكان ان نقدّم مجموعة من القيم لتكون بديلاً عن موضوع القضية والذي يُرمز له بالرمز (أ).

إن هذه الاستعارة المنطقية وجدت في الرياضيات الذي تُقسّم الرموز فيها إلى مجموعتين أو نوعين: المجموعة الأولى تضم تلك الرموز التي تتغير وقيمتها العدد أو معناها ويطلق عليها (المتغيرات)، والمجموعة الثانية تحتوي تلك الرموز التي لا تتغير قيمتها او معانيها، بل تبقى ثابتة المعنى في الصيغة ويطلق عليها (الثوابت) مثالها:

في الرياضيات: ١ (متغير) + (ثابت) ٥ (متغير) = (ثابت) ٣ (متغير) + (ثابت) ٣ (متغير)

في المنطق: طاليس (متغير) فيلسوف (ثابت)

وبناءً على ما تقدم يصح تعريف **المتغير** بأنه: **رمز ليس له معنى ثابت، ويمكن أن تحل محله أية قيمة مناسبة.**

ويصح تعريف **الثابت** بأنه: **رمز له معنى ثابت في الصيغة، وغير قابل للتغيير في المعنى.**

ثانياً: تحديد الدالة ومتغير الدالة:

إذا استطعنا أن نميّز بين الجزء المتغير والثابت في القضية، فإنه بالإمكان التمييز بين الدالة ومتغير الدالة (الحد)، فالدالة هي التي تمثل الجزء الثابت في القضايا المنطقية. أما الحد (متغير الدالة) يمثل الجزء المتغير في القضايا المنطقية.

أمثلة وتطبيقات:

(ق) الثلج أبيض، تتألف هذه القضية المنطقية من موضوع ومحمول ومعروف بأن المحمول (أبيض) لا ينطبق على الثلج وحده بل له مصاديق كثيرة ومتعددة فالورق أبيض، الحائط أبيض، الخشب أبيض.

الثلج أبيض (ق)

(أ، موضوع، حد القضية) (س، محمول، دالة)

ثالثاً: أنواع الدالات المنطقية:

إن الدالات المنطقية لها متغيرات وهذه المتغيرات إما أن تكون متغيراً واحداً أو ثنائياً أو متعدداً.

أ- الدالة المنطقية ذات المتغير الواحد:

عبارة عن قضية منطقية ذات موضوع واحد والذي يمثل متغيرها، كقولنا (سقراط إنسان) فموضوع القضية (سقراط) ينتمي إلى محمولها (الإنسان)، وهنا إذا رمزنا للموضوع (أ) وإلى المحمول بالرمز (س) فإننا نحصل على صيغة منطقية تعبر عن التركيب الداخلي للقضية من جهة ومُشيرة الى انتماء (أ) الى المجموعة (س) من جهة أخرى وتُقرأ:

سقراط (موضوع (متغير - حد القضية) إنسان (محمول (ثابت - دالة) ..... (ق)

أ س

أ ع س

ويمكن ان نختار للمتغير (أ) مجموعة من القيم التي هي اشخاصاً مثال: أفلاطون - أوغسطين - انسلم - الكندي - الفارابي - وغيرها.

ب - الدالة المنطقية ثنائية المتغير:

عبارة عن قضية منطقية تحتوي على موضوعين ومحمول واحد فقط، كقولنا (جورج بول أكبر من بيانو)، وقولنا (وايتهد أصغر من رسل).

فعلى المثال الأول نجد أن القضية المنطقية فيها موضوعين هما (بول، بيانو) ومن محمول هو (أكبر من)، فإذا رمزنا للموضوعين (أ ، ب) وللمحمول بالرمز (>) فإن التركيب المنطقي لهذه القضية يكون بعد تدوينها رمزياً هو: أ > ب وتقرأ (أ) أكبر من (ب).

أما المثال الثاني فإن الموضوعين في القضية هما (وايتهد، رسل) والمحمول هو (أصغر من)، وإذا رمزنا للموضوعين بـ (أ ، ب) وللمحمول بـ (<) فإن التركيب المنطقي لهذه القضية بعد تدوينها رمزياً هو: أ < ب وتقرأ (أ) أصغر من (ب).

بول أكبر من بيانو (ق) وايتهد أصغر من رسل (ق)

بول	أكبر من	بيانو	وايتهد	أصغر من	رسل
أ	>	ب	أ	<	ب
موضوع	محمول	موضوع	موضوع	محمول	موضوع
حد القضية	دالة	حد القضية	حد القضية	دالة	حد القضية
متغير	ثابت	متغير	متغير	ثابت	متغير

ج: الدالة المنطقية متعددة المتغير:

عبارة عن قضية منطقية فيها أكثر من موضوعين ومحمول واحد، كقولنا (الفلسفة الوسيطة تقع بين الفلسفة اليونانية (القديمة) والفلسفة الحديثة)، فالقضية المنطقية فيها ثلاث مواضيع هي (الفلسفة الوسيطة، اليونانية، الحديثة) ومحمول واحد هو (بين) الذي يُشير الى العلاقة البينية بين الموضوعات الثلاث، وبذلك يكون بناء هذه القضية بعد تدوينها رمزياً بالصورة المنطقية الآتية: إذا رمزنا للمواضيع بـ (أ ، ب ، ج) وللمحمول بـ (∏):

أ ∏ ب ، ج وتقرأ أ بين ب و ج

الفلسفة الوسيطة تقع بين الفلسفة اليونانية والفلسفة الحديثة

الفلسفة الوسيطة	تقع بين	الفلسفة اليونانية	والفلسفة الحديثة
موضوع	محمول	موضوع	موضوع
أ	∏	ب	ج
حد	دالة	حد	حد
متغير	ثابت	متغير	متغير

أمثلة وتطبيقات حول دالة القضية:

١ـ ¬ أ س (دالة قضية مسبوقة بنفي)

٢ـ أ س ٧ أ س (دالة قضية مثبتة بدلية)

٣ـ أ س ٨ أ س (دالة قضية مثبتة عطفية)

٤ـ أ س ← أ س (دالة قضية شرطية)

٥ـ أ س ↔ أ س (دالة قضية تكافؤية)

٦ـ أ ∏ ب، ج (دالة قضية مثبتة بينية متعددة المواضيع)

٧ـ ¬ أ ∃ س (دالة منفية انتمائية)

****

المبحث الثاني

أسوار القضايا

أولا:ـ الدالات وأسوار القضايا:

يقول الدكتور ياسين خليل في كتابه (محاضرات في المنطق الرياضي) بأنه من صُلب نظرية دالات القضايا هو البحث في أسوار القضايا وعلاقة كل سور ومجاله بسور آخر ومجاله، وإذا كان لحساب القضايا مجموعة من البديهيات الخاصة بها، فإن الأمر يكون كذلك مع موضوع دالات القضايا التي لها مجموعة من البديهيات الخاصة بها، حيث يكون لأسوار القضايا في التعريفات والبديهيات الدور المنطقي المهم لها.

ـ سور القضايا: المراد من السور في القضايا (اللفظ الحاصر والجامع لبيان الحكم الصادر على أفراد القضية) لذا يقال عن القضية المنطقية ذات السور (بالقضية المسوّرة) تشبيهاً لها بسور المنطقة، حيث يكون حاصرٌ للأفراد الذين يعيشون في تلك المنطقة.

أقسام السور:

السور في القضايا المنطقية إما أن يكون سوراً كلياً حيث يكون الحكم صادراً على كل أفراد الموضوع فتكون القضية كلية وألفاظه (كل ـ عامة ـ كافة ـ جميع) ويرمز له (أ)، مثل: كل الفلاسفة كاتبون ـ جميع المناطقة عقليون.

أو أن يكون السور جزئياً فتكون القضية جزئية، حيث يكون الحكم صادراً على جزء من أفراد الموضوع وألفاظه (بعض ـ كثير ـ واحد ـ قليل) ويرمز له (Eأ)، مثل: بعض الفلاسفة مناطقة، كثير من الانسان شاعر.

كم القضايا: يعبّر عن سور القضية في المنطق بـ كم القضية، فكم القضية يُسأل بـه عن الكمية الصادر بحقها الحكم في القضايا المنطقية، فمثلاً: ما هو كم القضية فيما يأتي:

١ـ كل إنسان حيوان .... كمها (كلية) ويرمز له (أ).

٢ـ بعض الفلاسفة يونانيون..... كمها (جزئية) ويرمز له (E أ).

كيف القضايا:

إن القضايا بجميع أقسامها سواء أكانت بسيطة (ذات متغير واحد) أو مركبة (ذات متغيرين أو متعددة المتغيرات) فإنه تنقسم إلى قضايا موجبة أو سالبة، والقضية الموجبة هي التي يتم فيها ثبوت المحمول للموضوع وبعكسها السالبة حيث يتم فيها سلب المحمول عن الموضوع.

والسلب والإيجاب في الاصطلاح المنطقي يُسمى بـ (كيف القضية) وهو مأخوذ بالأصل عن كيف الاستفهامية التي يُسأل بها عن ثبوت الشيء وعدمه.

فمثلاً: ما هو كيف القضية فيما يأتي:

١ـ طاليس فيلسوف يوناني.....كيفها (موجبة).

٢ـ ليس فيثاغوراس فيلسوفاً مسيحياً.....كيفها (سالبة).

ملاحظة: من كم القضية وكيفها نحصل على أربع قضايا منطقية وهي (الكلية الموجبة والجزية السالبة والكلية السالبة والجزئية السالبة)، فمن الواضح أن القضية الكلية إما أن تكون موجبة أو سالبة، والجزية أيضاً إما أن تكون موجبة أو سالبة،

وإذا وضعنا في الاعتبار هذين المبدئين معاً (الكم والكيف) كان لدينا التقسيم الرباعي للقضية المنطقية.

ثانيا: المتغير الحر والمتغير المقيد:

وبعد أن ميّزنا بين أسوار القضايا (كم القضايا) يجب معرفة أن دالة أي قضية والتي تحتوي على متغيرين (الثابت والمتغير) إذا كان الحد المتغير والذي يمثل الموضوع لم يدخل عليه سور القضية الكلي أو الجزئي فإن هذا المتغيّر يُسمّى المتغير الحُر، أما إذا كان متغير القضية قد دخل عليه السور فإن المتغير في هذه الحالة يُعرف بالمتغير المقيد، مثال ذلك:

الإنسان حيوان ناطق

أ س

هذه دالة قضية فيها جز متغير وهو حد القضية (الذي يمثل محمولها) وهذا المتغير (الانسان) غير محدود وغي مقيد وإذا ما أردنا أن نقيده نقوم بإدخال السور عليه لكي يصبح المتغير مُقيداً، فنقول (كل إنسان ناطق أو بعض الانسان ناطق) وعليه يمكن تعريف **المتغير الحُر** بأنه:

متغير يظهر في دالة القضية غير مرتبط بمجال محدد أو معيّن ويمكن الاستعاضة عنه بأية قيمة فتتحول الدالة في ضوئها الى قضية.

أما **المتغير المقيد** فإنه: **متغير مرتبط بسور قضية كلي أو جزئي في دالة قضية مُعينة.**

أمثلة: كل إنسان ناطق ـ بعض الانسان شاعر

كل	انسان	ناطق	بعض	الانسان	شاعر
(أ)	أ	س	(Eأ)	أ	س
سور كلي	متغير مقيد	دالة	سور جزئي	متغير مقيد	دالة
	موضوع	محمول		موضوع	محمول
تقرأ: الناطقية تحمل على كل أفراد الإنسان			الشاعرية تُحمل على بعض أفراد الانسان		
س تُحمل على كل أ			س تُحمل على بعض أ		

ـ أمثلة وتطبيقات على الدالات وأسوار القضايا:

أولاً: في حالة النفي:

١ـ سور كلي منفي مع دالة قضية:

¬ [(أ) أس] ليس كل فيلسوف بمنطقي.

٢ـ سور جزئي منفي مع دالة قضية:

¬ [(Eأ) أس] ليس بعض المناطقة بفلاسفة

٣ـ سور كلي وجزئي مع دالة قضية منفية:

(أ) ¬ (أس)، (Eأ) ¬ (أس)

ثانياً: في حالة ظهور الأسوار والدالة والروابط المنطقية ولها صور كثيرة في التدوين الرياضي منها:

١ـ سور كلي مع دالة منفية ورابطة البدل

(أ) (¬أس ∨ أس)

٢ـ سور جزئي مع دالة منفية ورابطة البدل

(Eأ) (¬أس ∨ أس)

٣ـ سور كلي مع دالة منفية ورابطة العطف

(أ) (¬أس ∧ أس)

٤ـ سور جزئي مع دالة ورابطة العطف

(Eأ) (أس ∧ أس)

٥ـ سور كلي مع دالة ورابطة الشرط

(أ) (أس ← أس)

٦ـ سور جزئي مع دالة منفية ورابطة الشرط

(Eأ) (¬أس ← أس)

٧ـ سور كلي مع دالة منفية ورابطة التكافؤ

(أ) (¬أس ↔أس)

٨ـ سور جزئي مع دالة ورابطة التكافؤ

(Eأ) (أس ↔أس)

ثالثاً: في حالة وجود متغير حر أو متغير مقيد (أسوار) والدالة والروابط المنطقية ولها صور كثيرة ومتعددة في التدوين الرياضي:

١ـ صيغة فيها متغير مقيد كلي وآخر حُر مع رابطة البدل والنفي.

(أ) أس ∨ ¬أس

٢ـ صيغة فيها متغير مقيد جزئي منفي وآخر حُر مع رابطة العطف.

¬(Eأ) أس ∧ أس

٣ـ صيغة فيها متغير حُر وآخر مقيد جزئي مع رابطة الشرط والنفي.

أس ← (Eأ) ¬أس

٤ـ صيغة فيها متغير حر وآخر مقيد كلي منفي مع رابطة الكتافؤ

أس ↔ ¬(أ) أس

ثالثا: العلاقة بين القضايا ودالات القضايا:

تناولنا في المباحث السابقة نظرية القضايا، كما تم الحديث من بعدها عن موضوع دالات القضايا، وإن الدالة في القضية تسلك وتأخذ سلوك القضية، لذا كان هناك العديد من نقاط الالتقاء والاشتراك بين القضية ودالة القضية منها يمكن الإشارة الى:

أولاً: في نظرية القضايا تتخذ القضية وحدة كاملة مثل (ق ، ل ، م) وبغض النظر عن التركيب الداخلي للقضية، في حين أن نظرية دالات القضايا تعتمد على التركيب الداخلي للقضية، وأن صلة دالة القضية بأخرى يعتمد هو الآخر على التركيب الداخلي لها.

فإذا كانت القضية (ق) في نظرية القضايا بسيطة تتألف من موضوع ومحمول، فإن (أ س) دالة قضية بسيطة تتألف من موضوع ومحمول، وما ينطبق على القضية (ق) ينطبق على القضايا (ل ، م ، ن) وهكذا.

ثانياً: إن جميع الروابط المنطقية المستخدمة في نظرية القضايا تبقى كما هي تربط بين دالات القضايا كذلك، فإذا افترضنا:

أن القضايا (ق ، ل ، م) في نظرية القضايا بسيطة فإن دالات القضايا تتخذ الأشكال الآتية:

ق= أ س ل= أ ص

وبناء على ذلك وعند استخدام الروابط المنطقية تكون القضايا ودالات القضايا كالآتي:

¬ق ¬أس

ق ٧ ل أس ٧ أص

ق ← ل أس ← أص

ثالثاً: إن القواعد الاستنتاجية المعمول بها في نظرية القضايا تتحول ببساطة الى قواعد استنتاجية معمول بها في نظرية دالات القضايا، فمع القاعدة الشرطية مثلاً:

ق ← ل	إذا ق فإن ل
ق	ولكن ق
.. ل	إذن ل

وتكون القاعدة ذاتها في نظرية دالات القضايا كما يأتي:

أ س ← أ ص	إذا كان أ س فإن أ ص
أ س	لكن أ س
أ س	إذن أ ص

المبحث الثالث

نظرية المجموعات (منطق الفئات)

أولا: تعريف المجموعة:

ان مفهوم المجموعة كثيراً ما يرد في الكتب والمفاهيم الرياضية (الرياضيات) وكذلك يردُ هذا المفهوم عند علماء المنطق الرياضيين، لكنهم يعبرون عن المجموعة بمفهوم (الفئة) وبذلك يكون مفهوم (المجموعة) ومفهوم (الفئة) من الألفاظ المترادفة التي تدل على معنى واحد. ونظراً لشيوع استعمال مفهوم (المجموعة) فإنه سوف يتم استخدامه بدل الفئة في مبحثنا هذا.

ولا يمكن لعلماء المنطق الرياضي وفلاسفته أن يعدوا كل تجمع يتألف من أشياء متفرقة بأنه مجموعة، فمحتويات غرفة ما من أثاث مختلف كالكراسي والمنضدة والطبلة والفراش وغيرها لا يمكن أن تعد عندهم على أنها مجموعة. إذ أن الضرورة المنطقية عندهم توجب تحقيق خاصيتين في كل مجموعة هما: العناصر التي تحتويها من جهة وكذلك الصفات التي تحمل على جميع الأفراد والعناصر من جهة ثانية، وعليه لتوضيح أهمية العناصر والصفة في المجموعة نطرح الأمثلة الآتية:

مجموعة المنتخب العراقي لكرة القدم، مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الكتب الفلسفية في مكتبة الكلية، مجموعة العواصم في البلدان العربية، مجموعة أساتذة قسم الفلسفة، مجموعة طلاب قسم الفلسفة.

ولا يمكن أن تُعد بعض المجموعات على أنها مجاميع منطقية وذلك لعدم تميّزها بالموضوعية بل إنها تمتلك صفات المجموعة الذاتية التي تعتمد في الدرجة الأولى على شعور وتصور وفهم كل فرد، مثل قولنا مجموعة الأعداد الجميلة ومجموعة الكتب المفيدة، إذ أن هذه المجاميع لا تُعد مجاميع منطقية وفقاً لرأي المناطقة، وذلك لأن

الاعداد الجميلة تختلف من شخص إلى آخر فما أراه جميلاً يراه الآخرون بأنها اعداد غير جميلة، وكذلك بالنسبة للكتب المفيدة، إذ أن المفيد من الكتاب فيه اختلافات كبيرة لتعيينه وفهم موضوعه ومحتواه،

وعلى ذلك يصحُّ تعريف **المجموعة** بأنها:

تجمع من عناصر أو أفراد أو صفات متمايزين وقد عُرِّفوا تعريفاً جيداً.

ثانيا ـ أنواع المجموعات:

بعد أن عرفنا مُراد المناطقة للمجموعة ننتقلُ إلى معرفة أنواعها، حيث هناك ثلاث أنواع للمجموعات:

أ: المجموعة الخالية:

إن المجموعة الخالية هي مجموعة العناصر التي فيها كل عنصر يختلف عن ذاته وهذا معناه أنها مجموعة خالية من العناصر، لأنه لابد أن يكون كل عنصر هو ذاته ولا يوجد عنصر واحد يختلف عن ذاته، ويعبر المجموعة الخالية بالرمز ∅ = أ : أ ≠ أ

ومثالها: مجموعة الطيور التي لا تتنفس الهواء، ويرمز لها بالرمز ∅ أو A

ب: المجموعة الشاملة (الكلية):

هي المجموعة الشاملة والكلية والمحتوية لجميع عناصر المجموعة حيث يكون فيها كل عنصر هو ذاته ويعبر عنها رمزياً بالحرف (ش) أو بالرمز (ν) كما اعتاد على ذلك المناطقة، مثالها: مجموعة الاعداد الطبيعية، مجموعة عواصم البلدان العربية، مجموعة المناطقة الرياضيين، مجموعة الفلاسفة اليونانيين، ويرمز لها بالرمز:

ش = { أ : أ = أ }

تً: المجموعة الجزئية:

وهي المجموعة التي تكون حاوية على بعض أفراد المجموعة الكلية، حيث تكون عناصر المجموعة الجزئية تنتمي إلى المجموعة الشاملة والكلية، ويرمز لها عادة بالرمز (س) ومثالها مجموعة الاعداد الفردية، مجموعة عواصم البلدان العربية في آسيا، مجموعة الفلاسفة اليونانيين السفسطائيين، مجموعة المناطقة الرياضيين الانجليزيين.

ثالثا: طرق تصنيف المجموعات (الفئات):

تتعين المجموعة بعناصرها وأفرادها والتي تشترك في صفة واحدة فيقال أن الصفة تُحمل على كل عنصر من عناصرها، ويجب أن تكون هذه العناصر متمايزة فيما بينها، ولابد أن تكون الصفة المشتركة موضوعية متفق عليها من الجميع وعليه يمكن وضع نقطتين للتمييز بين عناصر المجموعة:

الأولى: الإحصاء: حيث يتم معرفة عناصر المجموعة عن طريق تعداد العناصر المنتمية اليها، وغالباً ما يكون ذلك بالنسبة للمجموعة المحددة أو النهائية.

الثانية: الخاصية المشتركة: حيث يتم معرفة عناصر المجموعة عن طريق الصفة المشتركة التي تنطوي تحتها مجموعة من العناصر التي قد تكون محدودة او غير محدودة أو لا نهائية.

والطريقة الثانية هي الطريقة الجديرة عند المناطقة الرياضيين في تعيين المجموعة لأنها قابلة للتطبيق في حالة كون المجموعة محدودة أو غير محدودة.

مثال (١): إذا كانت (س) مجموعة وكان المطلوب تعيين عناصرها من خلال الخاصية المشتركة بينها كأن تكون الصفة هي (كل الاعداد الزوجية)، فإنه يقال:

كل أ بحيث أن أ عدد زوجي

س = { أ : أ عدد زوجي }

ومن الأقواس { } تكون جامعة لأفراد المجموعة، و س ترمز الى المجموعة، و أ قبل النقطتين تُمثل كم الدالة وأسوارها، والنقطتين رمز للقول (بحيث أن) وأن أ الذي يلحق النقطتين هو دالة قضية لها متغير واحد، وتكتب الصيغة السابقة رمزياً:

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ....}

مثال (٢): إذا كانت (س) مجموعة وكان المطلوب تعيين عناصرها من كل الفلاسفة اليونانيين من المدرسة الأيونية.

كل أ بحيث أن أ الفلاسفة الأيونيين

س = { أ : أ فلاسفة أيونيين}

س = { طاليس ، انكسيمندريس ، انكسيمنس ، هرقليطس }

س = { أ ، ب ، ج ، د }

ثالثا:خصائص عناصر المجموعة:

أ - إن بين المجموعة وعناصرها علاقة انتماء عضوي، فيقال مثلاً أن العنصر أ ينتمي إلى المجموعة س، ويعبر عن هذا الانتماء بالرمز ϵ فتكون العلاقة رياضياً بالصورة الآتية:

أ ϵ س وتقرأ: أ تنتمي إلى المجموعة س

أ ϵ س وتقرأ: أ لا تنتمي إلى المجموعة س

ب - إن اختلاف ترتيب العناصر في المجموعة لا يؤثر في المجموعة ذاتها، وليس للترتيب او اختلافه أية قيمة وأهمية منطقية أو رياضية.

مثال/ مجموعة الفلاسفة اليونانيين الأيونيين

س = { انكسيمندريس ، هرقليطس ، طاليس ، انكسيمانس}

س = { ب ، د ، أ ، ج}

ج - ان تكرار عنصر او أكثر في مجموعة منطقية، لا يؤثر في المجموعة إذ لا قيمة منطقية أو رياضية للتكرار في المجموعة.

مثال/ مجموعة الفلاسفة اليونانيين الايونيين

س = { طاليس ، انكسيمندريس ، انكسيمانس ، هرقليطس، انكسيمندريس}

س = { أ ، ب ، ج ، د،ب }

إذ المجموعة هي ذاتها لا اختلاف فيها رغم تكرار عنصر من عناصرها.

رابعا: العمليات المنطقية بين المجموعات وجداول القيم:

توجد علاقة منطقية بين المجموعات لها خواص منطقية عديدة كالعطف والبدل وغيرها، حيث تُشكل العمليات المنطقية بين المجموعات مجاميع منطقية جديدة.

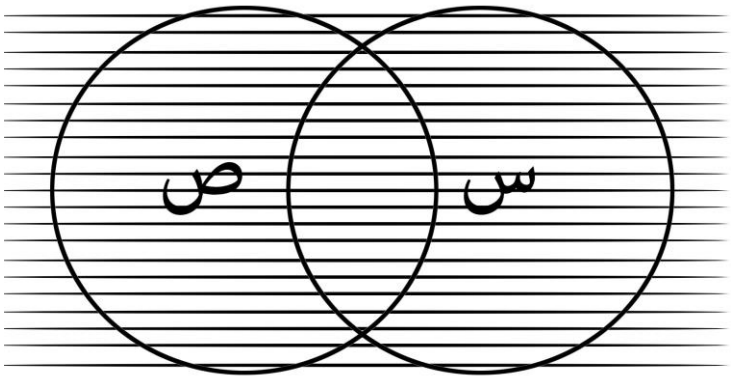
أنواع العمليات المنطقية بين المجموعات:

أولاً: مجموعة الاتحاد: وهي عبارة عن علاقة تربط بين مجموعتين (س ، ص) مكونة مجموعة جديدة من العناصر التي تنتمي على الأقل الى إحدى المجموعتين، ويرمز لها بالرمز (U).

وتظهر علاقة الاتحاد بين المجموعتين بالشكل الآتي:

س U ص = { أ: أ ϵ س v أ ϵ ص }

وفي علاقة الاتحاد تظهر رابطة البدل المنطقية، ولهذه المسألة دلالة منطقية مهمة هي أن البدل عبارة عن رابطة تربط بين القضايا أصلاً، كما تربط بين دالات القضايا، فإذا ما استخدمت في نظرية المجموعات فهذه دلالة على الاعتماد المنطقي للمجموعات على الدالات والقضايا بصورة خاصة، ويمكن التعبير عن مجموعة الاتحاد بدوائر أويلر - فن Euler – Venn



كما تظهر علاقة الاتحاد في جداول القيم الصورة الآتية - نختار للانتماء الى المجموعة رقم (١)، ولعدم الانتماء رقم (٠).

س	ص	س U ص	وهذه الأرقام تناظر الصدق والكذب في جداول القيم في نظرية القضايا	ق ل	ق v ل
١	١	١		ص ص	ص
١	٠	١		ص ك	ص
٠	١	١		ك ص	ص
٠	٠	٠		ك ك	ك

ملاحظة: إن عمليات الاتحاد لا تقتصر على مجموعتين فقط، بل يمكن أن تكون المجموعة الاتحادية أكثر من مجموعتين (س ، ص ، ع).

مثال: إذا كانت س تمثل مجموعة الفلاسفة اليونانيين، و ص تمثل مجموعة الفلاسفة المسيحيين، فإن س U ص تمثل مجموعهما معاً:

س U ص = { أ : أϵ س v أ ϵ ص}

س = { طاليس ، هرقليطس ، اكسانوفان ، بروتوغوراس ، سقراط ، افلاطون ، ارسطو}.

ص = { أوغسطين ، انسلم ، البرت الأكبر ، توما الاكويني }

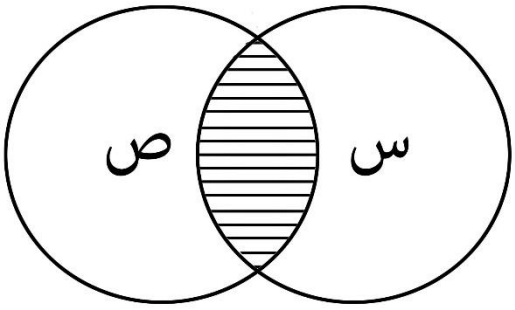
س U ص = { طاليس ، هرقليطس ، اكاسنوفان ، بروتوغوراس ، سقراط ، أفلاطون ، أرسطو ، اوغسطين ، انسلم ، البرت الأكبر ، توما الاكويني }

ثانياً: مجموعة التقاطع: وهي عبارة عن مجموعة جديدة تتكون بعد أن تتقاطع مجموعتين أو أكثر فيما بينهما، ويرمز لها (∩)، ويمكن تعريف هذه المجموعة، رياضياً بواسطة دالات القضايا التي تعبر عن انتماء عنصر الى المجموعة بالصورة الآتية:

س ∩ ص = { أ: أ ϵ س ∧ أ ϵ ص }

وفي مجموعة التقاطع تظهر رابطة العطف (∧) المنطقية حيث تربط بين دالات القضايا، وان استخدامها في نظرية المجموعات يدل على الاعتماد المنطقي لنظرية المجموعات على الدالات والقضايا، كما أن التعريف يُشير الى حقيقة منطقية مهمة وهي: تتقاطع مجموعتان مكونة مجموعة جديدة تحتوي على مجموع العناصر التي تنتمي الى كل من المجموعتين.

ويمكن التعبير عن التقاطع بدوائر أويلر ـ فن لتظهر بالشكل الآتي:



كما تظهر علاقة التقاطع في جداول القيم بالصورة الآتية:

س	ص	س ∩ ص	وهذه الأرقام تناظر الصدق والكذب في	ق ل	ق ∧ ل
١	١	١		ص ص	ص
١	٠	٠		ص ك	ك

ك	ك ص	جداول القيم في نظرية القضايا	٠	١	٠
ك	ك ك		١	٠	٠

مثال: إذا كانت س تمثل مجموعة من الفلاسفة (غير المناطقة) والفلاسفة المناطقة اليونانيين وص تمثل مجموعة من الفلاسفة غير المناطقة والفلاسفة المناطقة المعاصرين، فإن س ∩ ص تمثل فقط مجموعة الفلاسفة والمناطقة في المجموعتين.

س = { طاليس ، انكسمندريس ، فيثاغوراس ، جورجياس ، أفلاطون ، أرسطو ، زينون الرواقي}

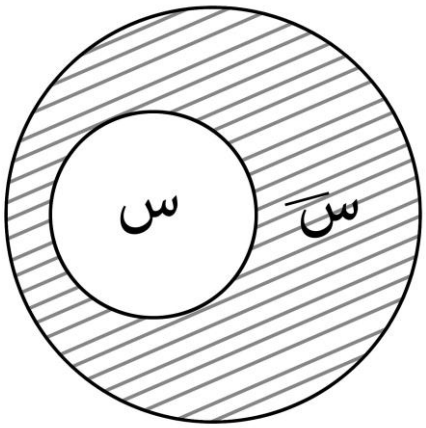
ص = { روسو ، بيرس ، رسل ، ديوي ، وايتهد ، كامو }

س ∩ ص = { افلاطون ، ارسطو طاليس ، زينون ، بيرس ، رسل ، ديوي ، وايتهد }.

ثالثاً: المجموعة المكملة: وهي عبارة عن مجموعة جديدة تُمثل العناصر التي لا تنتمي الى س، وذلك على أساس أن المجموعة المكملة، هي س، وأن س هي مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة (ش)، ويرمز لها (س/)، وتدون رياضياً:

س/= { أ: أ ∋ س ↔ أ ∋ س }

وفي المجموعة المكملة تظهر رابطة التكافؤ (↔) المنطقية ويمكن التعبير عن المجموعة المكملة بدوائر اويلر ـ فن لتظهر بالشكل الآتي:



ويتضح مما تقدم أنه إذا كانت لدينا مجموعة شاملة (ش) ومجموعة جزئية (س) وهي تابعة، وجزء من المجموعة (ش) فإن المجموعة التي تتكون من العناصر (ش) ولا تنتمي الى (س) هي المجموعة المكملة للمجموعة (س) بالنسبة الى المجموعة (ش).

مثال:

ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

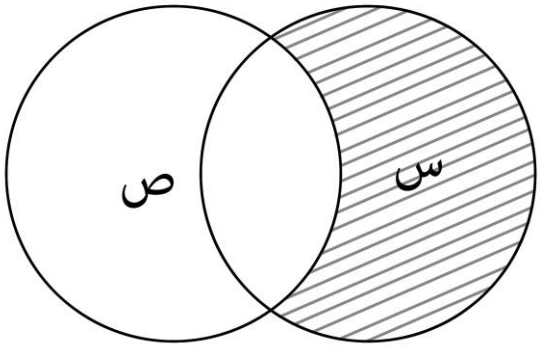
س = { ١ ، ٢ ، ٥ }

س/= { ٣ ، ٤}

رابعاً: مجموعة الفرق: وهي عبارة عن مجموعة جديدة تكون مكونة من العناصر التي تنتمي الى المجموعة (س) ولا تنتمي الى المجموعة (ص)، ويرمز لها رياضياً (-)، ويمكن تعريف هذه المجموعة بواسطة دالات القضايا رياضياً بالصورة الآتية:

س – ص = { أ : أ ∈ س ∧ أ ∉ ص }

ويمكن التعبير عن مجموعة الفرق بدوائر أويلر - فن لتظهر بالشكل الآتي:



كما تظهر علاقة الفرق في جداول القيم في الصورة الآتية:

س	ص	س - ص	
١	١	٠	لا يوجد تناظر بين نجدول مجموعة الفرق وأي جدول من جداول القيم في نظرية القضايا
١	٠	١	
٠	١	٠	
٠	٠	٠	

مثال:

س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١}

ص = {١ ، ٥ ، ١١}

س – ص = { ٢ ، ٣ ، ٧}

ملاحظة: هناك العديد من المجموعات الأخرى التي ترد في الكتب المنطقية منها مجموعة المساواة، مجموعة الاحتواء، والتي يمكن الاستفاضة منها في كتاب محاضرات في المنطق الرياضي للدكتور ياسين خليل وغيرها من الكتب المنطقية.

المبحث الرابع

اللغات الرمزية

أ- لغة فريجيه وبيانو:

المصطلح الرمزي الذي أقامه فريجه عسير الفهم والمتابعة إذ كان يستخدم حروف الهجاء اليونانية، وخطوطاً أفقية ورأسية برسوم معينة ولكل رسم معنى، بحيث تطول الخطوط وتقصر، ولكلٍ دلالته، كما تتخلل الخطوط أقواس لها دلالات معينة أخرى. لقد قرأ بيانو ذلك المصطلح، ولطلع عليه فاكتشف صعوبته، ولما كان قد لمس اشتراك فريجه معه في الاتجاه الرياضي والمنطقي، فقد ابتكر مصطلحه الرمزي الفذّ، الأكثر سهولة ووضوحاً، وآية عظمة هذا المصطلح أنه زُوّد به قارئ فريجه، غدت نظريات الثاني أسلس فهماً. نلاحظ أيضاً أن رسل حين عرف بيانو عام ١٩٠٠ وفريجه عام ١٩٠١ وقارن المصطلحين الرمزيين فضل مصطلح بيانو، واستخدمه أصحاب البرنكيبا فيما بعد؛ وسوف نشرح مصطلح فريجه الرمزي برموز بيانو فيما يلي:

يجد قارئ كتاب (كتابة التصورات) لفريجه ستة أنواع من الرموز نشير إليها فيما يلي:

١ـ رموز للقضايا، يدل كل رمز على القضية ككل دون تمييز بين حدودها؛ والرموز هي (P)(q)(r) الخ؛ ستأخذ في العربية الرموز (ق ، ل ، م) على التوالي.

٢- رمز إلى محتوى (content) القضية، ورمز آخر إلى تقريرها (assertion).

٣- رموز للدالات وهي (F)(G)(H)؛ سنعطي في العربية الرموز (س،ص) على التوالي.

رموز الحجج (المواضيع) هي (x)(y)(z)، وسنعطي في العربية الرموز (أ، ب، جـ) على التوالي.

إذا أردنا الرمز إلى دالة وحجتها (موضوعها) كتبنا « أ س »، F x، ونقرؤها: س له الخاصة أ، أو أن س نحمله على أ. وإذا ارتبطت حجتان بدالة واحدة كتبنا « س أ، ب» F (x ' y) ونقرؤها: س لها الخاصة أ، ب. أو س تحمل على أ، ب.

٤ـ رمز السور الكلي أو ما كان يسميه فريجه رمز (العمومية) (generality)، ويرمز له عنده(x)، وفي العربية يقابله هو « (أ) »، ومن ثم فإن صيغة القضية الكلية الموجبة هي « (أ) أ س » x F (x) ، ونقرؤها: «بالنسبة إلى كل أ فإن أ له الخاصة س».

ولم يعطِ فريجه رمزاً للسور الوجودي، لكنه عبر عنه بإضافة رمز السلب مرتين إلى مرز العمومية: أي أنه حين يكون لدينا قضية كلية موجبة، ونسلبها فإننا نعني «يوجد شيء لا تصدق عليه الدالة المذكورة»، فإذا سلبنا هذه القضية الجزئية السالبة، فإننا نعني «يوجد شيء تصدق عليه الدالة».

وقد رمز بيانو إلى السور الوجودي بالرمز « (Ex)، وسوف يحيله إلى العربية بالرمز « (Eأ) أو (ح هـ)»، ومن ثم فالصيغة « (Eأ) (أس)» (Ex) (Fx) ونقرؤها: «يوجد شيء واحد على الأقل أ مما تكون له الخاصة س».

٥ـ عرف فريجه القضايا المركبة من ثم عرف الثوابت المنطقية وعلى الأخص: السلب، الربط، الفصل، التضمن، المساواة (equality)، (أو ما سماه بيانو وأصحاب البرنكبيا التكافؤ (equivalece)، ووضع فريجه لكل ثابت رمزاً.

٦ـ ميز فريجه بين عضوية الفرد في صنف واحتواء الصنف في آخر، ووضع لكل منهما رمزاً.

ب ـ لغة رسل ووايتهد:

يضع أصحاب البرنكبيا ثلاثة أنواع من الرموز لحساب دالات القضايا:

١ـ رموز للمتغيرات الفردية (individual Variables)، وترمز إلى أسماء الأعلام أو الأفراد، وهي الحروف: (x ' y ' z) ونستبدل بها في العربية الحروف (هـ ، و ، ي) على التوالي، وقد ترد عند البعض بأنها (أ، ب، جـ).

٢ـ رموز للدلالات (predicate variables)، وترمز إلى المحمولات، وهي الحروف اليونانية التي تقابل الحروف الإنجليزية (F ' G ' H ' J).. الخ، ونستبدل بها هنا في العربية الحروف (د ، ذ ، ر ، ز) على التوالي، وقد تذكر عند البعض بأنها (س، ص)

٣ـ رمزان يشير أحدهما إلى السور «كل» ويسمى «السور الكلي» (universal quantifier)، ويشير الثاني إلى «بعض» ويسمى «السور الوجودي» (existential quantifier)، يستخدمون الرمز (×) ليدل على السور الكلي، ونستخدم هنا الحرف ك، والرمز (×∃) ليدل على السور الوجودي، ونستخدم هنا الحرف حـ.

افرض أن لدينا قضية شخصية مثل (سقراط فيلسوف)، وأردنا كتابتها وفق المصطلح الرمزي لحساب الدالات، فإننا نضع رمز المحمول قبل رمز الموضوع، وتصبح الصيغة (د هـ) (F x)؛ تصبح القضية (سقراط فقير) «ذ هـ» (gx)، (أفلاطون فيلسوف) «د و» (F y)، وهكذا نقرأ السور الكلي ك (×) «في كل قيم هـ...»، ونقرأ السور الوجودي حـ (×∃) «يوجد شيء واحد على الأقل مما يكون...».

ب ـ يبدأ حساب الدالات بفكرتين أوليتين هما «صادق دائماً»، أو «صادق في كل الحالات»؛ «صادق أحياناً» أو «صادق في بعض الحالات»؛ ومن الواضح أننا نعبر

عنهما بالكلمتين كل، بعض. إننا نبدأ بهاتين الفكرتين بلا تعريف؛ ثم نستخدمهما في تعريف الأفكار الأخرى: الأفكار المأخوذة من حساب القضايا ـ وهي السلب والفصل والربط والتضمن والتكافؤ؛ ونسوق الآن مثلاً واحداً على تعريفات البرنكيبا في هذا الحساب ـ تعريف الدالة السالبة:

ـ (ك) (دهـ) = (حـ) (ـ د هـ): عند فريجيه: (أ) أ س=(Eأ) أ س

(×) (Fx) = (∃×) (-Fx)

تعني الصيغة الأولى على يمين علامة المساواة أن «من الكذب أن نقول عن كل قيم هـ، أن هـ توصف بالصفة د»، وتعني الصيغة الثانية ـ وهو التعريف ـ «يوجد شيء واحد على الأقل هـ مما لا يتصف بالصفة د» وهما متكافئتان. أما مصادرات حساب الدالات وقضاياها فهي نفس مصادرات وتحصيلات حاصل حساب القضايا صيغت في المصطلح الجديد: أي نستبدل الرمز (د هـ) (Fx) بالرمز ق (P)، والرمز «ذ هـ» (gx) بالرمز ل (q)، وهكذا.

ثالثا: نظريات منطقية:

المنطق الثنائي القيمة والثلاثي القيمة والمتعدد القيم:

بعد أن ارتددنا بمنطق ارسطوطاليس وبيانو وفريجه وراسل الى منطق الصدق والكذب الذي استعرضناه وفقاً لطريقة الجداول، يعرض لنا السؤال الآتي: هل يمكن تعميم طريقة الجداول بحيث تمتد العمليات المنطقية إلى قيم (Values) أخرى غير الصدق والكذب؟ وهل يؤدي هذا التعميم الى منطق غير أرسطي ولا راسلي؟

الجواب على هذا السؤال هو أولاً وقبل كل شيء مسألة طريقة ومنهج. لأنه في البحث عن منطق غير منطق أرسطو وراسل، تنفتح أمام الباحث عدة طرق وكل طريق منها ربما أملاه الاستناد الى نظرية ما أو علم من العلوم مثلاً يمكن الاستناد الى موجهات الحكم (Modalities) عند ارسطو التي تقبل غير الصدق والكذب في القضية أفكاراً مثل، الإمكان والضرورة والاستحالة فيها، فيؤدي الاستناد الى هذه النظرية الى منطق ذي قيم خمس تُجرى عليها العمليات المنطقية المعروفة. كذلك يمكن الاستناد الى حساب الاحتمال (Calculus of Probabilities) فيؤدي ذلك الى تأسيس منطق تتعدد قيمه تبعاً لتعدد درجات الاحتمال. ويمكن أيضاً الاستناد الى رياضيات الحدسيين الجدد (New - Intuitionists) الذين يرفضون الأخذ بمبدأ الثالث المرفوع كأساس لبراهينهم الرياضية، أو على نحو أصح الذين يقبلون مبدأ الرابع المرفوع أو للخامس أو حتى للعدد ن من المرفوعات. وهذا ما يؤدي إلى الأخذ بقيم إضافية إلى جانب الصدق والكذب التقليدين في المنطق. والمبدأ الذي تنشأ عنه تلك الأنواع المنطقية الكثيرة القيم وفقاً للنظريات أو للعلوم التي هي موضع النظر في كل منطق ليس بالضرورة المبدأ الذي تقوم عليه طريقة الجداول عند تارسكي ولوكازيفتش السالفة الاستعراض حين تعمم، أي تمتد إلى أكثر من قيمتين.

ولكن الطريقة العامة التي ينشأ عنها أي منطق ذي قيم فوق قيمتي الصدق والكذب، والتي نحل بواسطتها على نحو آلي ومجرد من كل نظرية علمية معينة مثل تلك النظريات التي أشرت إليها، على أي منطق غير ثنائي القيم هي طريقة الجداول التي عبر عنها تارسكي ولوكازيفتش البولونيين.

وهناك نوع خاص من تعميم طريقة الجداول التي تقوم على التوسع في ادخال القيم الجديدة التي قد تذهب الى أبعد حد، هو المنطق التوبولوجي (Topological Logik) الذي ذهب اليه كارل همبل (Carl Hempel) عام ١٩٣٧ وهو نوع خاص من المنطق لا ينظر في قيم محددة كالتي يعالجا منطق المدرسة البولونية وإنما ينظر في موازنات عامة بين تلك القيم المحددة: فإذا فرضنا مثلاً عدداً من القيم المحددة التي يعالجها المنطق من وجهة نظر تارسكي ولوكازيفتش مثل صادق، ومتوسط الصدق، وكاذب، فإن منطق كارل همبل يعالج ما يمكن أن ينشأ من علاقات عامة بين تلك القيم مثل كون بعضها «أكثر صحة» من بعضها الآخر، أو «أقل صحة» أو «يساوي في الصحة» إلى آخر ما هنالك من موازنات عامة ممكنة.

ويقرب من هذا النوع من المنطق الحساب المينيمالي (Minimalkalkul) الذي جاء به جوهانسون (Johanson) الألماني. فهو منطق يبحث في أقل التغيرات الممكنة التي يمكن أن تدخل على قيمة ما معينة لكي تقرب أو تبتعد من قيمة أخرى معينة كما لو كان هناك تكامل (Integration) أو تفاضل (Differentiation) بين القيم المنطقية كما هو الشأن بين القيم العددية التي يتناولها حساب التكامل والتفاضل المعروف. وتلك نظرة غاية في العجب تتضمن في أعماقها فلسفة في ماهية الحقيقة والبطلان أقل ما يقال فيها أنه لا حدّ يفصل بينهما لأن التكامل والتفاضل كفيلان بتقريب طرفي الحقيقة والبطلان إلى أقل حدّ ممكن.

وهناك أيضاً منطق يسلم منذ البداية بقيمتي الصدق والكذب كحدين أوليين، ويقبل كحدود أولية أخرى الموجهات الأرسطية (Modalities) فيتكون بذلك منطق يقوم على خمسة حدود أولية هي الصدق والكذب والضرورة والإمكان والاستحالة، ويطابق منطق أرسطو بما فيه من موجهات لم يتعرض اليها راسل في منطقه. وهذا هو المنطق الذي جاء به لويس (Lewis) ولانجفورد (Langford) وبيكر (Becker) الذين يختلفون فيما بينهم في كثير من التفاصيل ويتفقون في المبدأ الذي جعلهم يسمون منطقهم منطق التضمن المحدد (Implication).

وهناك منطق يعتمد كلية على المنطق الكلاسيكي الوارد في PM ولا يخرج عن قيمتي الصدق والكذب المعروفتين ومع ذلك يشتق، بطريق التعريفات المنتقاة، على غير المتوقع قيماً جدية كقيم الموجهات الأرسطية وبذلك يستكمل منطق PM ناحية لم يتطرق اليها البحث عند راسل، فيضاف إليه فصل جديد هو فصل معالجة الموجهات الذي طالما افتقده.

هذا نذر يسير من أنواع المنطق المعاصرة بعد راسل ولا يزال الباب مفتوحاً للجديد. وكل نوع منها يتوقف على الطريقة التي تتبع في انشائها وهذه الطريقة تتوقف بدورها على هذه النظرية او ذاك العلم المنظور اليه كمادة يستخرج لها منطق صوري ينظمها.

وينبغي ألا يؤدي بنا تعدد أنواع المنطق المعاصر او اختلاف منطق ذي قيم معينة عن منطق آخر له نفس العدد من القيم، او تفكك وحدة المنطق على هذا النحو، ينبغي ألا يؤدي بنا كل ذلك الى التشكك في المنطق من حيث هو سند اليقين الأخير، لأننا يجب أن نكون قد تهيأنا بعد ذلك الشوط الذي سلكناه إلى هنا في دراسة واستعراض المنطق أن نفهم من لفظ المنطق نظرية استنباطية فحسب كغيرها من النظريات الاستنباطية الكثيرة المعروفة والتي تشترك جميعها في طبيعة واحدة هي أن صدق القضايا فيها يتوقف لا

علـى المطابقـة بينهـا وبـين حقـائق خـارج الـذهن أو فيـه، وإنمـا فقـط علـى اشـتقاقها مـن العناصر الأولية حدوداً كانت أو مسلمات، تلك العناصر التي يبدأ منها استنباط القضـايا المشتقة والتي تختلف من منطق إلى آخر وفقاً لاختيار الحدود والمسلمات، وهذه بـدورها وفقاً لهذه النظريـة العلميـة أو لتلك ممـا يـراد أن يؤسس منطقهـا. فاختيـار عناصـر أوليـة بعينها يؤدي بالضرورة الى نوع معين من المنطق يختلف عن غيره من الأنواع دون ان يفقد مع ذلك المنطق «وحدته» من حيث أن تلك الوحدة إنما هي في المنهج العام الذي هو النسق الاستنباطي.