المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

تعريف: إذا كانت متتابعة $\{S_n\}$ حسابية منتهية، او متتابعة هندسية منتهية فان المجموع:

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_k$$

يسمى متسلسلة حسابية منتهية, او متتابعة هندسية منتهية عدد حدودها K .

حيث S_k الحد الأخير،K رتبة الحد الأخير

<u>**مثال1:**</u> بين نوع المتسلسلة واكتبها بصورة مختصرة:

1-

$$\sum_{n=1}^{k} S_n = 4 + 9 + 14 + 19 + \cdots + (5k-1)$$

2-

$$\sum_{n=1}^{k} S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$$

<u>**الحــــــل:**</u>

<u>**-1**</u>

$$\begin{cases} S_2 - S_1 = 9 - 4 = 5 \\ S_3 - S_2 = 14 - 9 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{متسلسلة حسابية}$$

الاساس هو5 والحد العام لها هو $S_n = (5n-1)$

مجموع حدود المتسلسلة هو

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n = (5n-1)$$

-2

$$\begin{cases} S_2 \div S_1 = 1 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ S_3 \div S_2 = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{متسلسة هندسية}$$

الاساس هو $\frac{1}{2}$

والحد العام لها هو

$$S_n = \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

مجموع حدود المتسلسلة هو

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n = \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

<u>مثال2:</u> أكتب المتسلسلات التالية بصورة مفصلة وبين نوعها:

1-

$$T_k = \sum_{n=1}^{5} 3^n$$

2-

$$T_k = \sum_{n=1}^{5} 2 \times 3^{n-1}$$

3-

$$T_k = \sum_{n=1}^{5} (2n + 5)$$

<u>ملاحظة: -</u>

<u>1)</u> المتتابعة أو المتسلسلة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى على صورة: $(Dn + h)$, وأساسها هو: D معامل المجهول.

2) المتتابعة أو المتسلسلة الهندسية هي دالة أسية على صورة: $(S_1 \times d^{n-1})$, وأساسها هو: D, وحدها الأول هو: S_1.

<u>قانون إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية:</u>

لتكن $T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n$ حيث $\{S_n\}$ متتابعة حسابية منتهية حدها الأول

S_1 , وأساسها D وعدد حدودها k، فأن مجموعها يعطي بالعلاقتين التاليتين:

1- الحالة العامة

$$T_k = \frac{k}{2}[2S_1 + (k-1) \times D]$$

2- الحالة الخاصة

$$T_k = \frac{k}{2}[S_1 + S_k]$$

حيث:

S_1 : الحد الأول . k : عدد الحدود. D: أساس المتتابعة.

T_k : مجموع الحدود. S_k: الحد الأخير.

مثال1: أوجد مجموع الأربعين الحد الأولى من المتتابعة الحسابية التالية: (3 , 7 , 11 , ...)

الحـــــل:

المتتابعة الحسابية فيها:

$S_1 = 3, D = 4, k = 40$

$$T_k = \frac{k}{2}[2S_1 + (k-1) \times D]$$

$$\Longrightarrow T_{40} = \frac{40}{2}[2 \times 3 + (40-1) \times 4]$$

$$= 20 \times [6 + 156]$$

$$T_{40} = 3240$$

مثال2: مجموع الأربعين الحد الأولى من متتابعة حسابية 430 ومجموع أول ستين حداً منها 945اوجد الحد العاشر لهذه المتتابعة.

الحـــــل:

أولاً: نضع المعطيات بصورة رياضية:

$S_{40} = 430, S_{60} = 945$

لإيجاد أي حد من المتتابعة نحتاج الى قيم: S_1, D

الان مجموع قانون الحسابية المتسلسلة: $T_k = \frac{k}{2}[2S_1 + (k-1) \times D]$

$$\Rightarrow T_{40} = 20[2S_1 + 39 \times D]$$

$$\Rightarrow 430 = 40S_1 + 780D \qquad \text{......... (1)}$$

<u>كذلك:</u>

$$\Rightarrow T_{60} = 30[2S_1 + 59 \times D]$$

$$\Rightarrow 945 = 60S_1 + 1770D \qquad \text{......... (2)}$$

<u>الآن:</u> بضرب (1) في: - 1.5 نجد أن:

$$-645 = -60S_1 - 1170D \qquad \text{......... (3)}$$

<u>الآن:</u> بجمع (2) + (3) نجد أن:

$$600D = 300 \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

بالتعويض بقيمةD: في (1) نجد أن:

$$390 + 40S_1 = 430 \Rightarrow 40 = 40S_1 \Rightarrow S_1 = 1$$

الحد العاشر : $T_{10} = S_1 + 9 \times D$

$$\Rightarrow T_{10} = 1 + 9 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T_{10} = 5\frac{1}{2}$$

<u>تمارين:</u>

1- أوجد مجموع الحدود الستين الأولى من المتتالية الحسابية: (-7 , -2 , 3 , ...)

2- متتابعة حسابية حدها الثاني 7 وحدها الثالث عشر 40 أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الحدود التسعة عشر الأولى.

3- أذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية فما هو عدد الحدود.

4- متسلسلة حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها = - 42 , ومجوع الحدود الستة الأخيرة منها = 30 فأذا كان عدد حدودها = 12 , أوجد

1) أساسها 2) حدها الأول 3) حدها الأخير

5 – أثبت مجموع n حداً الأولى من الاعداد الفردية الموجبة:

$$(1, 2, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots, 2n-1) = n^2$$

2- أوجد مجموع المتسلسلة

$$2007 - 2005 + 2003 - 2001 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -5 + 3 - 1$$

<u>قانون إيجاد مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية:</u>

لتكن $T_k = \sum_{n=1}^{k} S_n$ حيث $\{S_n\}$ متتابعة هندسية منتهية حدها الاول S_1 واساسها d وعددحدودها k فانمجموعها يعطي بالعلاقات التالية:

$$T_k = \begin{cases} \dfrac{S_1(d^k - 1)}{(d-1)} & d \neq 1 \\ kS_1 & d = 1 \end{cases}$$

<u>مثال1:</u> أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{n=1}^{10} 2^{n-1}$$

<u>الحــــــل:</u>

$$T_{10} = \sum_{n=1}^{10} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

حيث$S_1 = 1, d = 2, k = 10$

$$T_k = \frac{S_1(d^k-1)}{(d-1)}$$
$$\Rightarrow T_{10} = \frac{1\times(2^{10}-1)}{(2-1)}$$
$$\Rightarrow T_{10} = \frac{(1024-1)}{1} = 1023$$

<u>مثال2:</u> أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث:

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{3}{4} \times (-2)^{n+1} = 129$$

<u>الحــــــل:</u>

المتتابعة بعد فكها:

$\left(3 + (-6) + 12 + \cdots + \frac{3}{4} \times (-2)^{n+1}\right)$

واضح$S_1 = 3, d = -2, T_k = 129$

$$T_k = \frac{S_1(d^k - 1)}{(d-1)}$$
$$\Rightarrow 129 = \frac{3 \times ((-2)^k - 1)}{(-2-1)}$$
$$\Rightarrow -129 = (-2)^k - 1$$
$$\Rightarrow -128 = (-2)^k$$
$$\Rightarrow (-2)^7 = (-2)^k$$
$$\Rightarrow k = 7$$

اذن عدد حدود المتسلسلة الهندسية هو سبعة حدود.

<u>تمارين:</u>

1- أذا كانتT_5متسلسلة هندسية مجموعها 121 وأساسها 3 فأوجد حدها الأول

2- أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث:

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} 2^n = 254$$

3- باستخدام مفهوم المتتابعة الحسابية أوجد مجموع الاعداد التي تقبل القسمة على 5 والواقعة بين 54 و618.

4- أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي فيها الحد الاول = 3 وحدها الأخير = 48 وكل حد فيها ضعف الحد الأسبق له.