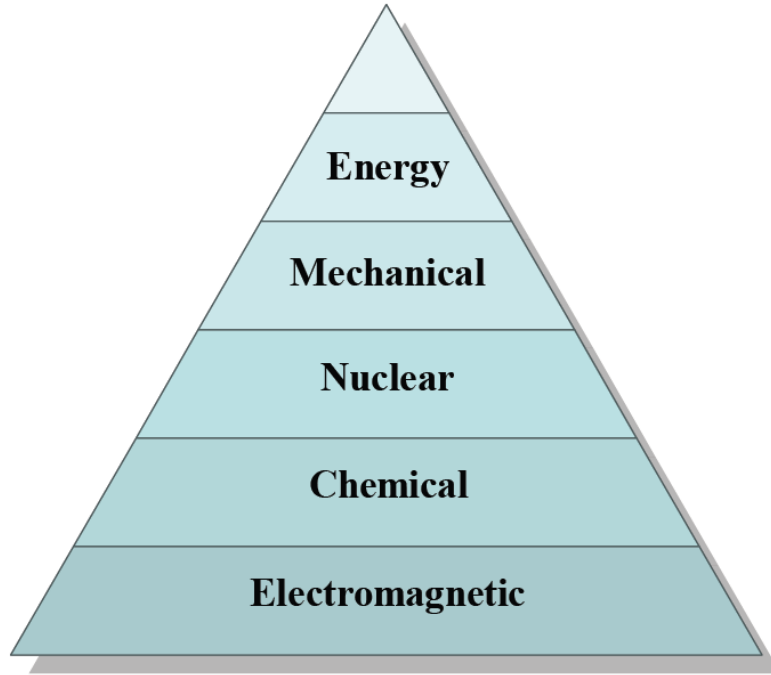


# Chapter 4

## Work and Energy

## 4.1 Work and Energy

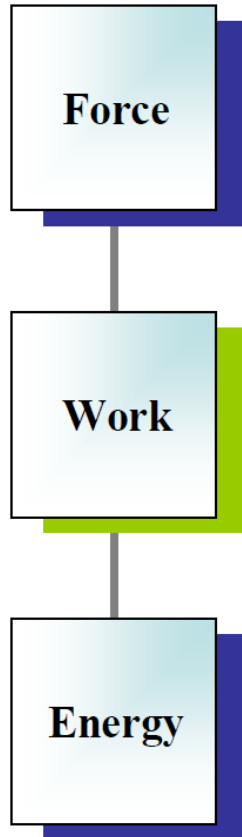
إن مفهوم الشغل والطاقة مهم جداً في علم الفيزياء، حيث توجد الطاقة في الطبيعة في صور مختلفة مثل الطاقة الميكانيكية *Mechanical energy*، والطاقة الكهرومغناطيسية *Electromagnetic energy*، والطاقة الكيميائية *Chemical energy*، والطاقة الحرارية *Thermal energy*، والطاقة النووية *Nuclear energy*. إن الطاقة بصورها المختلفة تتحول من شكل إلى آخر ولكن في النهاية الطاقة الكلية ثابتة. فمثلاً الطاقة الكيميائية المخزنة في بطارية تتحول إلى طاقة كهربائية لتتحول بدورها إلى طاقة حركية. ودراسة تحولات الطاقة مهم جداً لجميع العلوم.



وفي هذا الجزء من المقرر سوف نركز على *Mechanical energy*. وذلك لأنه يعتمد على مفاهيم القوة التي وضعها نيوتن في القوانين الثلاثة، ويجدر الذكر هنا أن الشغل والطاقة كميات قياسية وبالتالي فإن التعامل معها سيكون أسهل من استخدام قوانين نيوتن للحركة، وذلك لأننا كنا نتعامل وبشكل مباشر مع القوة وهي كمية متجهة. وحيث أننا لم نجد أية صعوبة في تطبيق قوانين نيوتن وذلك لأن مقدار القوة المؤثرة على حركة

الأجسام ثابتة، ولكن إذا ما أصبحت القوة متغيرة وبالتالي فإن العجلة ستكون متغيرة وهنا يكون التعامل مع مفهوم الشغل والطاقة اسهل بكثير في مثل هذه الحالات.

ولكن قبل أن نتناول موضوع الطاقة فإننا سوف نوضح مفهوم الشغل الذي هو حلقة الوصل ما بين القوة والطاقة.



والشغل قد يكون ناتجاً من قوة ثابتة *constant force* أو من قوة متغيرة *varying force*. وسوف ندرس كلا النوعين في هذا الفصل.

## 4.2 Work done by a *constant force*

اعتبر وجود جسم يتحرك إزاحة مقدارها  $s$  تحت تأثير قوة  $F$ ، وهنا سوف نأخذ حالة بسيطة عندما تكون الزاوية بين متجه القوة ومتجه الإزاحة يساوي صفرًا وفي الحالة الثانية عندما تكون هناك زاوية بين متجه الإزاحة ومتجه القوة وذلك للتوصل إلى القانون العام للشغل.

### ● قوة منتظمة في اتجاه الحركة

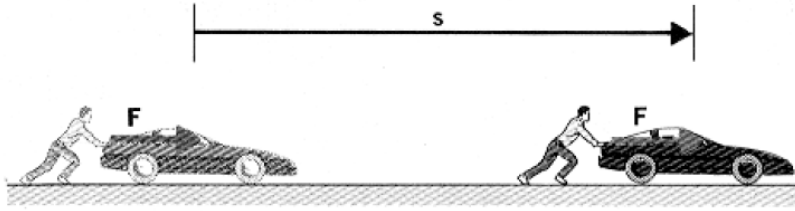


Figure 4.1

The work in this case is given by the equation

$$W = F s \quad (4.1)$$

### ● قوة منتظمة تعمل زاوية مقدارها $\theta$ مع اتجاه الحركة

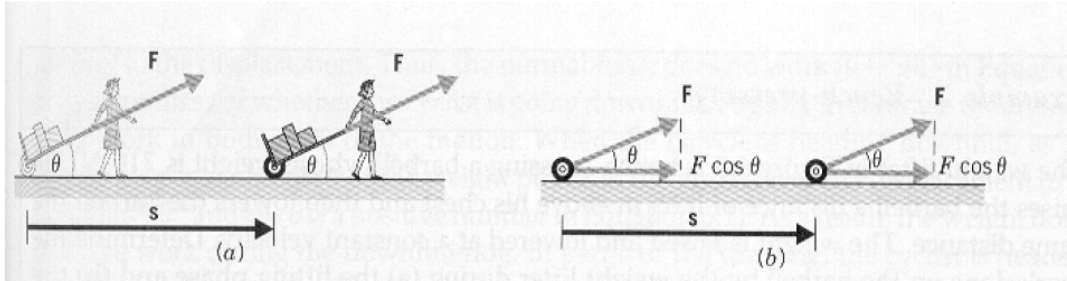


Figure 4.2

The work in this case is done by the horizontal component of the force

$$W = F \cos \theta s \quad (4.2)$$

The above equation can be written in the directional form as dot product

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (4.3)$$

The unit of the work is N.m which is called Joule (J).



### Example 4.1

Find the work done by a 45N force in pulling the luggage carrier shown in Figure 4.2 at an angle  $\theta = 50^\circ$  for a distance  $s = 75\text{m}$ .



### Solution

According to equation 4.2, the work done on the luggage carrier is

$$W = (F \cos \theta) s = 45 \cos 50^\circ \times 75 = 2170\text{J}$$

*Work can be positive or negative*

**Important Notes**

- ◆ The object must undergo a displacement  $s$ .
- ◆  $F$  must have a non-zero component in the direction of  $s$ .
- ◆ Work is zero when there is no displacement.
- ◆ Work is zero when the force is perpendicular to the displacement.
- ◆ Work is positive when  $F$  is in direction of displacement or when  $0 \leq \theta < 90$  as in Figure 4.3(a).
- ◆ Work is negative when  $F$  is in opposite direction of displacement or when  $90 < \theta \leq 180$  as in Figure 4.3(b).

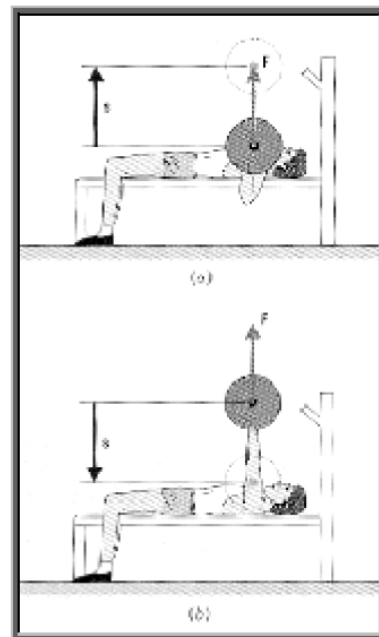


Figure 4.3



### Example 4.2

The weight lifter shown in Figure 4.3 is bench-pressing a barbell whose weight is 710N. He raises the barbell a distance 0.65m above his chest and then lowers the barbell the same distance. Determine the work done on the barbell by the weight lifter during (a) the lifting phase and (b) the lowering phase.



### Solution

(a) The work done by the force  $F$  during the lifting phase is

$$W = (F \cos \theta) s = 710 \cos 0^\circ \times 0.65 = 460\text{J} \quad [\text{Positive work}]$$

(a) The work done by the force  $F$  during the lowering phase is

$$W = (F \cos \theta) s = 710 \cos 180^\circ \times 0.65 = -460\text{J} \quad [\text{Negative work}]$$



### Example 4.3

A force  $F = (6i - 2j)$  N acts on a particle that undergoes a displacement  $s = (3i + j)$  m. Find (a) the work done by the force on the particle and (b) the angle between  $F$  and  $s$ .



### Solution

$$(a) \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (6i - 2j) \cdot (3i + j) = (6)(3) + (-2)(1) = 18 - 2 = 16\text{J}$$

$$(b) \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 6.32\text{N}$$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3.16\text{m}$$

$$W = F s \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{W}{Fs} = \frac{16}{6.32 \times 3.16} = 0.8012$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.8012) = 36.8^\circ$$

### 4.3 Work done by a varying force

ذكرنا سابقاً أن استخدام مفهوم الشغل سوف يساعدنا في التعامل مع الحركة عندما تكون القوة غير منتظمة، ولتوضيح ذلك دعنا نفترض أن قوة منتظمة قدرها 10N تؤثر على جسم ليتحرك مسافة من  $x_i=5\text{m}$  إلى  $x_f=25\text{m}$  وبالتالي فإن الإزاحة مقدارها 20m، ولتمثيل ذلك بيانياً نرسم محور القوة ومحور الإزاحة كما في الشكل، وبالتالي تكون القوة هي خط مستقيم يوازي محور  $x$ .

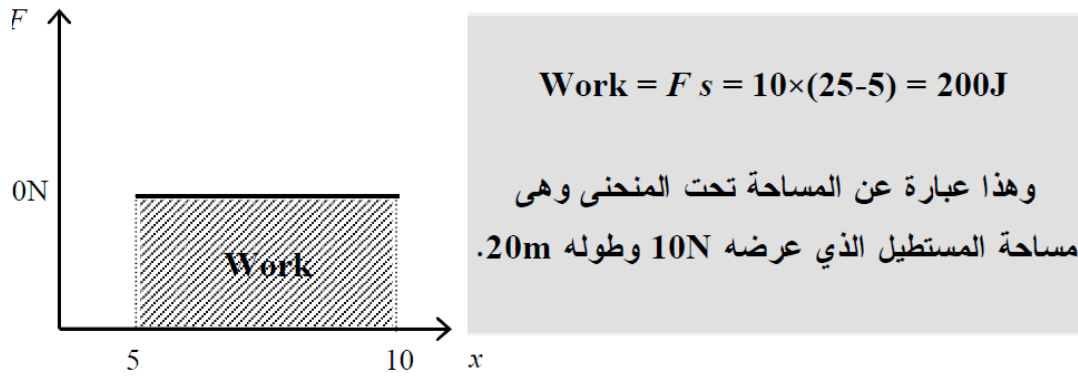


Figure 4.4

أما في حالة كون القوة متغيرة خلال الإزاحة كما هو مبين في الشكل التالي:

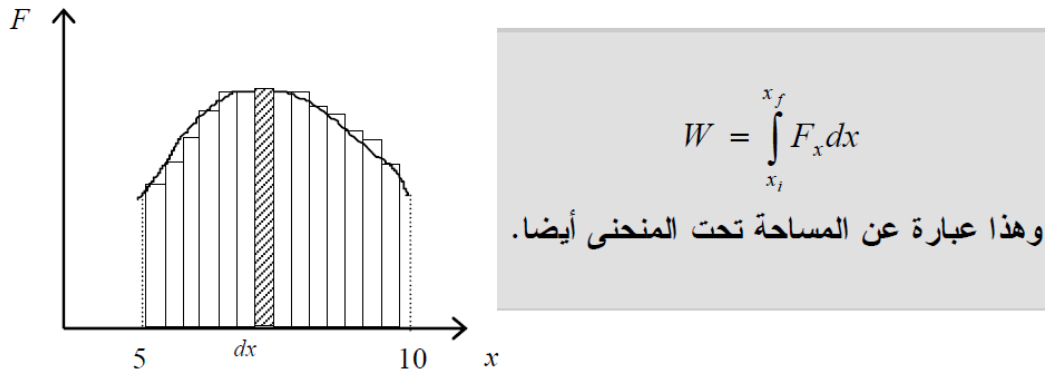


Figure 4.5

في هذه الحالة نأخذ إزاحة صغيرة قدرها  $\Delta x$  حتى تكون القوة المؤثرة لهذه الإزاحة منتظمة وهنا يكون الشغل المبذول يعطى بالعلاقة التالية:

$$\Delta W = F_x \Delta x \quad (4.4)$$

وإذا قمنا بتقسيم منحنى القوة إلى أجزاء صغيرة وحسبنا الشغل المبذول خلال كل جزء وجمعناهم، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية:

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x \quad (4.5)$$

وعند جعل الإزاحة  $\Delta x$  أصغر ما يمكن أي أنها تؤول إلى الصفر لكي نحصل على قيم أدق فإن المعادلة السابقة تتحول إلى

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad (4.6)$$

وهذه هي الصورة العامة للشغل (لاحظ أن  $F_x = F \cos \theta$ ).

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \cdot dx \quad (4.7)$$



#### Example 4.4

If an applied force varies with position according to  $F_x = 3x^3 - 5$ , where  $x$  is in m, how much work is done by this force on an object that moves from  $x=4\text{m}$  to  $x=7\text{m}$ ?



#### Solution

$$F = 3x^3 - 5$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_4^7 (3x^3 - 5) dx = \left[ \frac{3}{4} x^4 - 5x \right]_4^7$$

$$W = 1.59 \text{kJ}$$



## 4.4 Work done by a spring

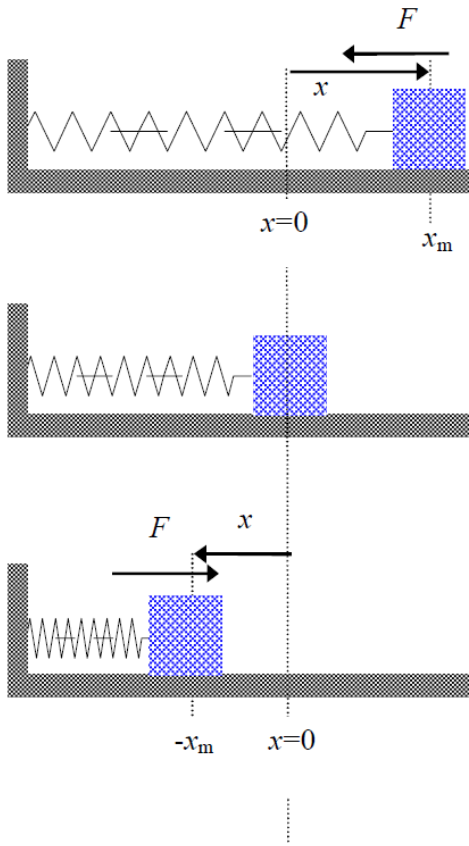


Figure 4.6

يعتبر الزنبرك Spring تطبيقاً عملياً على قوة متغيرة مع الإزاحة حيث أن القوة في حالة الزنبرك تعطى بالقانون التالي وهو قانون هوك Hooke's law.

$$F_s = -kx$$

حيث  $k$  هو ثابت الزنبرك، والإشارة السالبة تدل على أن قوة شد الزنبرك في عكس اتجاه الإزاحة  $x$ .

**Work done by a spring:**

$$W_s = W_{-x_m \rightarrow 0} + W_{0 \rightarrow x_m} = \text{zero}$$

وذلك لأن الشغل المبذول لتحريك الجسم بواسطة قوة الزنبرك من  $x_i = -x_m$  إلى  $x_f = 0$  يساوى الشغل المبذول لتحريك الجسم بواسطة قوة الزنبرك من  $x_i = 0$  إلى  $x_f = x_m$  ولكن بالسالب.

**Work done by an external agent:**

الشغل المبذول بواسطة مؤثر خارجي لتحريك الجسم المتصل بزنبرك ببطء من  $x_i = 0$  إلى  $x_f = x_m$

$$W_{F_{app}} = \frac{1}{2} kx_m^2$$

الشكل السابق 4.5 يوضح مراحل إزاحة جسم مرتبط بزنبرك كمثال على القوة المتغيرة حيث أن القوة الاسترجاعية للزنبرك تتغير مع تغير الإزاحة. ولحساب الشغل المبذول بواسطة شخص يشد ببطء الزنبرك من  $x_i = -x_m$  إلى  $x_f = 0$  نعتبر أن القوة الخارجية  $F_{app}$

تساوي قوة الزنبرك  $F_s$  أي أن

$$F_{app} = -(-kx) = kx \quad (4.8)$$

The work done by the external agent is

$$W_{F_{app}} = \int_0^{x_m} F_{app} dx = \int_0^{x_m} kx dx = \frac{1}{2} kx_m^2 \quad (4.9)$$

لاحظ أن الشغل المبذول بواسطة قوة خارجية تساوي سالب الشغل المبذول بواسطة قوة شد الزنبرك.

## 4.5 Work and kinetic energy

تعلمنا في أجزاء سابقة أن الجسم يتسارع إذا أثرت عليه قوة خارجية. فإذا فرضنا هنا أن جسم كتلته  $m$  يتعرض إلى قوة منتظمة مقدارها  $F$  في اتجاه محور  $x$ . وبتطبيق قانون نيوتن الثاني نجد أن

$$F_x = m a \quad (4.10)$$

فإذا كانت الإزاحة الكلية التي تحركها الجسم هي  $s$  فإن الشغل المبذول في هذه الحالة يعطى بالمعادلة

$$W = F_x s = (m a) s \quad (4.11)$$

ومن معلومات سابقة عن جسم يتحرك تحت تأثير عجلة ثابتة

$$s = \frac{1}{2} (v_i + v_f) t \quad \& \quad a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

وبالتعويض في معادلة الشغل نحصل على

$$W = m \left( \frac{v_f - v_i}{t} \right) \frac{1}{2} (v_i + v_f) t \quad (4.12)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (4.13)$$

The product of one half the mass and the square of the speed is defined as the **kinetic energy** of the particle and has a unit of J

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (4.14)$$

$$W = K_f - K_i \quad (4.15)$$

This means that the work is the change of the kinetic energy of a particle.

$$W = \Delta K \quad (4.15)$$

لاحظ أن طاقة الحركة  $K$  دائماً موجبة ولكن التغير في طاقة الحركة  $\Delta K$  يمكن أن يكون سالباً أو موجباً أو صفراً.



### Example 4.5

A fighter-jet of mass  $5 \times 10^4 \text{ kg}$  is travelling at a speed of  $v_i = 1.1 \times 10^4 \text{ m/s}$  as showing in Figure 4.7. The engine exerts a constant force of  $4 \times 10^5 \text{ N}$  for a displacement of  $2.5 \times 10^6 \text{ m}$ . Determine the final speed of the jet.

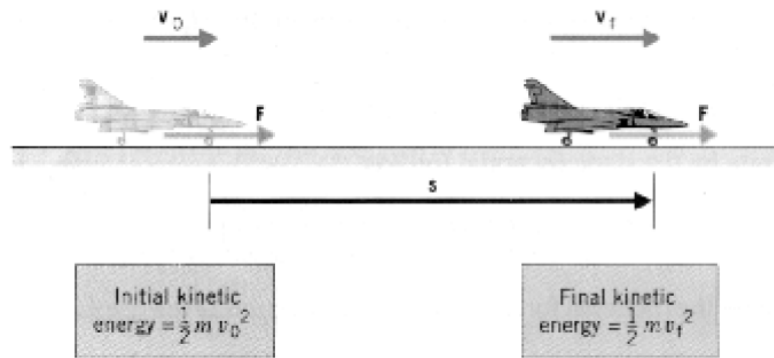


Figure 4.7



### Solution

According to equation 4.7, the work done on the engine is

$$W = (F \cos \theta) s = 4 \times 10^5 \cos 0^\circ \times 2.5 \times 10^6 = 1 \times 10^{12} \text{ J}$$

The work is positive, because the force and displacement are in the same direction as shown in Figure 4.7. Since  $W = K_f - K_i$  the final kinetic energy of the fighter jet is

$$\begin{aligned} K_f &= W + K_i \\ &= (1 \times 10^{12} \text{ J}) + \frac{1}{2} (5 \times 10^4 \text{ kg}) (1 \times 10^4 \text{ m/s})^2 = 4.031 \times 10^{12} \text{ J} \end{aligned}$$

The final kinetic energy is  $K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$ , so the final speed is

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(4.03 \times 10^{12})}{5 \times 10^4}} = 1.27 \times 10^4 \text{ m/s}$$

حيث أن المحرك يبذل شغلاً موجباً لذا كانت السرعة النهائية أكبر من السرعة الابتدائية.

## 4.6 Power

*The power is defined as the time rate of energy transfer.* If an external force is applied to an object, and if the work done by this force is  $\Delta W$  in the time interval  $\Delta t$ , then the average power is:

$$P_{\text{ave}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (4.16)$$

The instantaneous power is given by

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (4.17)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} \quad (4.18)$$

$$\therefore P = F \cdot v \quad (4.19)$$

The unit of the power is J/s which is called watt (W).

---

---



### Example 4.6

A 65-kg athlete runs a distance of 600 m up a mountain inclined at  $20^\circ$  to the horizontal. He performs this feat in 80s. Assuming that air resistance is negligible, (a) how much work does he perform and (b) what is his power output during the run?

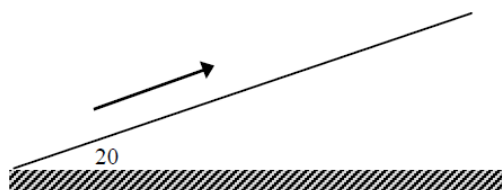


Figure 4.8



### Solution

Assuming the athlete runs at constant speed, we have

$$W_A + W_g = 0$$

where  $W_A$  is the work done by the athlete and  $W_g$  is the work done by gravity. In this case,

$$W_g = -mgs(\sin\theta)$$

So

$$\begin{aligned} W_A = -W_g &= + mgs(\sin\theta) \\ &= (65\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)(600\text{m}) \sin 20^\circ \end{aligned}$$

(b) His power output is given by

$$P_A = \frac{W_A}{\Delta t} = \frac{1.31 \times 10^5 \text{ J}}{80 \text{ s}} = 1.63 \text{ kW}$$



### Example 4.7

A 4-kg particle moves along the x-axis. Its position varies with time according to  $x = t + 2t^3$ , where  $x$  is in m and  $t$  is in s. Find (a) the kinetic energy at any time  $t$ , (b) the acceleration of the particle and the force acting on it at time  $t$ , (c) the power being delivered to the particle at time  $t$ , and (d) the work done on the particle in the interval  $t = 0$  to  $t = 2$  s.



### Solution

Given  $m = 4$  kg and  $x = t + 2t^3$ , we find

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t + 2t^3) = 1 + 6t^2 \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(4)(1 + 6t^2)^2 = (2 + 24t^2 + 72t^4) \text{ J} \end{aligned}$$

$$(b) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + 6t^2) = 12t \text{ m/s}^2$$

$$F = m a = 4(12t) = 48t \text{ N}$$

$$(c) \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 24t^2 + 72t^4) = (48t + 288t^3) \text{ W}$$

[or use  $P = Fv = 48t(1 + 6t^2)$ ]

$$(d) \quad W = K_f - K_i \quad \text{where } t_i = 0 \quad \text{and} \quad t_f = 2 \text{ s.}$$

At  $t_i = 0$ ,

$$K_i = 2 \text{ J}$$

At  $t_f = 2 \text{ s}$ ,

$$K_f = [2 + 24(2)^2 + 72(2)^4] = 1250 \text{ J}$$

Therefore,

$$W = 1.25 \times 10^3 \text{ J}$$

---

---

