<u>معكوس المصفوفة</u> اذ كانت A مصفوفة مربعة وغير انفرادية($|A|\neq 0$) فان معكوسها يحسب من قسمة عناصر المصفوفة المرافقة للمصفوفة A على محدد A

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$$

<u>معكوس المصفوفة من الدرجة (2x2)</u>

لإيجاد معكوس مصفوفة من الدرجة (2x2) على فرض المحدد لا يساوي الصفر

<u>البرهان</u>

لتكن $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}|d|=d \quad , \quad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}|b|=-b$$

$$\alpha_{21}=(-1)^{2+1}|c|=-c \quad , \quad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}|a|=a$$

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow adi(A)=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$|A|=ad-bc$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

اذن يمكن حساب المعكوس كالآتي :

1) نحسب محدد المصفوفة وشرط ان لا يساوي الصفر .

2) نبدل عناصر القطر الرئيسي.

3) نغير اشارات عناصر القطر الثانوي .

4)نقسم كل عنصر على المحدد .

<u>مثال</u> جد معكوس المصفوفة A حيث ان

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u> نحسب محدد المصفوفة

$|A|=6+1=7$ **بما ان** $|A|\neq 0$ **اذن المصفوفة لها معكوس**

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

<u>مثال</u> جد معكوس المصفوفة B حيث ان

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u> (1) نحسب محدد المصفوفة

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix}$$

$$= 0 + 6 + 6 - 9 - 0 - 4 = -1$$

بما ان $|B| \neq 0$ اذن المصفوفة لها معكوس

(2) نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-6) = 0 \quad , \quad \alpha_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$\alpha_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \quad , \quad \alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$$

$$\alpha_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3 \quad , \quad \alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 9 = 3 \quad , \quad \alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0+3) = -3$$

$$\alpha_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad adj(A) = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3) نجد المعكوس

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>ملاحظة</u> معكوس المصفوفة القطرية هي مصفوفة قطرية فيها عناصر القطر الرئيسي مساوية الى مقلوب عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة المراد حساب معكوسها

اذا كانت D مصفوفة قطرية من الدرجة (nxn)

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots \quad d_{nn} \end{bmatrix}$$

فان

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

<u>مثال</u> جد معكوس المصفوفة **D** حيث ان

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u> 1) نجد محدد D

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6(-3) = -18$$

بما ان المحدد لايساوي الصفر اذن المصفوفة لها معكوس

2) نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad \alpha_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{13} (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad \alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \alpha_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adi(D) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

3) نحسب المعكوس

$$D^{-1}=\frac{adj(D)}{|D|}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{-18} & 0 & 0\\ 0 & \frac{-6}{-18} & 0\\ 0 & 0 & \frac{18}{-18}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

لاحظ ان عناصر القطر الرئيسي في المعكوس هي مقلوب عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة D .

ملاحظة من الملاحظة اعلاه يمكن الاستنتاج بان معكوس المصفوفة الاحادية I يساوي المصفوفة نفسها .

مثال جد معكوس المصفوفة التالية

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الحل 1) نجد المحدد

$|I|=1-0=1$ **بمان ان** $|I|\neq 0$ **اذن المصفوفة لها معكوس**

2) نحسب المصفوفة المرافقة

$$\left[A_{ij}\right]^{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=adj(A)$$

3) نجد المعكوس

$$I^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

بعد ان تعرفنا على طريقة حساب معكوس المصفوفة سوف نستخدم هذا المعكوس لإيجاد حل النظام الخطي للمعادلات بشرط ان تكون المصفوفة غير انفرادية .

اذا كانت عدد المجاهيل مساوية لعدد المعادلات

الحل بهذه الطريقة يكون بتحويل النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل $AX=B$

$$A^{-1}AX=A^{-1}B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}B$$

ليكن لدينا النظام الخطي التالي

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

1) نحول النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

حيث ان A هي مصفوفة المعاملات وXهو عمود المجاهيل وB عمود الحدود المطلقة

2) نجد محدد المصفوفة A وشرط ان لا يساوي الصفر

3) نجد المصفوفة المرافقة
4) نحسب معكوس A
5) نجد الحل بضرب المعكوس في العمود B
وللتحقق من صحة الحل نعوض قيم X في معادلات النظام الخطي ولكي يكون هو الحل يجب ان يحقق جميع المعادلات الخطية .

<u>مثال</u> حل النظام الخطي التالي :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

<u>الحل</u> 1) نحول النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2) نحسب المحدد للمصفوفة A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$$= -24 - 30 - 30 + 36 + 25 + 24 = 1$$

بما ان $|A| \neq 0$ **اذن المصفوفة لها معكوس**

3) نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -24 + 25 = 1 \quad , \quad \alpha_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(-12 + 15) = -3 \quad ,$$

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2 \quad , \quad \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(12 - 15) = 3$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3 \quad , \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2 \quad , \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -(-5 + 6) = -1$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad adi(A) = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4) نحسب المعكوس

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

5) نجد الحل للنظام الخطي

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6+6\\ -3-6-3\\ 2+2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ -12\\ 4\end{bmatrix}$$

اي ان الحل لهذا النظام $x_1=13,\ x_2=-12,\ x_3=4$

<u>مثال</u> جد حل النظام الخطي التالي

$$x_1-x_2+2x_3=1$$
$$2x_1+x_2+x_3=-1$$
$$x_1+2x_2-3x_3=8$$

<u>الحل</u> 1) نحول النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 8\end{bmatrix}$$

2) نحسب محدد المصفوفة

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2\end{array}\right.$$

$$=-3-1+8-2-2-6=-6$$

بما ان المحدد لا يساوي الصفر اذا النظام الخطي له حل

2) نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5\ ,\quad \alpha_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=7\ ,\quad \alpha_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$\alpha_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1\ ,\quad \alpha_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5\ ,\quad \alpha_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3$$

$$\alpha_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3\ ,\quad \alpha_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & \end{vmatrix}=3\ ,\quad \alpha_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix}-5 & 7 & 3\\ 1 & -5 & -3\\ -3 & 3 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad adj(A)=\left[A_{ij}\right]^T=\begin{bmatrix}-5 & 1 & -3\\ 7 & -5 & 3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

3) نجد معكوس المصفوفة

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-5 & 1 & -3\\ 7 & -5 & 3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

4) نجد الحل للنظام الخطي

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-5 & 1 & -3\\ 7 & -5 & 3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 8\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-5-1-24\\ 7+5+24\\ 3+3+24\end{bmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-30\\ 36\\ 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-30/-6\\ 36/-6\\ 30/-6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -6\\ -5\end{bmatrix}$$

اذن الحل للنظام الخطي هو $x_1=5 \quad , \quad x_2=-6 \quad , \quad x_3=-5$

<u>مثال</u> ثلاثة اشخاص معدل اعمارهم 30 سنة فاذا كان مر الاول يزيد على عمر الثاني بثلاث سنوات وعمر الثالث يقل عن عمر الثاني بسنتين استخدم معكوس المصفوفة لإيجاد الاعمار

<u>الحل</u> نفرض عمر الاول= x_1

وعمر الثاني = x_2

وعمر الثالث = x_3

من المعلومات الواردة في السؤال يمكن تكوين المعادلات التالية

$$x_1+x_2+x_3=\frac{30}{3}=10$$

$$x_1=x_2+3$$

$$x_3=x_2-2$$

1) نعيد ترتيب المعادلات

$$x_1+x_2+x_3=10$$

$$x_1-x_2 \qquad =3$$

$$-x_2+x_3=-2$$

2) نحول النظام الخطي الى مصفوفات AX=B

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

نحسب محدد المصفوفة A

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}=-1+0-1-0-0-1=-3$$

بما ان المحدد لا يساوي الصفر اذن النظام الخطي له حل

3) نجد المصفوفة المرافقة

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad , \quad \alpha_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad , \quad \alpha_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

$$\alpha_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \quad , \quad \alpha_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad , \quad \alpha_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad , \quad \alpha_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1 \quad , \quad \alpha_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$$

$$\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj(A)=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4) نجد المكوس

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5) نحسب الحل للنظام الخطي

$$X=A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -10-6-2 \\ -10+3-2 \\ -10+3+4 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} -18/-3 \\ -9/-3 \\ -3/-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اي ان عمر الاول 6 سنوات وعمر الثاني 3 سنوات وعمر الثالث سنة واحدة . وللتحقق من صحة الحل نعوض قيم ال x في المعادلات الثلاث

$$6+3+1=10$$
$$6-3=3$$
$$-3+1=-2$$

(5-5-2) جل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات

طريقة كرامر Cramer Method

تستخدم هذه الطريقة المحددات لحل نظام المعادلات الخطية وهي اسهل من طريقة معكوس المصفوفة .

ليكن لدينا النظام الخطي $AX=B$ من الدرجة (nxn) الذي يحتوي على n من المعدلات الخطية ذات n من المجاهيل بشرط ان $|A|\neq 0$ فان حل النظام سيكون كالآتي

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|} \quad , \quad j=1,2,3,\cdots,n$$

حيث ان A_j هو محدد A بعد ابدال العمود j بالعمود B (عمود الحدود المطلقة) .

لنأخذ النظام الخطي من الدرجة (3x3)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_x+a_{22}x_2+a_{23}x=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

وكما ذكرنا شرط ان يكون $|A|\neq 0$ فان

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|} \quad , \quad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}$$

وان

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad |A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad |A_3|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال حا النظام الخطي التالي باستخدام طريقة كرامر

$$-4x_1+2x_2-9x_3=2$$
$$3x_1+4x_2+x_3=5$$
$$x_1-3x_2+2x_3=8$$

الحل 1) نحول النظام الخطي الى صيغة المصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -9 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2) نحسب محدد المصفوفة A

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & 2 & -9 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right.$$

$$= -32 + 2 + 81 + 36 - 12 - 12 = 63$$

بما ان المحدد لا يساوي الصفر اذن النظام الخطي له حل

2) نحسب المحددات $|A_1|, |A_2|, |A_3|$

$$|A_1| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -9 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 8 & -3 \end{array}\right. = 16 + 16 + 135 + 288 + 6 - 20 = 441$$

$$|A_2| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & 2 & -9 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right. = -40 + 2 - 216 + 45 + 32 - 12 = -189$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 8 & 1 & -3 \end{array}\right. = -128 + 10 - 18 - 8 - 60 - 48 = -252$$

3) نجد الحل للنظام الخطي

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{441}{63} = 7$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-189}{63} = -3$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-252}{63} = -4$$

وللتحقق من صحة الحل نعوض قيم x_1, x_2, x_3 **في المعادلات الثلاث للنظام**

$$-4(7) + 2(-3) - 9(-4) = -28 - 6 + 36 = 2$$

$$3(7) + 4(-3) + (-4) = 21 - 12 - 4 = 5$$

$$7 - 3(-3) + 2(-4) = 7 + 9 - 12 = 8$$

لاحظ ان قيم x حقق المعادلات الثلاث وبذلن تكون حل لنظام المعادلات الخطية

<u>مثال</u> جد حل نظام المعادلات الخطية التالي

$$x - y = 1$$

$$x - z = 3$$

$$y + z = 8$$

<u>الحل</u> 1) نحول النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2) نحسب المحددات $|A| \quad ,|A_1| \quad ,|A_2| \quad ,|A_3|$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| =0+0+0+0+1+-1=2$$

$$|A_1|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 8 & 1 \end{array}\right| =0+8+0+0+1+3=12$$

$$|A_2|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right| =3+0+0+0+8-1=10$$

$$|A_3|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right| =0+0+1+0-3+8=6$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{12}{2} = 6 \text{ ,}$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{10}{2}=5$$

$$x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{6}{2}=3$$

اي ان حل النظام هو $x_1 = 2 \quad , x_2 = 5 \quad , x_3 = 3$

<u>مثال</u> ليكن لدينا النظام التالي

$$kx_2 - 2x_3 - a = 0$$
$$-2x_3 = -kx_1 + b$$
$$kx_3 - 3x_2 + x_1 = c$$

1) ماهي قيم k التي تجعل النظام ليس له حل

2) جد حل النظام بطريقة كرامر عندما يكون a=2, b=-1 , c=1 , k=-1

<u>الحل</u>

1) نعيد ترتيب المعادلات الخطية

$$kx_2 - 2x_3 = a$$
$$kx_1 - 2x_3 = b$$
$$x_1 - 3x_2 + kx_3 = c$$

نحول النظام الخطي الى مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 0 & k & -2 \\ k & 0 & -2 \\ 1 & -3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

النظام ليس له حل اذا كان $|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & k & -2 \\ k & 0 & -2 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & k & -2 \\ k & 0 & -2 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & k \\ k & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} = + - 2k + 6k + 0 + 0 - k^3 = 0$$

$$4k - k^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k(4 - k^2) = 0$$

اما $k = 0$ **او**

$$4 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Rightarrow k = \mp 2$$

2) الحل بطريقة كرامر : لحل النظام الخطي نعوض قيم k,a,b,c نحصل على

$$-x_2 - 2x_3 = 2$$
$$-x_1 - 2x_3 = -1$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = 1$$

نحول النظام الخطي الى مصفوفات بالشكل AX=B

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نحسب المحددات $|A| \quad ,|A_1| \quad ,|A_2| \quad ,|A_3|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 0 + 2 - 6 + 0 + 0 + 1 = -3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 0 + 2 - 6 + 0 - 12 + 1 = -15$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0 - 4 + 2 - 2 + 0 - 2 = -6$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 0+1+6+0+0-1=6$$

نجد الحل قيم ال x

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-15}{-3} = 5 \quad , x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2 \quad , x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2$$

تمارين

س1/ اذا كانت المصفوفة A من الدرجة ن الدرجة (3x3) ومعطاة كالآتي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & - & 1 \end{bmatrix}$$ **احسب المعكوس لها**

س2/ جد معكوس المصفوفات التالية

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

س3/ جد قيمة الثابت k الذي يجعل المصفوفة التالية منفردة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & k & k \end{bmatrix}$$

س4/ جد معكوس المصفوفة التالية ان امكن ذلك

$$1)\ E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad (2) \quad F = \begin{bmatrix} 3i & 5 & 6+7i \\ 4+2i & 1+i & 3-5i \\ 3 & 2-i & 6+i \end{bmatrix}$$

س5/ احسب معكوس كل من المصفوفات التالية حيث ان

$$1)\ D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad (2)\ E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

س6/ اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

اثبت صحة العلاقة التالية $(AxB)^{-1} = B^{-1}xA^{-1}$

س7/ جد المصفوفة المرافقة للمصفوفات التالية

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \quad , \quad (2)\ B=\begin{bmatrix} -6/7 & 2/7 & 3/7 \\ 2/7 & -3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 6/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

س8/ جد حل انظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة معكوس المصفوفة ان امكن

$$1)\quad \begin{aligned} 3x-4y&=-2 \\ x+y&=6 \end{aligned} \qquad , \qquad 2)\quad \begin{aligned} 3x&=5+y \\ -x&=2-4y \end{aligned}$$

س9/ استخدم المصفوفات لإيجاد حل الانظمة الخطية التالية

$$1)\quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0 \\ 2x_1-x_2-4x_3&=15 \\ x_1-2x_2-x_3&=7 \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} x_1-2x_2-2x_3&=3 \\ 2x_1-4x_2+4x_3&=1 \\ 3x_1-3x_2-3x_3&=4 \end{aligned}$$

س10/ استخدم المحددات لإيجاد حل الانظمة الخطية التالية

$$1)\quad \begin{aligned} 3x_1+2x_2-2x_3&=3 \\ x_1+2x_2+3x_3&=6 \\ 2x_1-x_2+x_3&=2 \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} x_2+2x_3&=7 \\ x_1-x_2&=3 \\ 2x_1+3x_2+4x_3&=17 \end{aligned}$$

س11/ اذا كان عدد الرجال والنساء والاطفال في مدينة مقدرة بالألف هو 85 نسمة , فاذا كان عدد الاطفال يساوي مجموع عدد الرجال والنساء , وكان عدد النساء يزيد بمقدار 25 على عدد الرجال , فكم هو عدد كل من الرجال والنساء والاطفال في تلك المدينة و وذلك باستخدام (1) طريقة معكوس المصفوفة

(2) طريقة كرامر

س12/ حل الانظمة الخطية التالية

$$1)\quad \begin{aligned} 3x_1-x_3+4x_2&=18 \\ 2x_1+6x_2+4x_3&=11 \\ x_2-3x_1+6x_3&=7 \end{aligned} \qquad , \qquad (2)\quad \begin{aligned} -2x_1-3x_2+x_3&=3 \\ 2x_2+x_1+x_3&=1 \\ 3x_1-x_2-x_1-6&=0 \end{aligned}$$

س13/ لتكن

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

جد قيمة العدد a الذي يحقق $A^2-AB+aI_3=0$ **واحسب معكوس المصفوفة A**