حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى بطريقة فصل المتغيرات

تستخدم الطريقة المباشرة لفصل المتغيرات اذا امكن كتابة الدالة $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

بالشكل $f(x,y) = \frac{F(x)}{G(y)} \leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{G(y)} \leftarrow G(y)dy = F(x)dx$

ثم بإجراء التكامل للطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (1) اوجد حل المعادلة التفاضلية الاتية $\frac{dy}{dx} = \frac{x+xy}{1+y}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{1+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \to dy = xdx$$

باجراء التكامل للطرفين

$$\int dy = \int xdx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

مثال (2) حل المعادلة التفاضلية الاتية $\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \qquad , y(2) = 9$

الحل

$$[\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}].\frac{dx}{\sqrt{y}} \quad \to \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = xdx$$

$$y^{-\frac{1}{2}}dy = xdx \quad \Rightarrow \int y^{\frac{-1}{2}}dy = \int xdx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

بتعويض الشرط الابتدائي $y = 9, x = 2$ **نحصل على قيمة الثابت c**

$$2\sqrt{9} = \frac{4}{2} + c \quad \Rightarrow 6 = 2 + c \quad \Rightarrow c = 4$$

نعوض قيمة الثابت في المعادلة اعلاه نحصل على

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 4 \quad \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2 \quad \Rightarrow y = \left(\frac{x^2}{4} + 2\right)^2$$

اذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y = \left(\frac{x^2}{4} + 2\right)^2$

<u>مثال (3)</u> اوجد حل المعادلة الاتية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1} \quad , \quad y(0) = 1$

<u>الحل</u>

$$[\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}].\frac{dx}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y+1| = \ln|x-1| + \ln c$$

$$\ln|y+1| = \ln|c(x-1)| \quad \Rightarrow y+1 = c(x-1)$$

بتعويض الشرط الابتدائي $x = 0, y = 1$ **نحصل على قيمة الثابت c**

$$1+1=(0-1)c \quad \Rightarrow \quad c=-2$$

ثم نعوض قيمة الثابت نحصل على

$$y+1=-2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-2x+2-1 \quad \Rightarrow y=-2x+1$$

اي ان الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو $y=-2x+1$

<u>مثال (4)</u> اوجد الحل الخاص للمعادلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x(x+1)} \quad , \quad y(1)=3$$

الحل نضرب المعادلة في $\frac{dx}{y}$ **ينتج**

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x(x+1)} \quad \cdots(*)$$

نحسب تكامل الطرف الايمن بتجزئة الكسور

$$\int\frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$$=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

بمساواة معاملات البسط نحصل على

$$A+B=0 \quad \cdots(1) \qquad , \quad A=1 \quad \cdots(2)$$

نعوض قيمة A في معادلة (1) لإيجاد قيمة B

$$B=-1 \leftarrow$$

$$\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\ln c=\ln\left|\frac{cx}{x+1}\right| \quad \cdots(**)$$

نجد تكامل الطرف الايسر للمعادلة (*) ونعوض (**)

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{cx}{x+1}\right|$$

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{cx}{x+1}\right| \quad \Rightarrow y=\frac{cx}{x+1}$$

$$3=\frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad c=6$$

$$\therefore \quad y=\frac{6x}{x+1}$$

<u>مثال (4)</u> اوجد الحل العام للمعادلة الاتية $x\sin^2 y\,dy=(x+1)^2\,dx$

<u>الحل</u> نقسم المعادلة على x

$$\sin^2 y\,dy=\frac{(x+1)^2}{x}dx$$

$$\int \sin^2 y\,dy=\int \frac{(x+1)^2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1-\cos 2y}{2}dy=\int \frac{x^2+2x+1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int dy-\frac{1}{2}\int \cos 2y\,dy=\int (x+2+\frac{1}{x})dx$$

$$\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\sin 2y=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+c$$

<u>طريقة التعويض</u> في بعض المسائل لا يمكن فصل المتغيرات فيها الا بعد اجراء تعويض مناسب على متغيرات المعادلة كما في الامثلة التالية

<u>مثال (5)</u> اوجد حل المعادلة الاتية $(x+y)dy=(x-y)dx \quad \cdots(1)$

<u>الحل</u> نقسم المعادلة (1) على dx

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{x(1-\frac{y}{x})}{x(1+\frac{y}{x})}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \quad \cdots(**)$$

نفرض

$$z=\frac{y}{x} \quad \cdots(1)\Rightarrow \quad y=zx$$

$$\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx} \quad \cdots(2)$$

نعوض (1) و(2) في المعادلة (**) $\longleftarrow$ $z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{1+z}$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{1+z} - z \quad \Rightarrow \quad [x\frac{dz}{dx} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}].\frac{1}{dz}$$

$$\frac{x}{dx} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}.\frac{1}{dz} \quad \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{1+z}{1-2z-z^2}dz$$

$$\ln|x| + \ln c = -\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| \quad \Rightarrow \quad -2\ln|cx| = \ln|1-2z-z^2|$$

$$\ln|c_1x^{-2}| = \ln|1-2z-z^2| \quad \Rightarrow \quad [c_1x^{-2} = 1 - \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}].x^2$$

$$c_1 = x^2 - 2xy - y^2 \qquad , \quad (c_1 = c^{-2})$$

<u>مثال(6)</u> $\frac{dy}{dx} = (x+y+1)^2 - 1 \quad \cdots(1)$

<u>الحل</u> **نفرض** $(2)\cdots \quad z = x+y+1$ $\longleftarrow$ **نشتق بالنسبة الى x**- $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

$(3)\cdots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$ **نعوض (2) و(3) في المعادلة (1)**

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \quad \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx$$

$$z^{-2}dz = dx \quad \Rightarrow \int z^{-2}dz = \int dx$$

$$-z^{-1} = x + c \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = -(x+c)$$

$$(x+y+1)^{-1} = -(x+c) \quad \Rightarrow \quad x+y+1 = \frac{-1}{x+c}$$

م. وفاء عبدالصمد عاشور

كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة البصرة