# المتتابعات الحسابية والهندسية

المتتابعة في حياتنا اليومية تعني تتابع الأشياء او الحوادث بنظام معين, اما في الرياضيات فتعرف بانها دالة مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية ومجالها المقابل مجموعة الاعداد الحقيقة. وتعد من المواضيع الأساسية التي اعتمدها الانسان وطبقها في حياته التجارية بالإضافة الى استخدامها في كثير من العلوم الأخرى.

**تعريف المتتابعة:** المتتابعة عبارة عن دالة مجالها الاعداد الطبيعية او مجموعة جزئية منها, ومداها مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقة. عناصر المدى تسمى بحدود المتتابعة. اذا كانت $n$ تمثل عدد حدودالمتتابعةحيث تنتمي الى الطبيعية الاعداد, $S_n$ تسمى الحدالنوني للمتتابعة.

يمكن كتابة المتتابعة بشكل $\{S_n\}$.

**مثال 1: فك المتتابعة التالية:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n \times (-1)^n\}.$$

**الحل:**

واضح ان

$$S_1 = 1 \times (-1)^1 = -1،\ \ S_2 = 2 \times (-1)^2 = 2،\ S_3 = 3 \times (-1)^3 = -3، \dots$$

$$\Longrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1، 2، -3، 4، \dots)$$

**مثال 2 :استنتج الحد النوني للمتتابعة التالية:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots.).$$

**الحل:**

واضح انها متتابعة غير منتهية واشارتها تتعاقب ابتداءأ بالموجب وأيضا التغير بالمقام حيث:

$$S_1 = \frac{+1}{3} = \frac{1}{3} \times (-1)^{1+1}،\ \ S_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (-1)^{2+1}،\ S_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times (-1)^{3+1}، \dots$$

$$\Longrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (-1)^{n+1}$$

**ملاحظات:**

**1- تكون المتتابعة منتهية اذا كان لها حدا أخير مثل:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{5} = (1,3,5,7,9).$$

**2- تكون المتتابعة غير منتهية إذا كان ليس لها حد أخير مثل:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = (2,4,6,8,\dots).$$

**3- ليس من الضروري أختلاف حدود المتتابعة مثل:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = (3,3,3,3,\dots).$$

**4- لا يشترط وجود قاعدة للمتتابعة ( قانون معين للحد العام) مثل:**

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = (2,3,5,7,\dots).$$

**5** – المرادبالحد النوني $\{S_n\}$ **للمتتابعة هو قانون فك المتتابعة الى عناصرها.**

**6** – الحد النوني $\{S_n\}$ يسمى $n$ **رتبة الحد ، فمثلاً :**

نسمي : $S_1$ الحدالاول $S_2$الحدالثاني $S_3$الحدالثالث وهكذا

**7- الحد العام يمثل جميع الحدود في المتتابعة وعن طريقه نستنتج أي حد نريده.**

**8- إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية : ( + ، – ، + ، – ، ..... )**

**فأن الحد النوني لهذا التغير هو**

$$\{S_n\} = (-1)^{n+1} \text{ or } \{S_n\} = (-1)^{n-1}, n \in N.$$

**9- إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية ( – ،+ ، – ، + ، ..... )البداية سالبة فأن الحد النوني لهذا التغير هو :**

$$\{S_n\} = (-1)^{n}.$$

**<u>تمارين:</u>**

**استنتج الحد النوني للمتتابعات التالية، ثم اوجد الحد الرابع عشر:**

**1-** $(1,2,6,24,120,\dots)$
**2-** $(1,3,6,10,15,\dots)$
**3-** $(0,3,8,15,\dots)$
**4-** $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},-1,\dots\right)$
**5-** $\left(2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,\dots\right)$

**<u>المتتابعة الحسابية:</u>**

$\{S_n\}$ متتابعة منتهية اوغيرمنتهية تسمى متتابعة حسابية اذاوجدعدداً ثابتا$D$بحيث :

$$D = S_{n+1} - S_n, \forall\, n \in N.$$

تسمى $D$ باساس المتتابعة الحسابية

**الحد العام للمتتابعة الحسابية:**

يكتب الحد العام للمتتابعة الحسابية على الصورة التالية:

$$S_n = S_1 + (n-1) \times D$$

حيث $S_1$ : الحدالاول $n$ : رتبة الحد ، $D$ : الاساس ، $S_n$ : الحدالاخير

**ملاحظة**: اذا عرف الحد الأول والاساس فأننا نستطيع الحصول عل جميع حدود المتتابعة وذلك بإضافة الأساس الى الحد السابق فتحصل على الحد اللاحق وهكذا فتحصل على جميع حدود المتتابعة.

**مثال 1**: أوجد المتتابعة الحسابية إذا كان حدها الأول = 7 ' وأساسها = -2 .

**الحل :**

المعطى $S_1 = 7$ ، $D = -2$

من الملاحظة في الأعلى نجد أن

$S_1 = 7$ ، $S_2 = 7 + (-2) = 5$ ، $S_3 = 5 + (-2) = 3$

المتتابعة هي (7 ،5 ،3 ، 1، -1،... )

طبعاً إذا كانت المتتابعة غير منتهية نكتفي بكتابة حدودها الأولى.

**مثال 2:**

اوجد $S_{15}$ من المتتابعة الحسابية $(\ldots, 66, 73, 80, 87)$ ثم اكتب الحد العام للمتتابعة .

**الحل :**

لغرض إيجاد أي حد من حدود المتتابعة لابد من إيجاد قيم الحد الأول والاساس وعدد الحدود المتتابعة.

حيث المتتابعة حسابية $\Leftarrow$ $D = 87 - 80 = -7$ ، $S_1 = 87$ : الحدالاول ،$n = 15$ : عددالحدود

وطبعا لإيجاد أي حد في المتتابعة الحسابية نعوض في الحد العام:

$$S_n = S_1 + (n-1) \times D$$

$$\Rightarrow S_{15} = 87 + (15-1) \times -7$$

$$= 87 + 14 \times -7$$

$$= 87 - 98$$

$$S_{15} = -11$$

**تمارين:**

1- إذا كان الحد الخامس من متتابعة يساوي 9 والحد الثامن يساوي 15 أوجد المتتابعة.

2- أوجد رتبة الحد الذي قيمته :99 من المتتابعة الحسابية : ( 7 ، 9 ، 11 ، ..... )

3- متتابعة حسابية حدها الثامن ينقص عن حدها الثالث بمقدار 20 والحد الثالث ضعف الثامن ، فاوجد الحد الثاني عشر فيها .

4- متتابعة حسابية فيها الحد الخامس 14 والحد الثامن 20 ، اوجد المتتابعة.

5- متتابعة حسابية مجموع الحدود الثلاثة منها = 36 ' ومجموع الحدين الخامس والسادس = 66 أوجد المتتابعة .

6- أوجد عدد الحدود المتتابعة الحسابية ( - 10 ، -7 ، -4 ، .....، 50 )

**المتتابعة الهندسية:**

$\{S_n\}$ متتابعة منتهية اوغيرمنتهية تسمى متتابعة هندسية اذاوجدعدداً ثابتا$d$بحيث :

$$d = S_{n+1} \div S_n ، \forall\, n \in N.$$

تسمى $d$ باساس المتتابعة الهندسية

**الحد العام للمتتابعة الهندسية:**

يكتب الحد العام للمتتابعة الهندسية على الصورة التالية:

$$S_n = S_1 \times d^{n-1}$$

حيث $S_1$ : الحدالاول $n$ : رتبة الحد ، $d$ : الاساس ، $S_n$ : الحدالاخير

**ملاحظة:** اذا عرف الحد الأول والاساس فأننا نستطيع الحصول عل جميع حدود المتتابعة وذلك بضرب الأساس في الحد السابق فتحصل على الحد اللاحق وهكذا فتحصل على جميع حدود المتتابعة.

**مثال 1:**

أوجد في المتتابعة الهندسية ( 3 ، 6 ، 12 ، 24 ، ..... ) ثم أكتب الحد العام

**الحل :**

الحد العام في المتتابعة الهندسية يكتب على الصورة :

$$S_n = S_1 \times d^{n-1}$$

لايجاد أي حد في المتتابعة نحتاج الى قيم الحد الأول والاساس وعدد الحدود المتتابعة لكي نعوضها في الحد العام

حيث المتتابعة الهندسية $\Longleftarrow$ $D = 6 \div 3 = 2$ ، $S_1 = 3$ : الحدالاول ،$n = 8$ : عددالحدود

المطلوب إيجاد الحد الثامن

$$\Longrightarrow S_8 = 3 \times 2^{8-1}$$

$$= 3 \times 2^7 = 384$$

**مثال 2:**

متتابعة هندسية حدها الأول 625 ، وحدها الأخير 1 ، وأساسها 1\ 5 فما عدد حدودها .

**الحل :**

لاحظ أن : عدد حدود المتتابعة = رتبة الحد الأخير ، وذكرنا ذلك في الملاحظة الأخير فانتبه .

المعطيات لدينا $d = \frac{1}{5}$ الاساس، $S_1 = 625$ : الحدالاول ، الحد الاخير $= 1$.

من الحد العام :

$$S_n = S_1 \times d^{n-1}$$

$$\Longrightarrow 1 = 625 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{625}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Longrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$ قسمنا الطرفين على625

من خصائص حل المعادلات الاسية $\Longrightarrow n - 1 = 4$

$$\Longrightarrow n = 5.$$

**تمارين:**

1) حدد أي من المتتابعات التالية هندسية ' ثم أوجد أساسها .

1- ( 4 ، 16 ، 64 ، .....)

2- ( 4 ، 6 ، 8 ، .....)

3- (- 3/1 ، 1 ، – 3 ، ..... )

2) اوجد قيمة $x$ في كل من المتتابعات التالية :

$$1 - \ (-15, -45, \quad x, \ldots.) \quad 2 - \ (\ x, 7, 343, \ldots.)$$

3) اوجد الحد العام في كل من المتتابعات التالية:

**1-** $\left(4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \ldots.\right)$

**2-** $(5, -10, -20, \ldots)$

**3-** $\left(\frac{3}{100}, \frac{3}{10000}, \frac{3}{1000000}, \ldots.\right)$

4) اوجد الحد الثالث من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 2 والحد الخامس 162.